



Análisis de Señales

Procesos Aleatorios
Correlación y Densidad Espectral

Señales de Energía

- Debido a los distintos tipos de señales físicas que actúan en los sistemas, se definió el término energía de la señal, para TC:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Si $x(t)$ es una tensión, las unidades son V^2s , falta dividir por R para que sea la energía. Es decir la energía de la señal es proporcional a la energía física (sobre una resistencia de 1Ω).

Señales de Energía

- De acuerdo a lo anterior la energía de la señal es proporcional a la energía real y la constante de proporcionalidad es R .
- Para el caso discreto

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Señales de Potencia

- En muchas señales ni la integral ni la sumatoria anterior convergen. La energía de la señal es infinita pues no está limitada en tiempo y no decae lo suficientemente rápido.
- En estas señales es conveniente tratar con la potencia promedio de la señal en vez de la energía.

Señales de Potencia

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Tiempo continuo

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

Tiempo discreto

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Señales periódicas

Correlación determinística

- Señales de Energía
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n + m]$$

Correlación determinística

- Señales de Potencia
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) y(t + \tau) dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] y[n + m]$$

Autocorrelación determinística

Señales de Energía

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt$$

$$R_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n + m]$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

$$R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

Autocorrelación determinística

Señales de Potencia

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t + \tau)dt$$

$$R_{xx}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]x[n + m]$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t)dt$$

$$R_{xx}[0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^2[n]$$

Experimento aleatorio

- Experimento físico en el que las salidas están reguladas de cierta manera probabilística y no determinística.
- Ante repeticiones en las mismas condiciones las salidas no son siempre las mismas.
- Ejemplos:
- Tirar un dado: seis resultados posibles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Tirar una moneda: dos resultados posibles $\{\text{cara}, \text{ceca}\}$

Modelo matemático

Tres elementos:

- Espacio muestral (S) es el conjunto de todas las salidas posibles del experimento.
- Colección particular (E) de subconjuntos de S (eventos posibles) (σ -álgebra de S).
- Una medida o ley de probabilidad (P) que asigna un número entre 0 y 1 a cada evento de E .
- A esto se lo conoce como espacio de probabilidad (*espacio de medida*).

VARIABLES ALEATORIAS

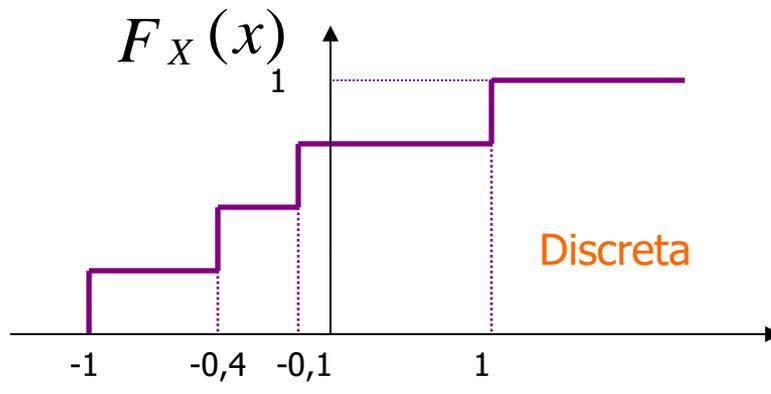
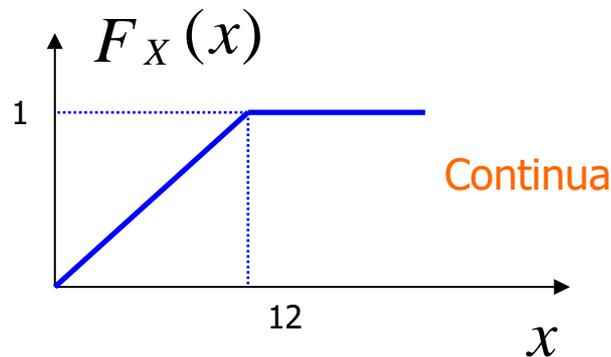
Se le llama variable pero en realidad es una función que asigna un número a cada salida de un experimento o elemento del espacio muestral $s \in S$.

- $X(s): S \longrightarrow R$ variable aleatoria continua
- $X(s): S \longrightarrow Z$ variable aleatoria discreta
- $X(s): S \longrightarrow N$ variable aleatoria discreta

Función de distribución

$$F_X(x_1) = P\{X \leq x_1\}$$

Probabilidad de que la V.A. X tome valores menores o igual que x_1



Algunas propiedades

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

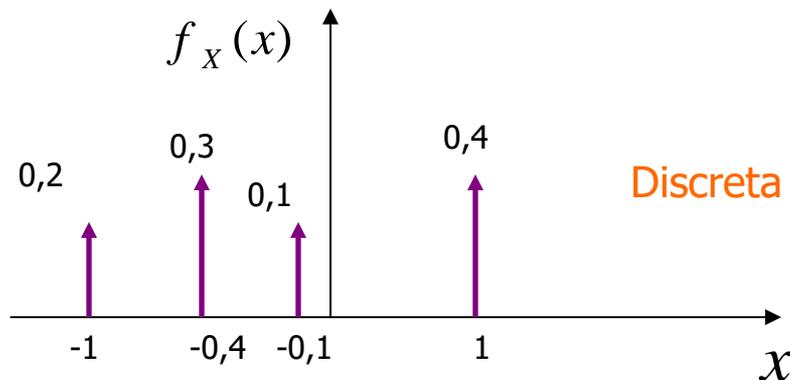
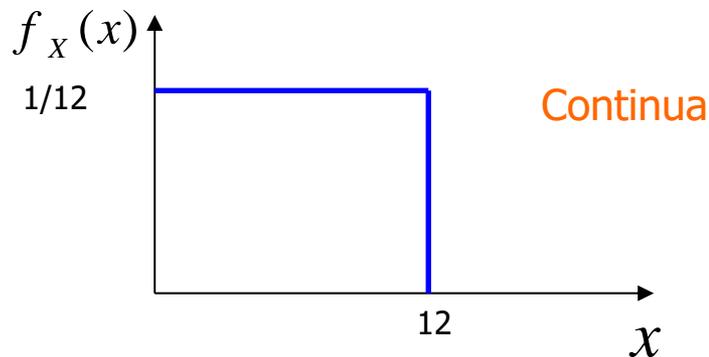
$$0 \leq F_X \leq 1$$

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \text{ con } x_1 < x_2$$

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$



Algunas propiedades

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

Operaciones sobre una VA

- Valor esperado, media estadística o Esperanza

$$E[x] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{variable aleatoria continua}$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i) \quad \text{variable aleatoria discreta}$$

- Momentos alrededor del origen

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad \begin{array}{l} m_0=1: \text{Area bajo la curva} \\ m_1 = \bar{X} \end{array}$$

Operaciones sobre una VA

- Momentos centrales (alrededor de la media)

$$\mu_n = E[(X - \bar{X})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n f_X(x) dx$$

$\mu_0 = 1$: Area bajo la curva

$\mu_1 = 0$

μ_2 se llama varianza $V[X]$, también σ_X^2

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[(X - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \bar{X})^2 f_X(x) dx = \\ &= E[(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2)] \\ &= E[X^2] - \bar{X}^2 = m_2 - m_1^2\end{aligned}$$

Operaciones sobre dos VAs

- Si tenemos dos VAs X e Y podemos calcular la correlación estadística:

$$R_{XY} = E[XY]$$

- También la covarianza:

$$C_{XY} = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]$$

Función distribución y densidad conjunta

- Las probabilidades de 2 eventos (c/u)

$$A = \{X \leq x\} \quad y \quad B = \{Y \leq y\}$$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad y \quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

- Definimos el evento conjunto

$$\{X \leq x, Y \leq y\}$$

$$F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \quad \text{Función distribución conjunta}$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \text{Función densidad conjunta}$$

Independencia estadística

- Dados dos eventos $A=\{X \leq x\}$ y $B=\{Y \leq y\}$ se dice que son estadísticamente independientes si y sólo si:

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

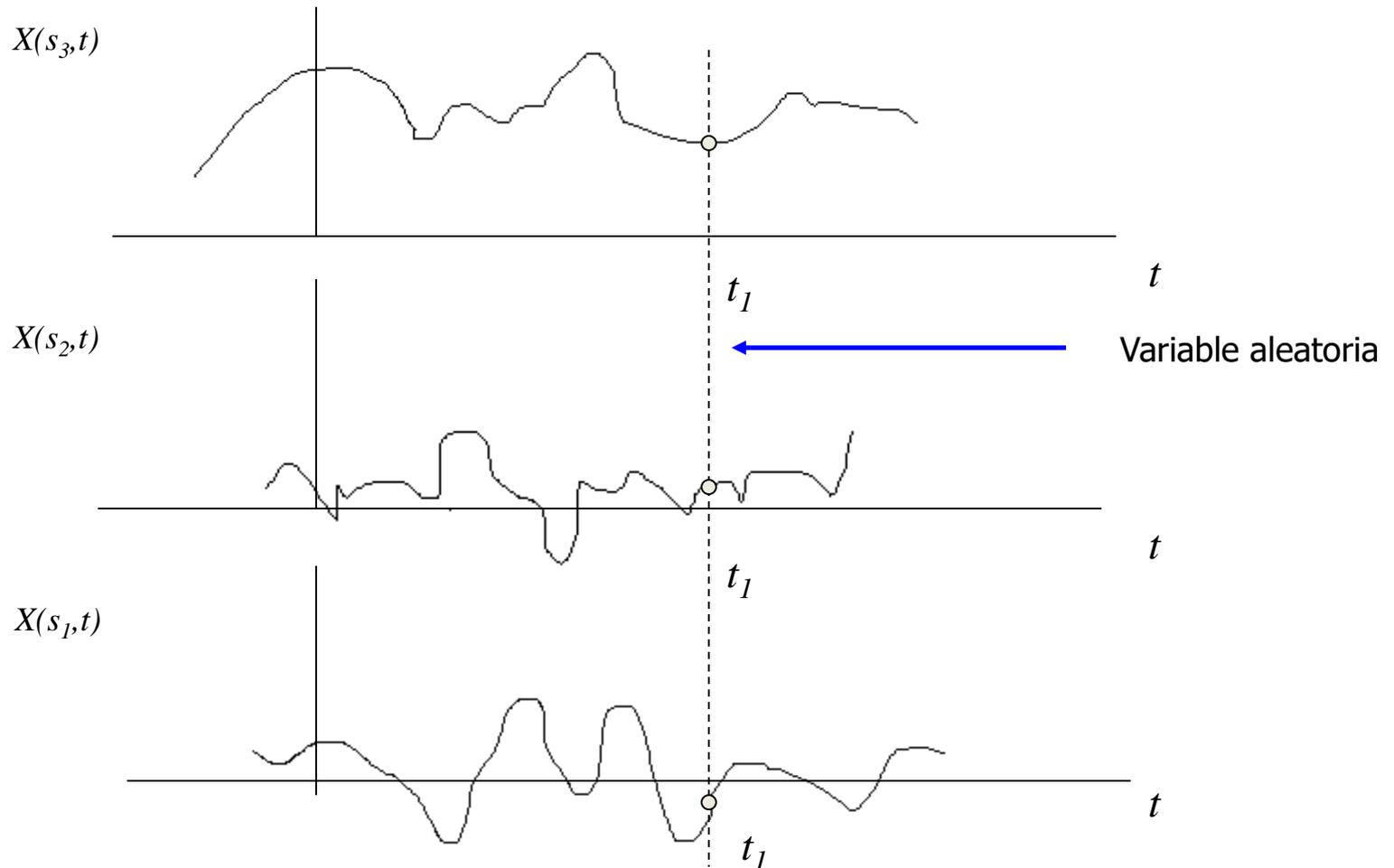
Motivación

- Encontramos señales aleatorias
- Deseadas (comunicación bits)
- No deseadas (ruido)
- ¿Cómo describimos o analizamos estas señales en el tiempo?

Procesos aleatorios

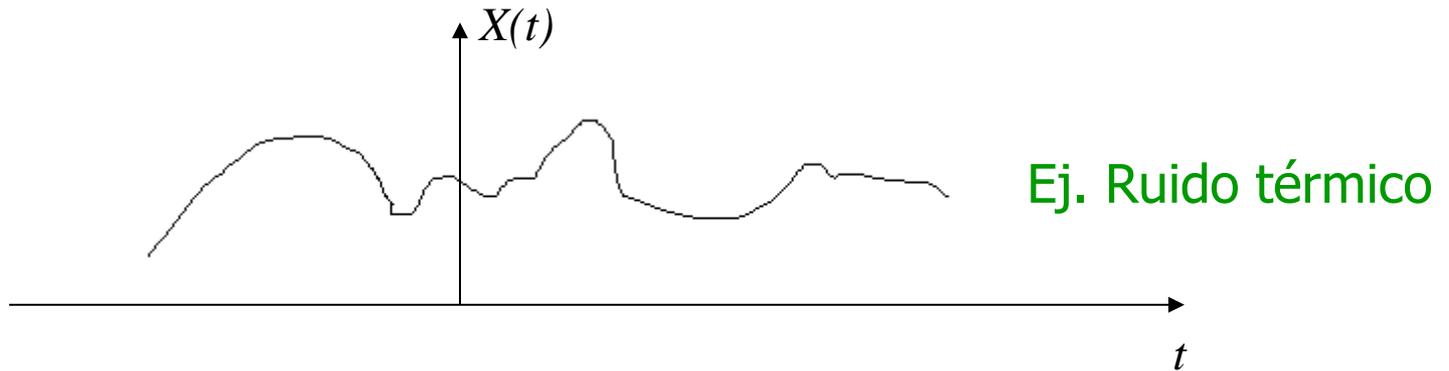
- Una variable aleatoria $X(s)$ función de las salidas s de un experimento.
- Ahora función de s y t , $X(s,t)$
- La familia de funciones $X(s,t)$ se conoce como proceso aleatorio.
- Si $t=t_1$ es fijo y s variable tenemos una variable aleatoria $X(s, t_1)$.
- Si s es fijo tenemos una función temporal $x(t)$.
- Si s y t son fijos tenemos un número.

Procesos aleatorios

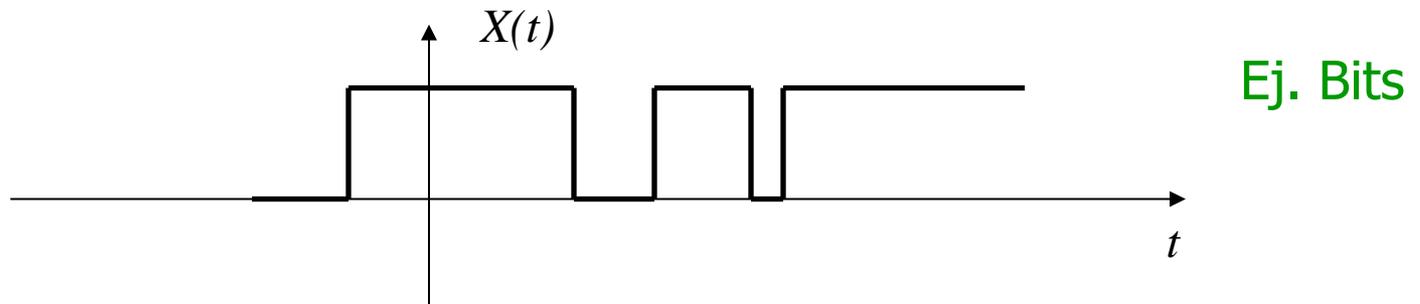


Clasificación de PA

- X y t continuos \implies PA continuo

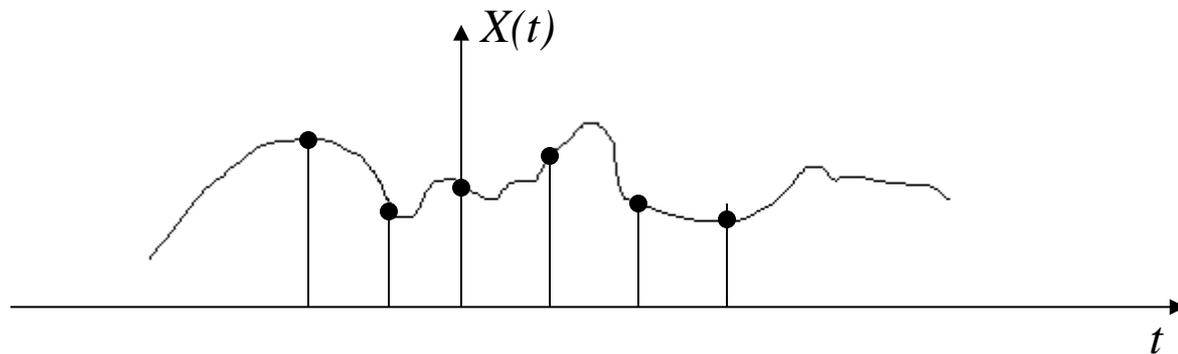


- X discreta y t continuo \implies PA discreto



Clasificación de PA

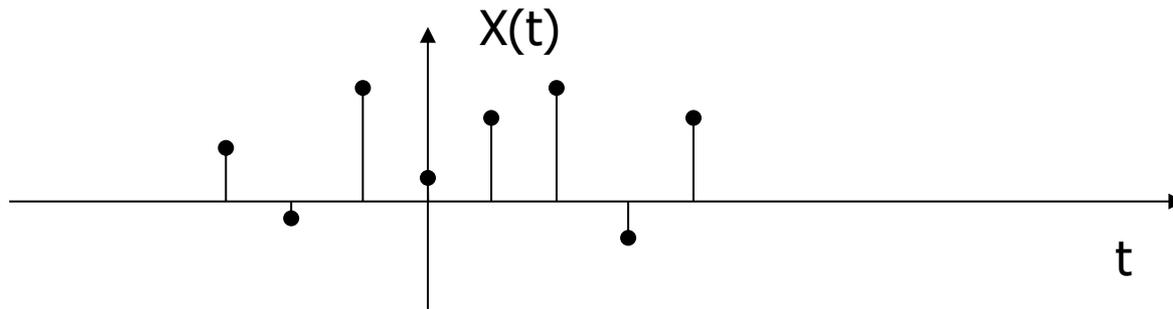
- X continuo y t discreto \implies secuencia aleatoria continua



Ej. Ruido térmico muestreado

Clasificación de PA

- X discreto y t discreto  secuencia aleatoria discreta



Ej. Secuencia de números

Ejemplos de PA

Veamos por ejemplo el siguiente proceso aleatorio:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

Donde A, ω_0 ó θ pueden ser variables aleatorias.

Ver distintas realizaciones en Octave !

Funciones de distribución del PA

Distribución de 1er. orden:

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

Distribución de 2do. orden:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

Distribución de orden N :

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) &= \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_N) \leq x_N\} \end{aligned}$$

Estadística de 1er y 2do orden

- Si conociéramos la distribución conjunta de orden N de un proceso $X(t)$ no necesitamos nada más! Conocemos todo lo que hay que saber del proceso!
- Esto rara vez sucede en la realidad!!!
- En la práctica debemos conformarnos con momentos de primer y segundo orden: medias y correlaciones del proceso.

$$E[X(t)] = \bar{X}$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

PA independiente

- Decimos que dos PA $X(t)$ e $Y(t)$ son estadísticamente independientes si y sólo si:

$$F_{XY}(x_1, t_1; y_1, t'_1) = F_X(x_1, t_1)F_Y(y_1, t'_1)$$

Para toda elección de t_1 y t'_1

PA estacionario

- En un PA si fijamos el tiempo tenemos una VA. Ésta tiene propiedades estadísticas: valor medio, varianza, etc.
- Si hacemos esto para N t distintos obtenemos N VA con sus propiedades estadísticas.
- Decimos en general que el PA es estacionario si sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

PA estacionario de 1er orden

$$F_X(x_1; t_1) = F_X(x_1; t_1 + \Delta)$$

Para cualquier t_1 y Δ .

En consecuencia $F_X(x_1; t_1)$ es independiente de t_1

 $E[X(t)] = \bar{X} = \text{constante}$

PA estacionario de 2do. orden

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

Para todo t_1, t_2 y Δ . En particular si $\Delta = -t_1$:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$$

No depende de t_1 y t_2 sino de la diferencia $\tau = t_2 - t_1$.
Implica estacionario de 1er orden y además:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

PA estacionario en sentido amplio

Decimos que un PA es estacionario en sentido amplio (PAESA) si se cumple que:

$$E[X(t)] = \bar{X} = \text{constante}$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Un PA estacionario de 2do orden lo es en sentido amplio. El recíproco en general no es cierto.

PA estacionario de orden N y en sentido estricto

$$F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = F_X(x_1, \dots, x_N; t_1 + \Delta, \dots, t_N + \Delta)$$

Para todo t_1, \dots, t_N y Δ , entonces es estacionario de orden N .

Estacionario de orden N implica estacionario de todos los ordenes $k \leq N$.

Si un proceso es estacionario para todos los ordenes $N=1,2,\dots$ entonces se dice que es estacionario en sentido estricto.

Promedios temporales y Ergodicidad

- Definimos el promedio temporal como:

$$A[.] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [.] dt$$

- Consideremos los siguientes promedios

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$\mathcal{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt$$

Promedios temporales y Ergodicidad

- Para una realización del proceso las dos integrales dan un número como resultado (que depende de la realización). Si todas las realizaciones del proceso son consideradas entonces $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$ y \bar{x} son VAs.
- Si tomamos esperanza y suponemos que podemos entrar la esperanza dentro de la integral temporal tenemos:

$$E[\bar{x}] = \bar{X}$$

$$E[\mathcal{R}_{xx}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Ergodicidad

Si por alguna razón pudiéramos afirmar que las VAs anteriores tienen varianza nula entonces:

$$\bar{x} = \bar{X}$$

$$\mathcal{R}_{xx}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Promedios temporales iguales a promedios estadísticos!!

El que establece esas condiciones es el Teorema Ergódico.

Difícil de probar. En la práctica se asume.

Autocorrelación

- Si el proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$$

- Y tiene las siguientes propiedades:

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$

$$R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$$

Otras propiedades

Si $E[X(t)] = \bar{X} \neq 0$ y $X(t)$ no tiene componentes periódicas entonces:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = \bar{X}^2$$

Si $X(t)$ tiene una componente periódica entonces:

$R_{XX}(\tau)$ también tiene una componente periódica con el mismo período.

Si $X(t)$ es ergódico, con valor medio 0 y sin componente periódica entonces:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

Ejemplo

Dado el proceso $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ donde A y ω_0 son constantes y θ es una VA uniformemente distribuida en $(0, 2\pi)$, decir si es estacionario en sentido amplio.

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 = \boxed{cte.}$$

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[A \cos(\omega_0 t + \theta) A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\ &= \boxed{\frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)} + \underbrace{\frac{A^2}{2} E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)]}_0 \end{aligned}$$

Es estacionario en sentido amplio

Motivación

- Antes analizamos señales determinísticas y sistemas lineales en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
- ¿Ahora con señales aleatorias se podrá?
- Hicimos todo el análisis de procesos aleatorios hasta acá en el dominio del tiempo.
- ¿Y en el dominio de la frecuencia?

Densidad Espectral de Potencia

Dado un PA $X(t)$:

Es posible aplicar el análisis de Fourier (TF) ?

- En general las realizaciones de un PA no decaen en el tiempo...por lo tanto energía infinita !
- Además son infinitas...en el caso que se pueda aplicar TF...a cuál de todas?...a infinitas?
- En ese caso se podría hablar de un promedio de TF pero seguimos con el problema de existencia !

Densidad Espectral de Potencia

Dado un PA $X(t)$:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T < t < T \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Satisface $\int_{-T}^T |x_T(t)| dt < \infty$ con T finito y por lo tanto tiene TF:

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Densidad Espectral de Potencia

La energía de $x(t)$ contenida en el intervalo $(-T, T)$ es:

$$E(T) = \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

Aplicando el Teorema de Parseval:

$$E(T) = \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Densidad Espectral de Potencia

Dividiendo por $2T$ tenemos la potencia promedio de $x(t)$ en $(-T, T)$:

$$P(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

Haciendo $T \rightarrow \infty$ y tomando valor esperado:

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} d\omega$$

Densidad Espectral de Potencia

Finalmente definimos la DEP como:

$$S_{XX}(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(w)|^2]}{2T}$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w) dw$$

Ejemplo

Dado el proceso $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ donde A y ω_0 son constantes y θ es una VA uniformemente distribuida en $(0, \pi/2)$, encontrar la potencia promedio P_{XX} .

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E[A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta)] = E\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) d\theta = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \text{sen}(2\omega_0 t) \\ P_{XX} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \text{sen}(2\omega_0 t) \right] dt = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Propiedades de la DEP

$$(1) \quad S_{XX}(w) \geq 0$$

$$(2) \quad S_{XX}(-w) = S_{XX}(w) \quad X(t) \text{ real}$$

$$(3) \quad S_{XX}(w) \text{ es real}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w) dw = A[E[X^2(t)]]$$

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w) e^{jw\tau} dw = A[R_{XX}(t, t + \tau)]$$

Relación entre Autocorrelación y DEP

De la propiedad 5 y si el proceso $X(t)$ es estacionario en sentido amplio tenemos que:

$$A[R_{XX}(t, t + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Y entonces:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$o \quad R_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{F} S_{XX}(\omega)$$

Forman un par transformado de Fourier

Teorema de Wiener-Khinchin

SLITs con entradas aleatorias

$X(t)$ estacionario en sentido amplio !!!



Aun cuando $x(t)$ es una señal aleatoria la respuesta del sistema será:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

SLITs con entradas aleatorias

Lo podemos interpretar como que una realización $x(t)$ del proceso $X(t)$ produce una realización $y(t)$ de un proceso de salida $Y(t)$.

Podemos ver como una definición del proceso $Y(t)$ a lo siguiente:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau$$

Y podríamos calcular medias y correlaciones para $Y(t)$.

SLITs con entradas aleatorias

Media de $Y(t)$:

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)] d\tau \\ &= \bar{X} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = \bar{Y} \end{aligned}$$

Correlaciones de entrada-salida y salida:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(t)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t)$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t) * h(t)$$

SLITs con entradas aleatorias

$$\begin{aligned} R_{YY}(t, t + \tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t - u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t + \tau - v)dv\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - u)X(t + \tau - v)]h(u)h(v)dudv = \\ R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau + u - v)h(u)h(v)dudv = \\ R_{YY}(\tau) &= R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad \leftarrow \text{||} \\ S_{YY}(f) &= |H(f)|^2 S_{XX}(f) \quad \leftarrow \text{||} \end{aligned}$$

Ruido Blanco

- Tiene todas las f , como la luz blanca, es estacionario en sentido amplio:

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} = K = cte$$

$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- No es realizable

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(f) df = \infty$$