Análisis de Señales

Muestreo

Conversión A/D

Muestreo ideal

La mayoría de las señales que nos encontramos en nuestro mundo son señales de tiempo continuo.

Por ejemplo si tenemos una señal $x(t)$, ¿Cómo la convertimos en una señal de tiempo discreto $x[n]$?

Tomando instantáneas de $x(t)$ cada T segundos.

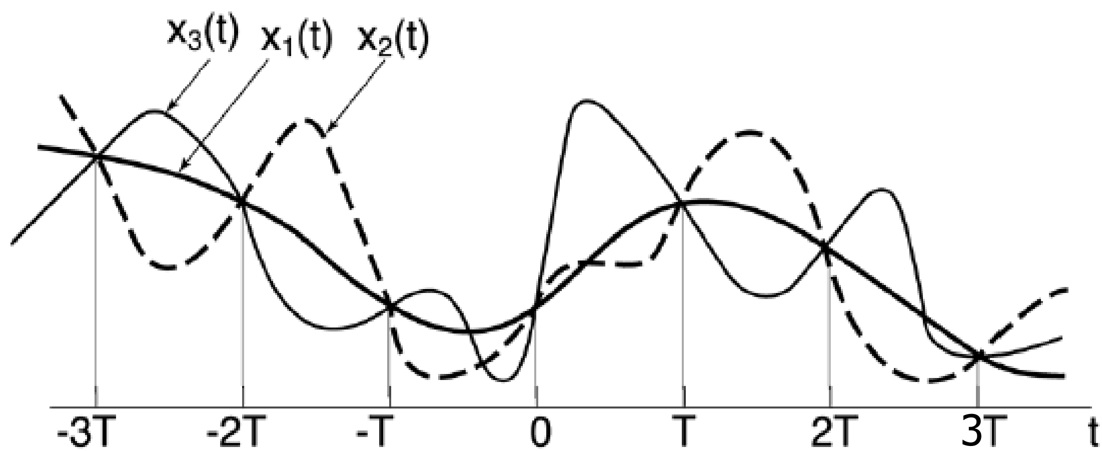
T: periodo de muestreo

$x[n]=x(nT), n=\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Muestreo ideal

¿Por qué, o cuándo, se considera adecuado un conjunto de muestras?

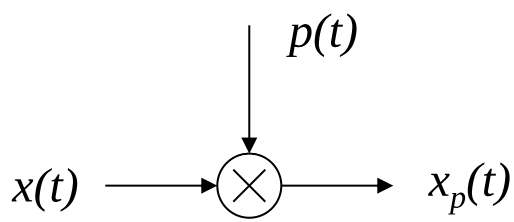
- Observación: *Muchas* señales tienen las mismas muestras



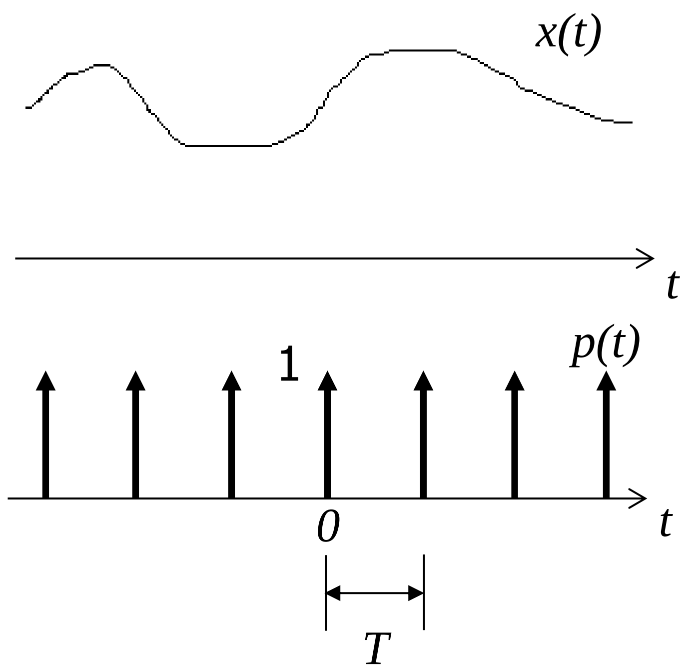
- Las técnicas de muestreo dejan de lado mucha información
  – se pierden todos los valores de $x(t)$ entre los puntos de muestreo.

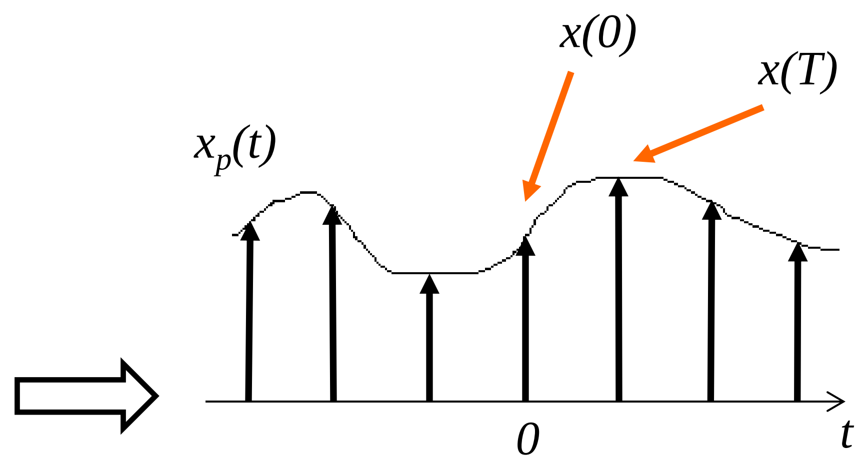
- **Cuestiones clave para el muestreo**:
  ¿Bajo qué condiciones podemos reconstruir la señal original $x(t)$ en tiempo continuo a partir de sus muestras?

Muestreo ideal



La señal $x(t)$ es multiplicada por $p(t)$, obteniendo la señal muestreada $x_p(t)$





$p(t)$ es un tren de impulsos ideales de período T, que es el intervalo de muestreo

Muestreo ideal

$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

$$X_p(f) = [X(f) * P(f)]$$

Si multiplicamos en el tiempo, convolucionamos en frecuencia

Muestreo ideal

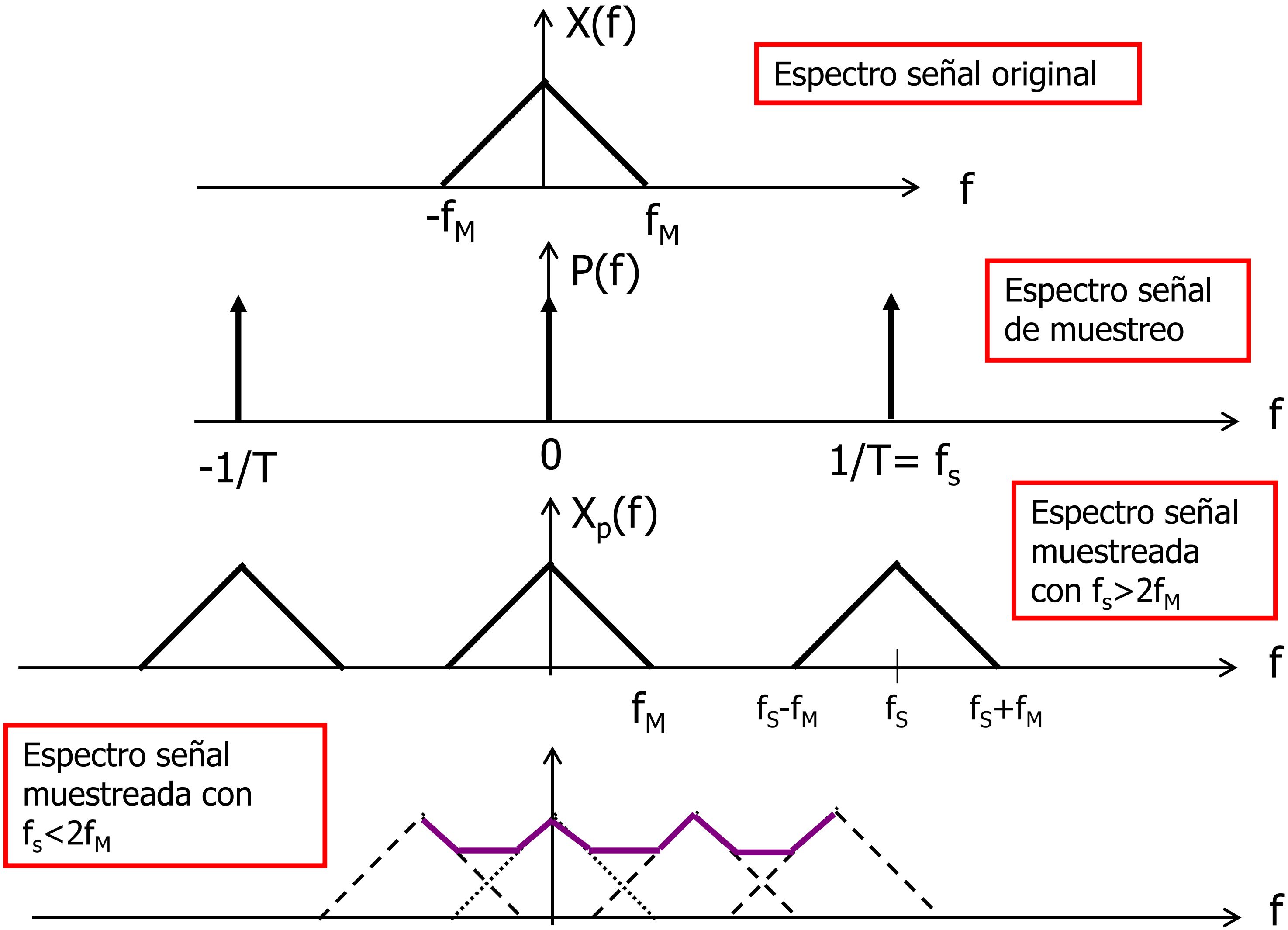
$$P(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\, f_s)$$

Cada convolución con un impulso, reproduce la otra función desplazada a la posición del impulso.

$$X_p(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k\, f_s)$$

El espectro en f de la señal muestreada $x_p(t)$ es el espectro de la señal original $X(f)$ desplazado en múltiplos de la f de muestreo $f_s = 1/T$.

Muestreo ideal



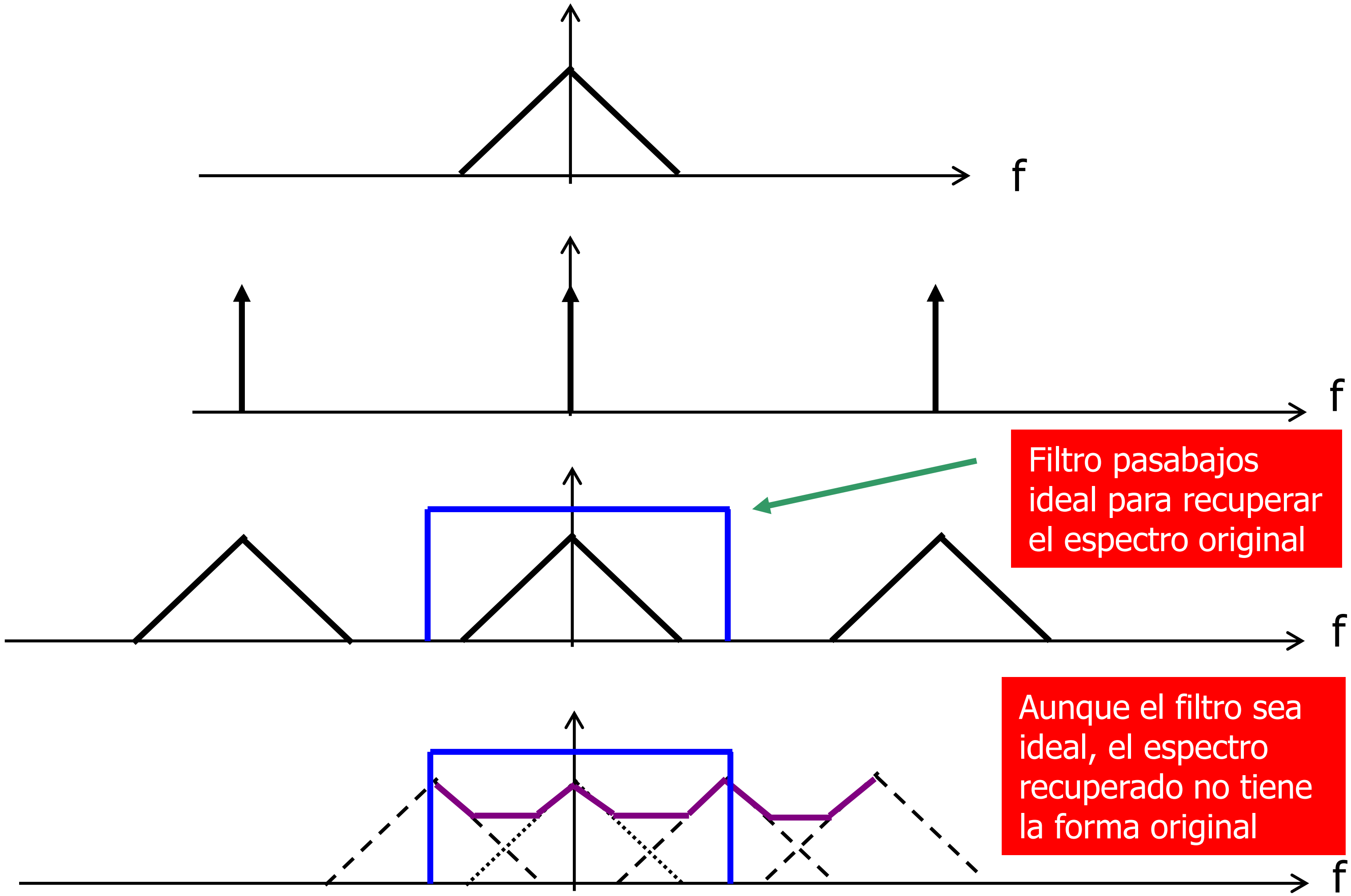
Muestreo ideal

Vemos que el efecto del muestreo ideal sobre el espectro en f original es repetirlo alrededor de la frecuencia de muestreo f_S.

Si disminuimos el valor de f_S los espectros se empiezan a acercar y no hay problema hasta $f_S - f_M = f_M$

Como vemos en el espectro $X_p(f)$ de la figura anterior podremos recuperar $X(f)$ original siempre y cuando $f_S - f_M > f_M$ y los espectros repetidos no se solapen. En efecto si disminuimos f_S hasta llegar a un punto en que se mezclen no será posible recuperar el espectro original.

Muestreo ideal



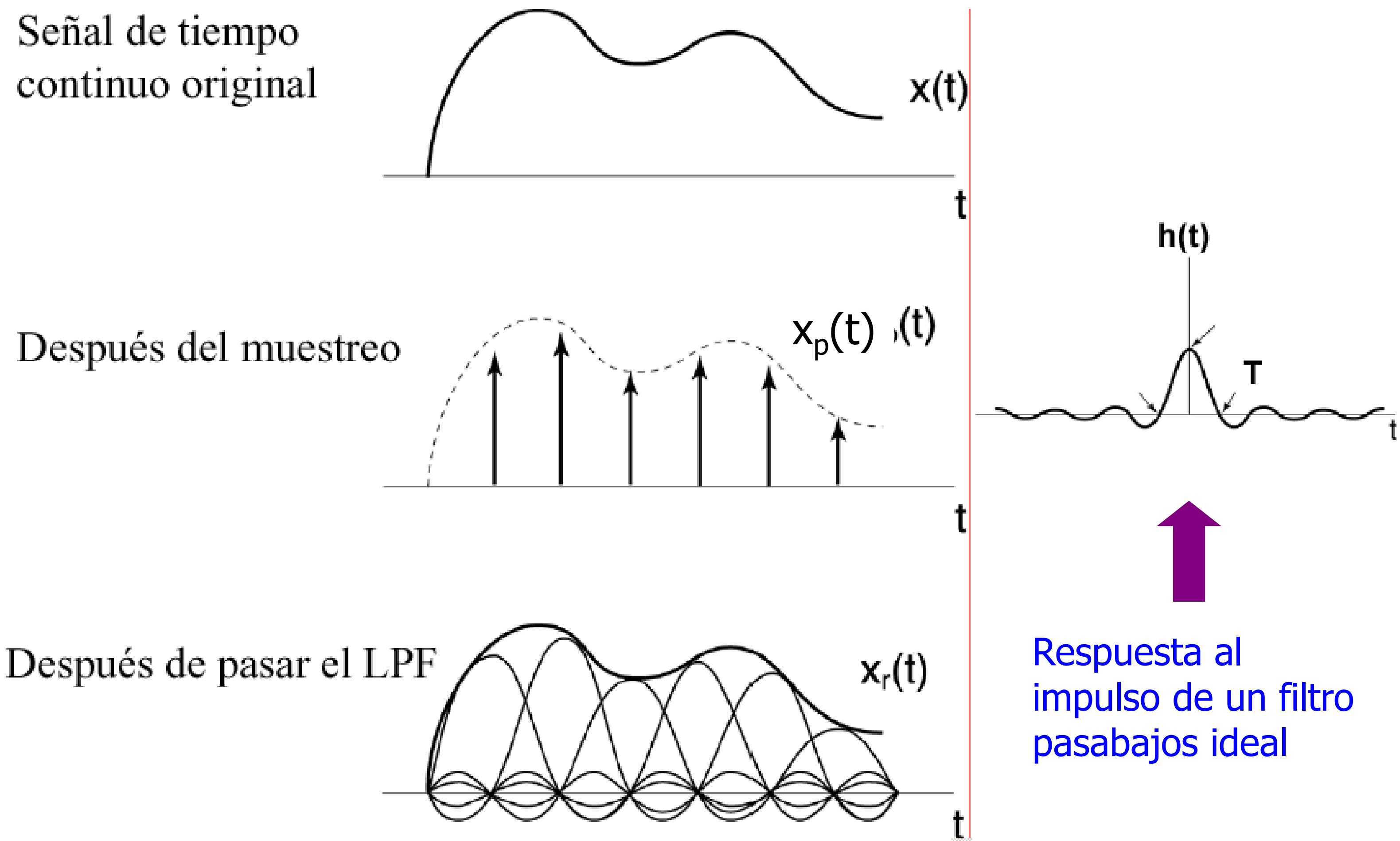
Teorema del muestreo

- Si $x(t)$ es de banda limitada con $X(f)=0$ para $|f|>f_M$ entonces $x(t)$ está unívocamente determinada por sus muestras $x(nT)$, $n=0,\pm1,\pm2.....$ si $f_s>2f_M$.

- Para recuperar la señal original se procesan las muestras con un filtro pasabajos ideal, con f de corte $> f_M$ y menor que f_s-f_M.

- f_s se la conoce como la frecuencia de Nyquist.

Reconstrucción ideal



Respuesta al impulso de un filtro pasabajos ideal

Reconstrucción ideal

- Vimos en la diapositiva anterior que la función de interpolación es $sinc(t)$ para el caso del filtro pasabajos ideal. Este filtro es no-causal.

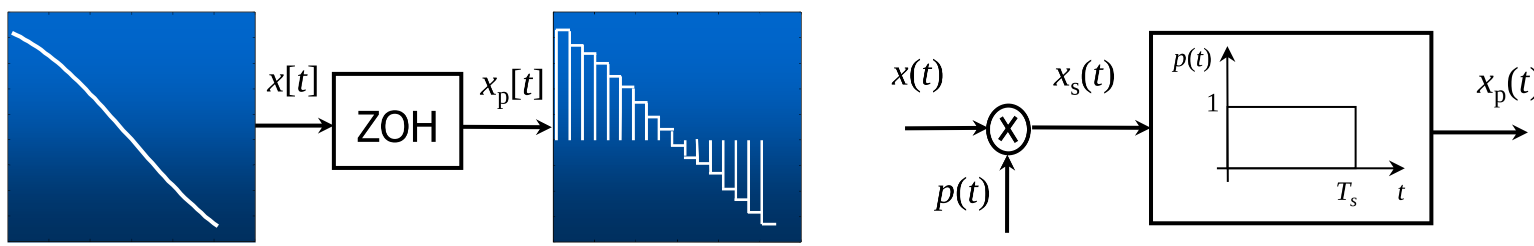
- En un filtro real la transferencia en f no será rectangular y además su respuesta al impulso será causal (0 para $t<0$).

Muestreo práctico

- La señal muestreada está formada por pulsos que tienen amplitud y duración finitas.
- Los señales reales están limitadas en tiempo y por ello no pueden ser de banda limitada (aliasing).
- Los filtros de reconstrucción no son ideales.

Muestreo práctico

En general se emplea la técnica de muestreo y retención (Sample and Hold ≡ S&H) ⇒ Retenedor Orden Cero (ZOH)



$$x_p(t) = \sum_k x(kT)\,p(t-kT) = [q(t)] * [\sum_k x(kT)\,\delta(t-kT)]$$

entonces

$$X_p(f) = Q(f)[\sum_n X(f-k\,f_s) = Q(f)\,X_\delta(f)$$

Muestreo práctico

Forma del pulso de muestreo. Deforma la señal muetreada en forma ideal.

Muetreo ideal

$$x_p(t) = \sum_k x(kT)\,p(t-kT) = [q(t)] * [\sum_k x(kT)\delta(t-kT)]$$

entonces

$$X_p(f) = Q(f)[\sum_n X(f - k\,f_s) = Q(f)\,X_\delta(f)$$

Efecto sobre el espectro por muestrear con una señal no impulsiva

Espectro con muestreo ideal

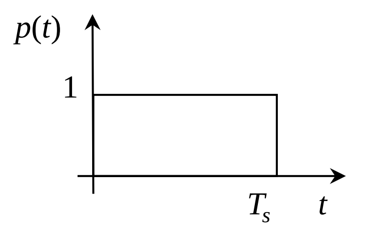
Muestreo práctico

Se puede interpretar la expresión anterior como que $Q(f)$ es un filtro operando sobre el espectro del muestreo ideal $X_\delta(f)$ y atenuando componentes de f. Por lo general la señal reconstruida estará distorsionada.

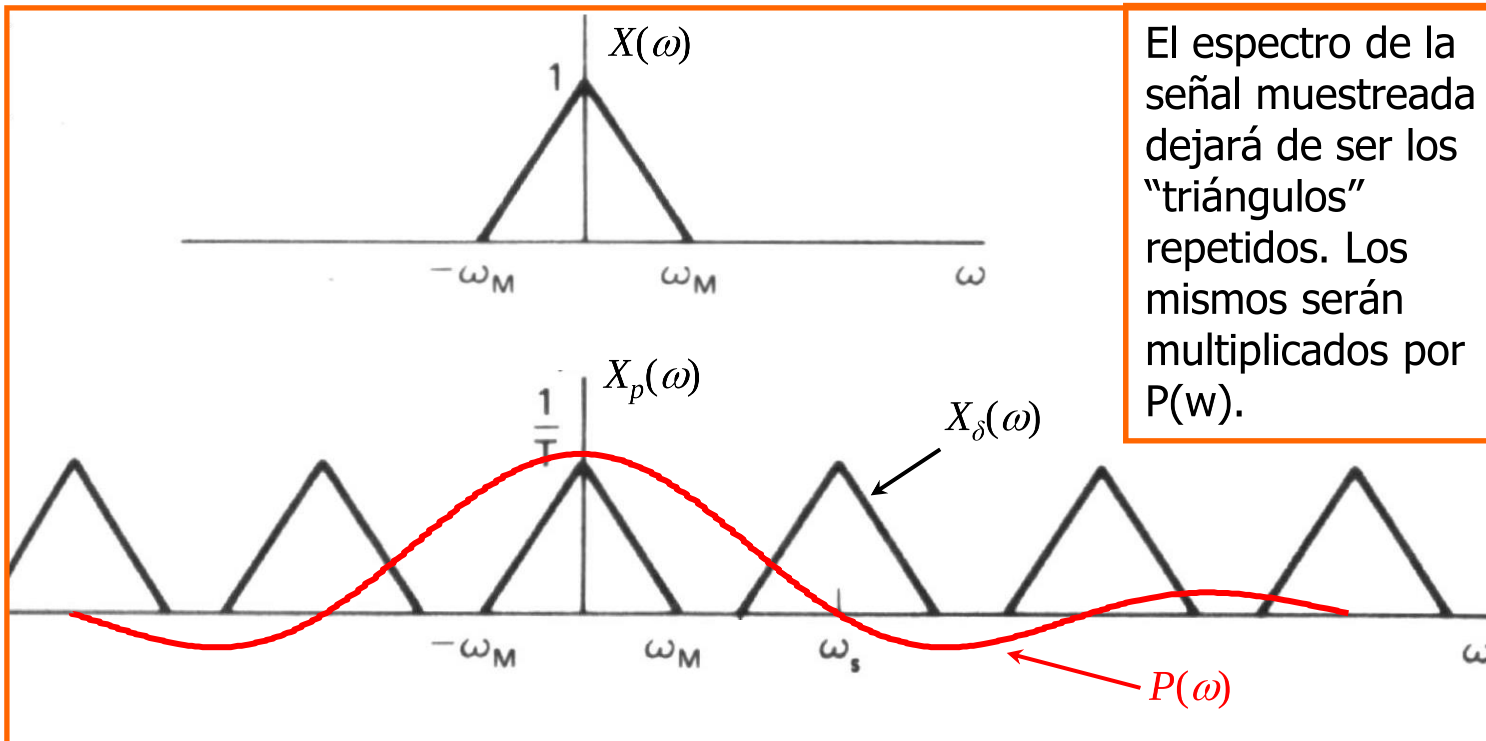
A esta pérdida de componentes de alta frecuencia se la denomina a veces como efecto de apertura (duración del pulso).

Si el efecto es muy grande se puede corregir con un filtro ecualizador.

Muestreo práctico



$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \forall\ t \end{cases} \qquad P(w) = e^{-jwT_s/2}\left[\frac{2sen(wT_s/2)}{w}\right]$$

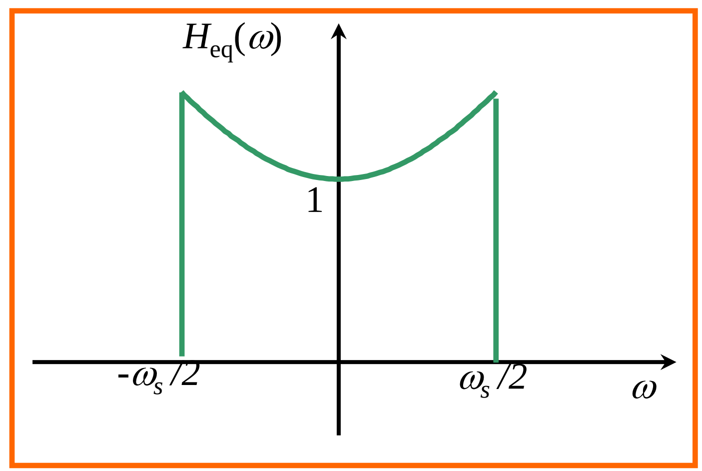


El espectro de la señal muestreada dejará de ser los "triángulos" repetidos. Los mismos serán multiplicados por P(w).

Muestreo práctico

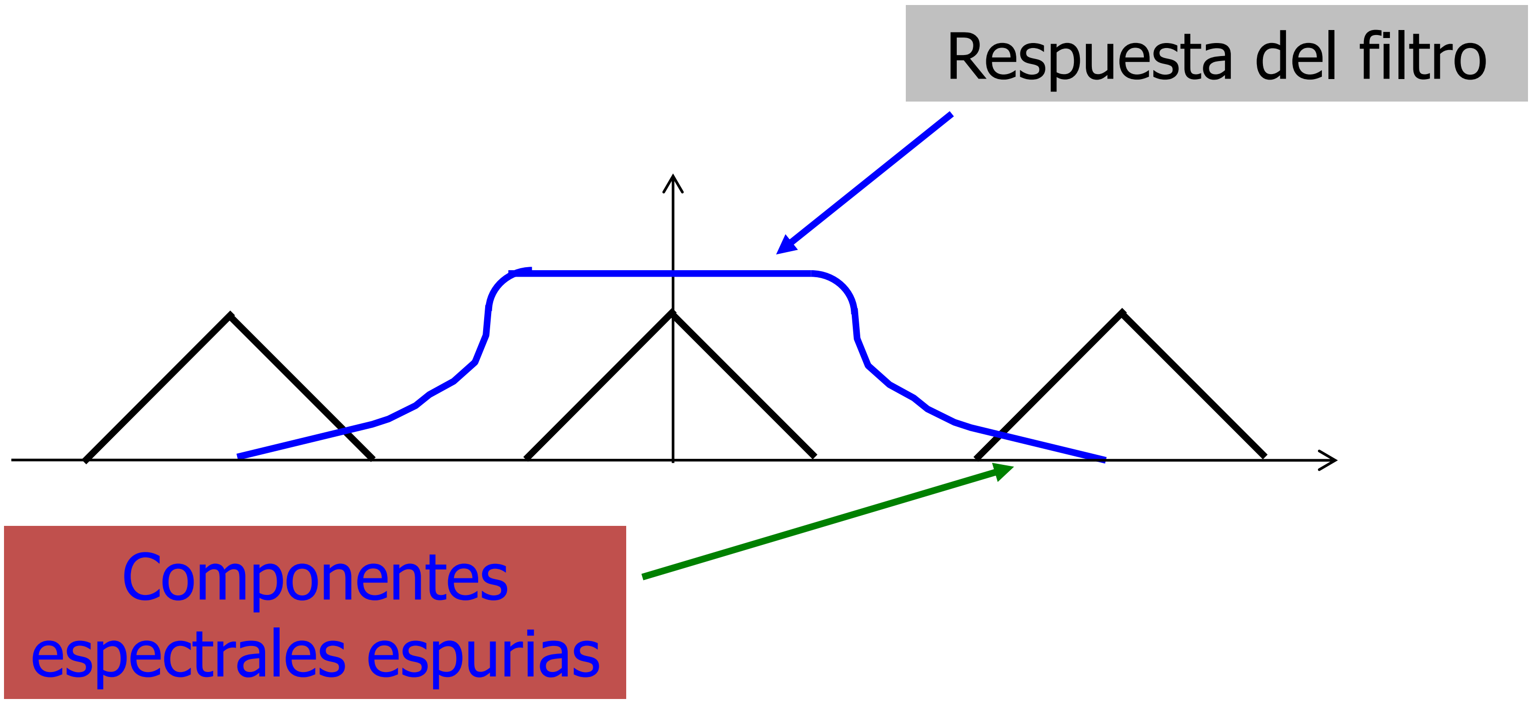
Podemos compensar la pérdida en altas frecuencias con un filtro que aproxime a la característica inversa del lóbulo central de $P(w)$.

$$\Rightarrow H_{eq}(\omega) = 1 / P(\omega)$$



Muestreo práctico

Filtros de reconstrucción no ideales



Filtros de reconstrucción reales: se recurre al empleo de bandas de seguridad $\Rightarrow$ incrementar f_s

Muestreo práctico

Filtros de reconstrucción no ideales

El problema se puede tratar en el dominio de la frecuencia. Vemos que las componentes no deseadas están muy atenuadas.

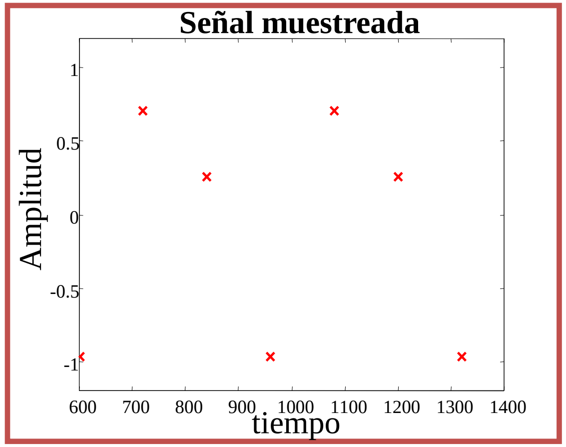
El mejor procedimiento es un cuidadoso diseño del filtro.

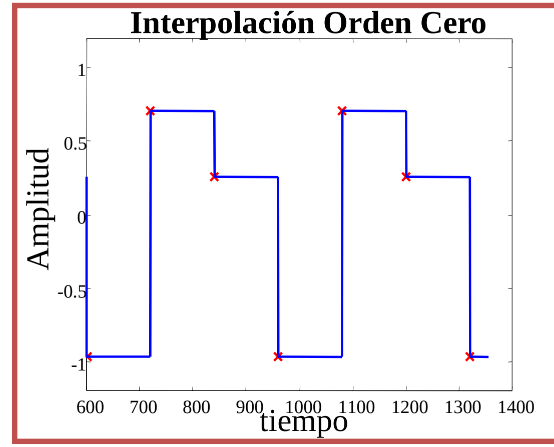
Para una forma de respuesta de filtro dada se puede mejorar esta interferencia aumentando la frecuencia de muestreo.

Interpolación

Interpolación ≡ reconstrucción (aproximada ó exacta) de una función a partir de sus muestras.

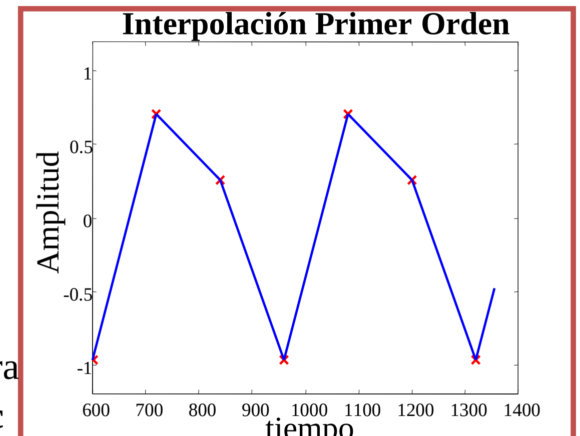
- <u>Retenedor de Orden Cero</u>: retiene el valor de la muestra hasta la próxima. Es el más simple.

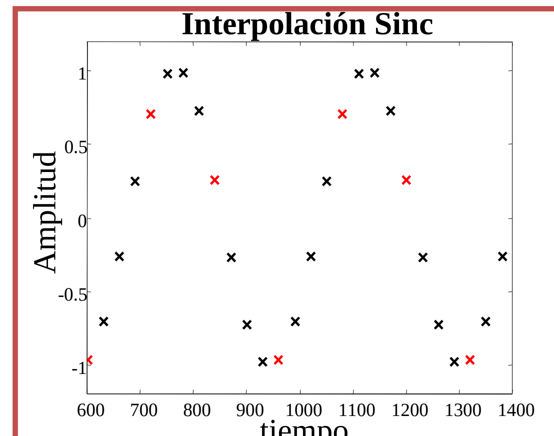




- <u>Interpolación Lineal</u>: los puntos adyacentes se conectan con una línea recta.

- <u>Interpolación de mayor Orden</u>: los puntos se unen mediante polinomios de grado mayor u otras funciones matemáticas.





- <u>Interpolación Sinc</u>: cada muestra corresponde al peso de una **sinc** centrada en el instante de muestreo, y los valores intermedios se otienen sumando las contribuciones de cada una de estas funciones.

Interpolación Sinc o ideal

Para reconstruir utilizamos un filtro pasa bajos ideal

$X_r(f) = X_s(f)H(f)$ con $H(f) = rect(f/2f_c)$ y $f_c = f_s/2$

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t) =$$

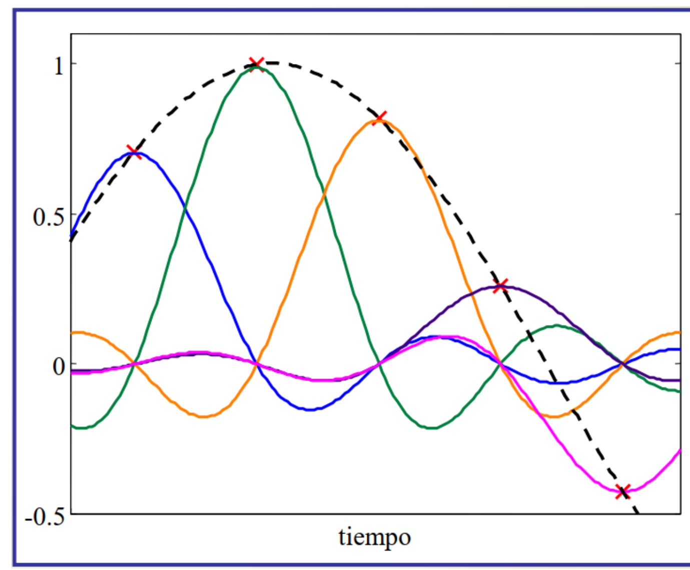
$$h(t) * \sum_n x(nT_s)\delta(t - nT_s) =$$

$$\sum_n x(nT_s)h(t - nT_s)$$

$$h(t) = \frac{T_s\omega_c}{\pi} sinc(\frac{\omega_c t}{\pi})$$

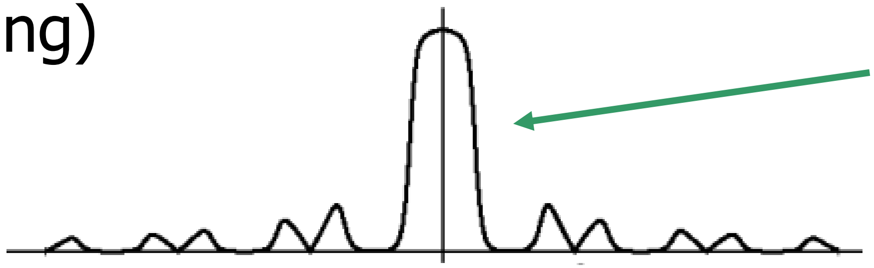
$$x_r(t) = \sum_n x(nT_s) \frac{T_s\omega_c}{\pi} sinc(\frac{\omega_c(t - nT_s)}{\pi})$$

$$x_r(t) = \sum_n x(nT_s) sinc(f_s t - n)$$

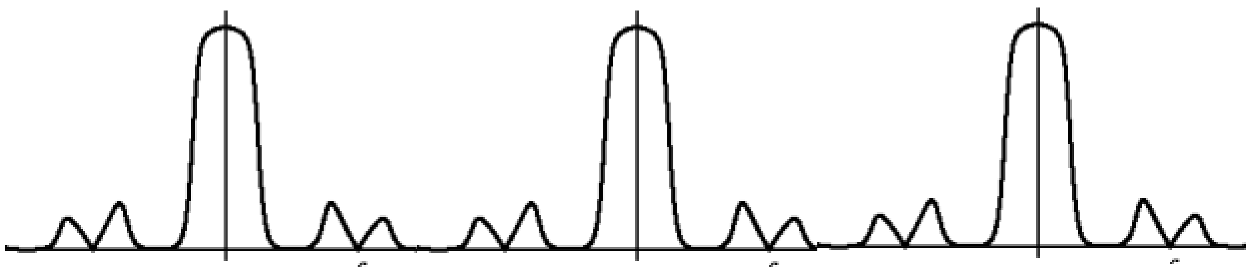


Aliasing

Si la señal no es de banda limitada o se muestrea a una frecuencia por debajo de la frecuencia de Nyquist aparecerán componentes espúreas en el espectro (aliasing)



Espectro de la señal original



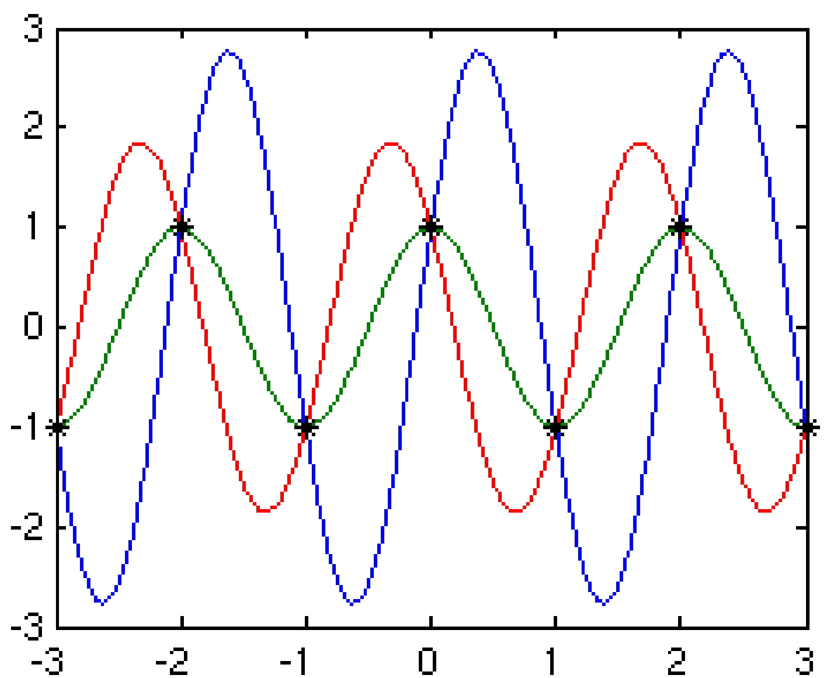
Espectro de señal muestreada con interferencia

Hay que filtrar la señal antes de muestrear

Aliasing

Si muestreamos justo al doble de la máxima frecuencia también pueden haber problemas.

Ejemplo: muestreo de un seno con 2 muestras por período -> error de amplitud !



La señal a muestrear no debe tener componentes en el límite establecido por Nyquist

Filtro anti-aliasing

Siempre se debe asegurar que la señal no tenga componentes de frecuencia ≥ a $f_s/2$.

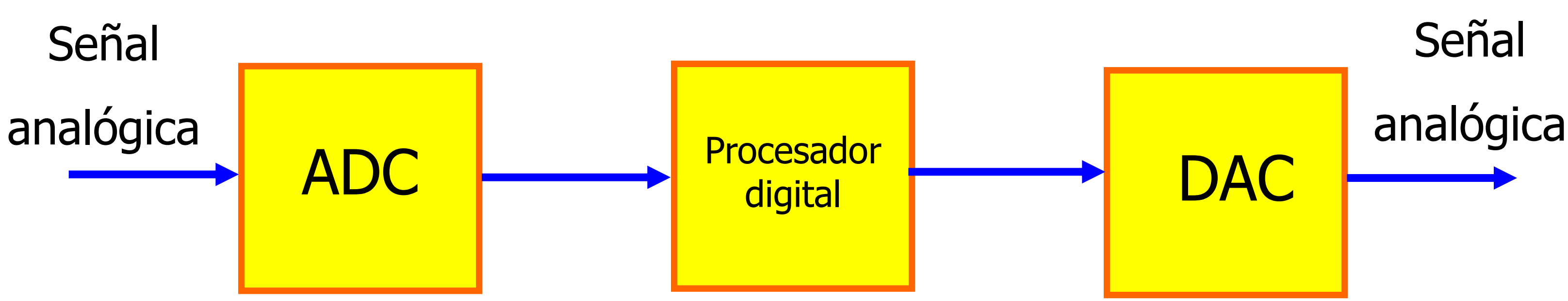
Hay que aplicar un filtro pasabajos en la entrada para evitar el aliasing.

El filtro anti-aliasing es un compromiso. Se utiliza para minimizar el aliasing pero modifica la información de la señal.

Procesamiento digital

Las técnicas digitales proporcionan un método alternativo para procesar señales analógicas de interés práctico tales como señales de voz, biológicas, sísmicas, de sonar y de los distintos tipos de sistemas de comunicaciones.

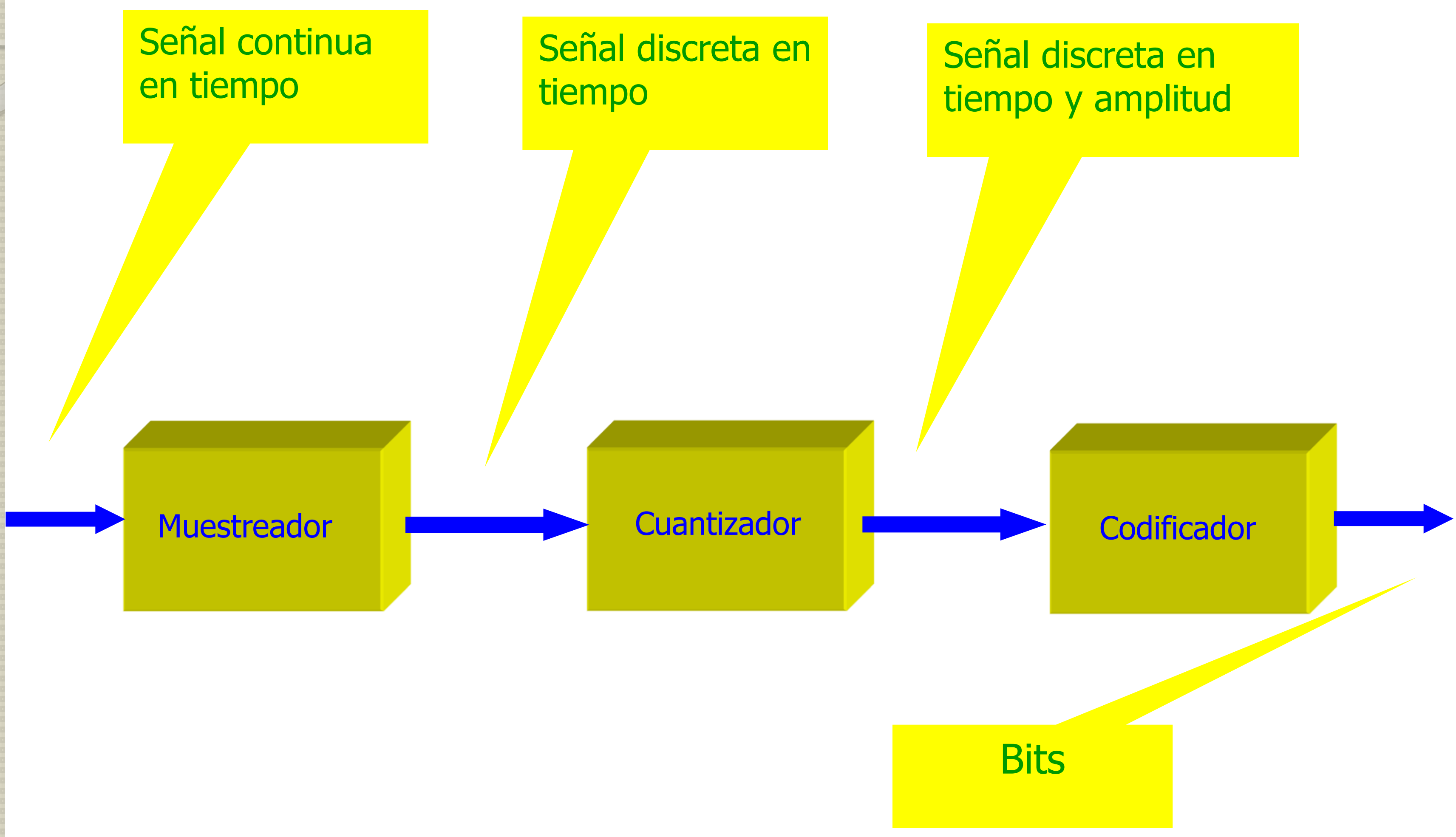
Para realizar esto es necesario de una interfaz entre las señales analógicas de entrada y salida y el procesador digital. Estas interfaces son el convertidor Analógico-Digital (ADC) y el convertidor Digital-Analógico (DAC).



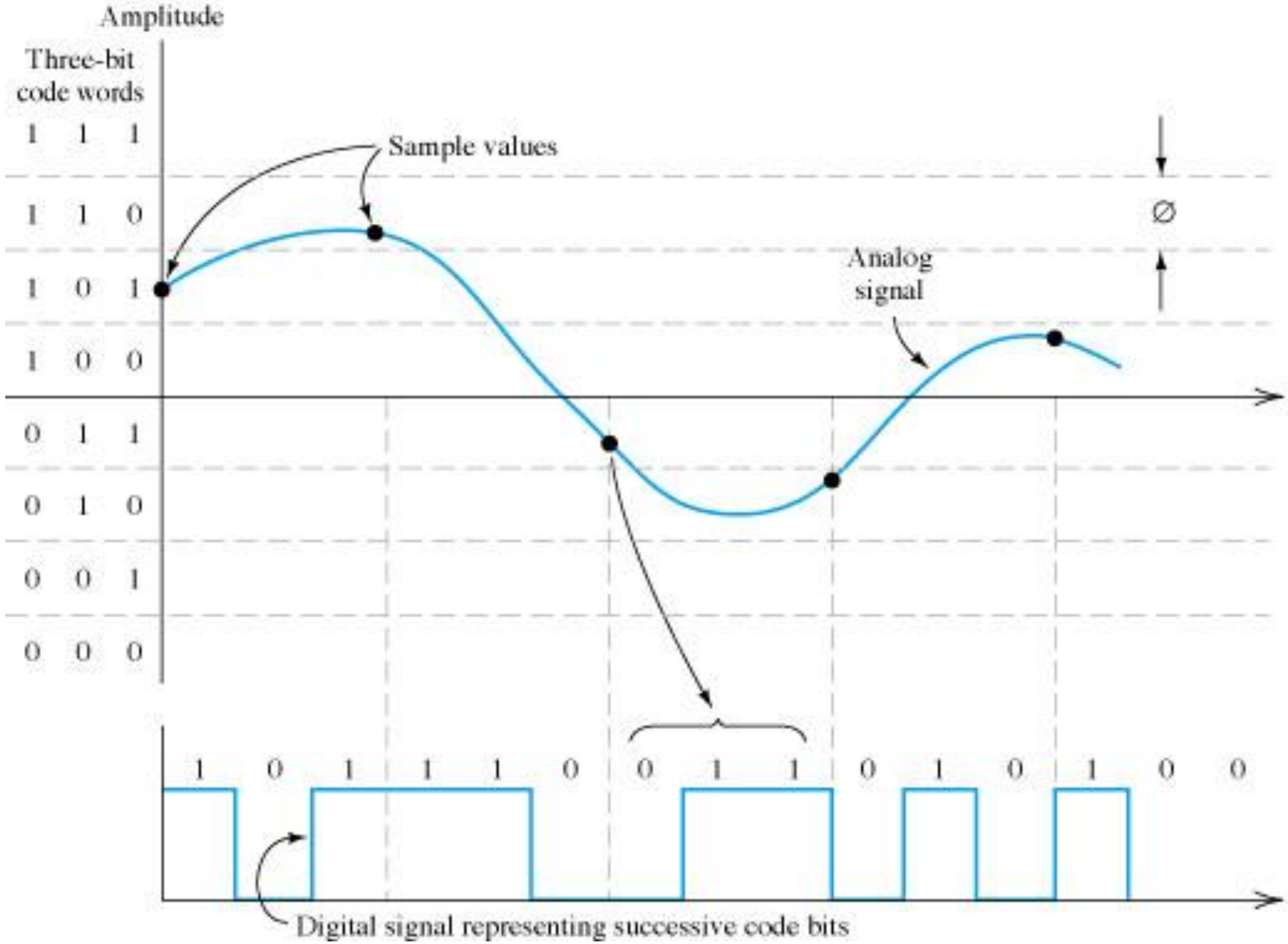
Conversión A/D

- Para procesar señales analógicas por medios digitales es necesario convertirlas a formato digital, esto es, transformarlas en una secuencia de números de precisión finita. Este procedimiento se denomina conversión analógico-digital (ADC).
- *Muestreo (sampling)*: tomar muestras periódicas de la amplitud de la señal.
- *Retención (hold)*: las muestras son retenidas hasta "evaluarlas".
- *Cuantificación*: la amplitud de la señal muestreada toma valores discretos.
- *Codificación*: se traducen los valores obtenidos a N bits, asigna un valor entre 2^N posibles.

Conversión A/D



Conversión A/D



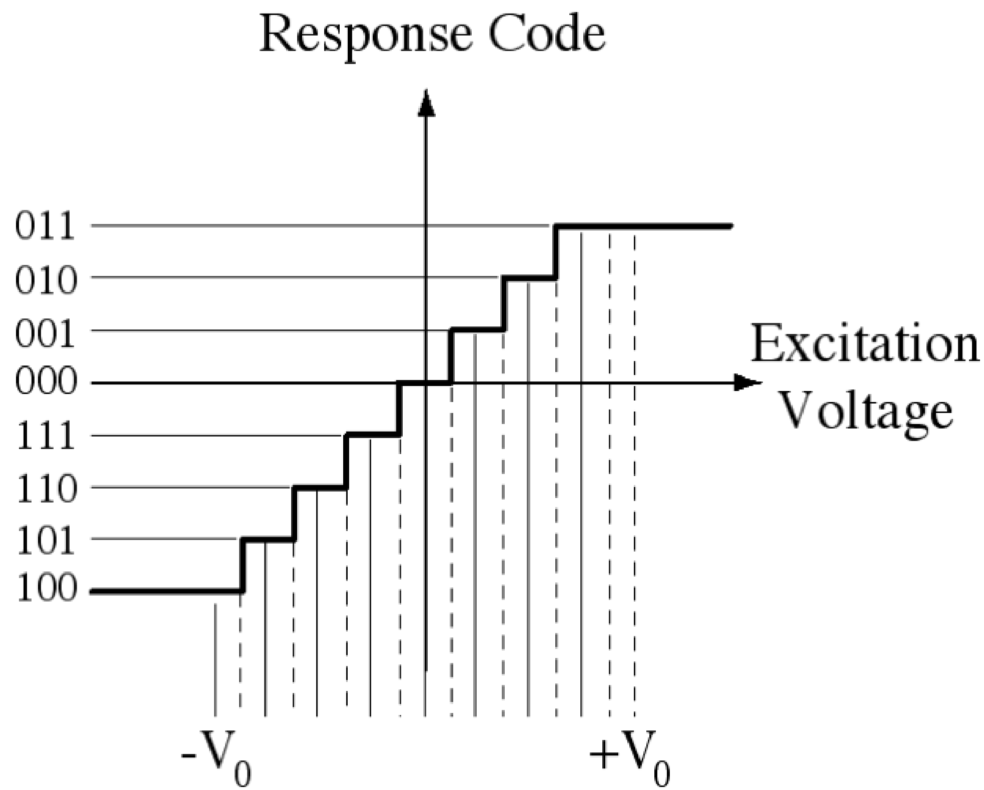
Conversión A/D

- De acuerdo a lo que es una señal analógica ésta puede tomar infinitos valores en un continuo.
- Como es imposible representarlos a todos estas señales se dividen en niveles determinados y se tendrán un número finito de niveles (niveles de cuantización).
- Las muestras se convierten en un número binario cuyo valor es cercano al valor de la muestra (error de cuantización).
- Ej : con 8 bits podemos representar 256 niveles

Conversión A/D

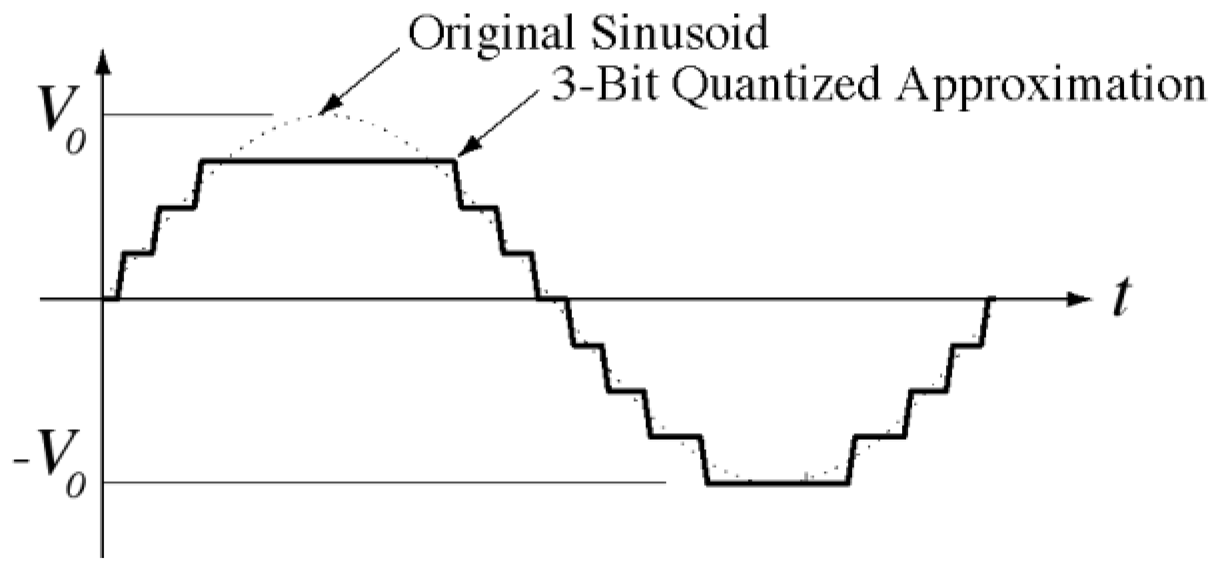
Ejemplo de cuantización de 3 bits, 8 niveles

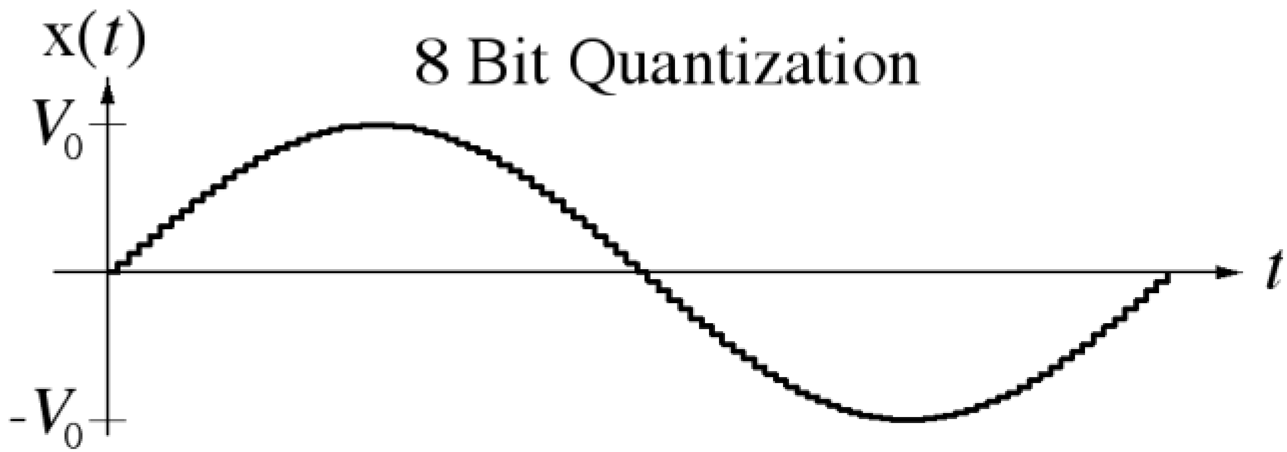
Código digital de salida



Valores analógicos de entrada

Conversión A/D





Conversión D/A

- La conversión digital-analógica es el proceso inverso y nos devuelve la salida de nuestro procesamiento digital (señal discreta) al mundo analógico.

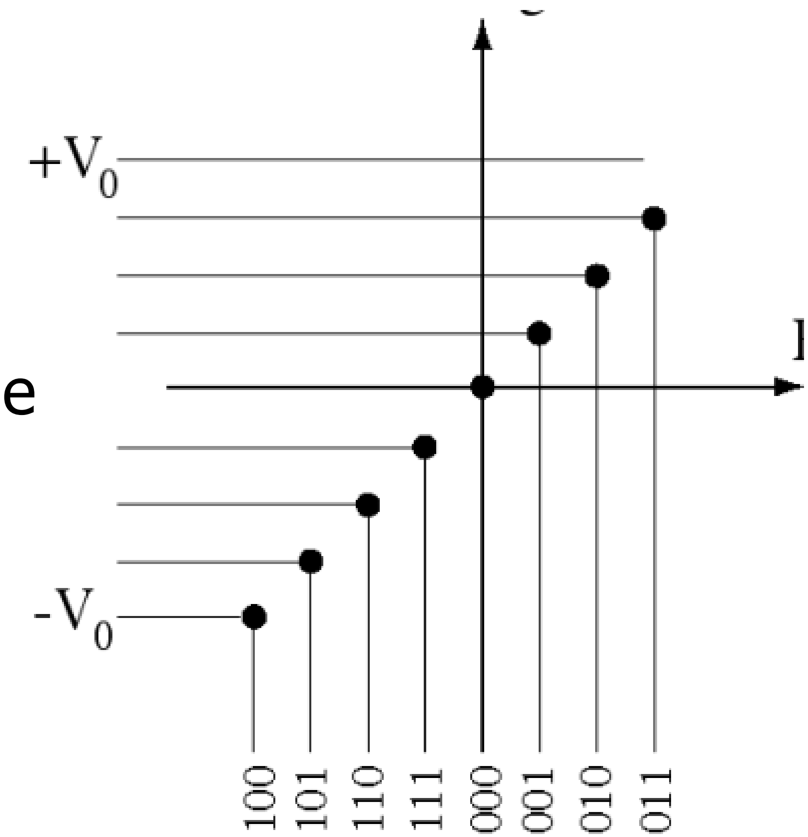
- Es un circuito que toma un número digital a su entrada y lo transforma a un nivel de tensión en su salida.

- En realidad lo único que se hace es pasar a tiempo continuo. No se pueden obtener infinitos niveles analógicos, sólo la cantidad de niveles dada por el número de bits del conversor D/A.

Conversión D/A

Ejemplo de DAC de 3 bits, 8 niveles

Tensión analógica de salida



Bits de entrada

Ejemplo

- Supongamos un convertidor A/D que produce 4 bits de salida.
- Con estos 4 bits tenemos 16 niveles de tensión a representar.
- Consideremos un intervalo de señal analógica entre 0 y 15 volts.
- El convertidor A/D divide el intervalo en 16 niveles, entre 0 y 15 volts.
- Si medimos el valor 0 Volt, el ADC producirá el valor binario 0000.
- Si la muestra es de 8 volt, obtendremos un 1000.

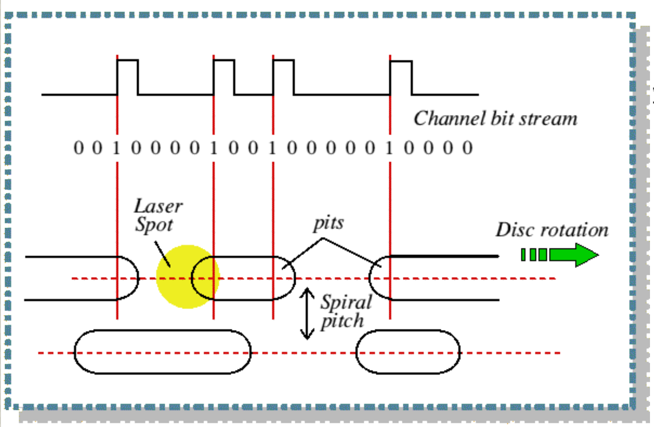
Ejemplo

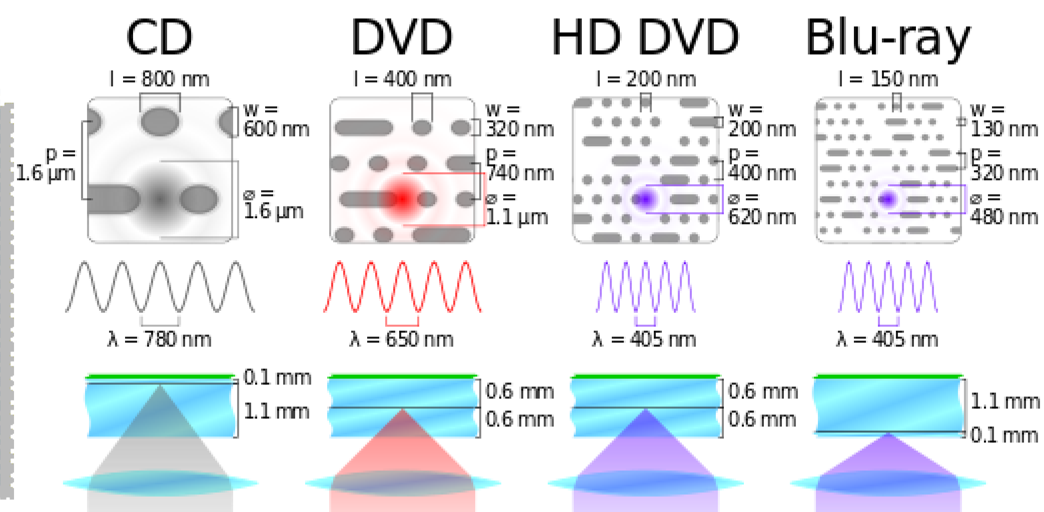
- Si ahora medimos 11,8 Volts, el ADC produce el número binario 1100, cuyo equivalente decimal es el 12.
- Por lo tanto aquí apreciamos el error producido y que según vimos es el ERROR DE CUANTIZACION.
- Para reducirlo no nos queda más que aumentar la cantidad de niveles de tensión, lo que lleva a aumentar la cantidad de bits a utilizar.
- Ej : con 8 bits, tendremos 256 niveles para dividir la señal analógica. 16V/256=0.0625V !
- Así podemos acercarnos más al valor real analógico.

Ejemplo

- En el caso de discos compactos CD, que almacenan señales de música hasta 20 (KHZ), se usan frecuencias de muestreo de 44,1 a 48 KHz.

- Las muestras se codifican en 16 bits (65536 niveles).



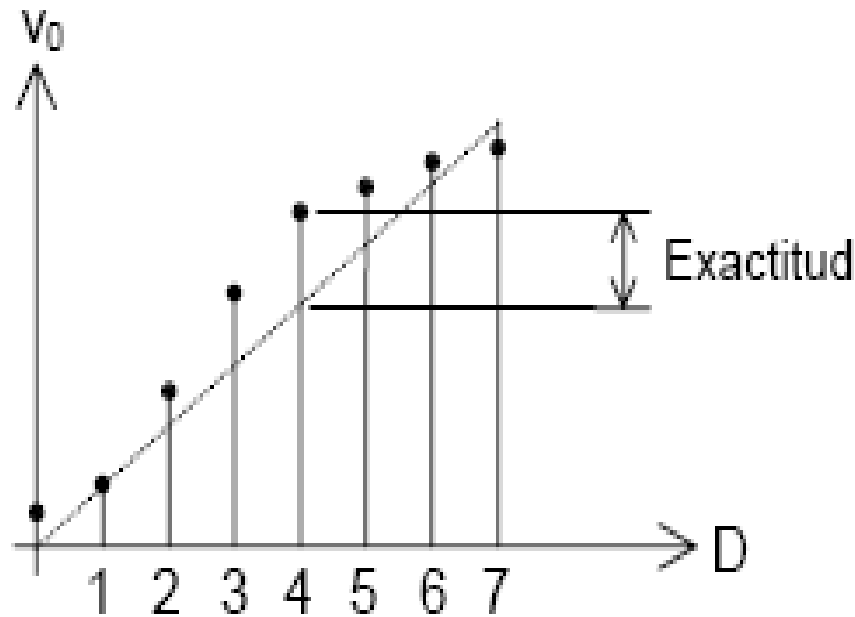


Especificaciones

- Resolución: es la cantidad de bits o dígitos binarios que nos da un ADC en su salida o que acepta en su entrada un DAC.

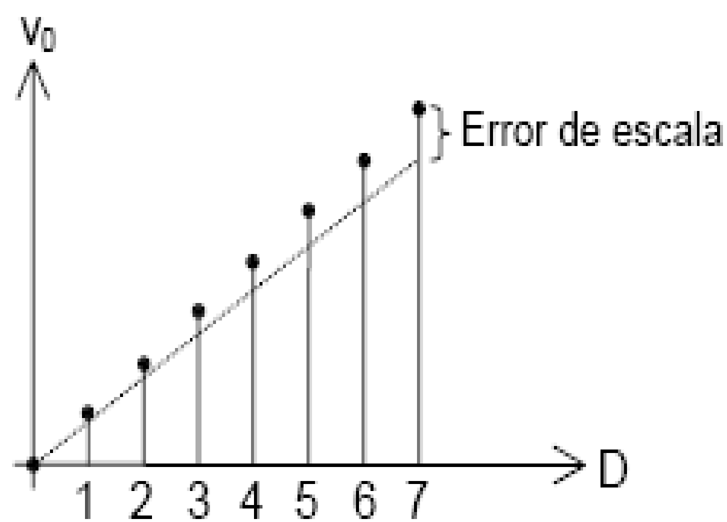
- Exactitud: es la máxima desviación respecto a la línea recta que une el mínimo y el máximo valor ideales. Se expresa en LSB (least significant bit), lo cual significa que se usa el salto mínimo nominal como unidad. Otra forma de expresarlo es en porcentaje del valor máximo nominal. La exactitud ideal es 0 LSB. Es necesario tener en cuenta que esta especificación incluye todos los errores posibles del conversor.

Especificaciones



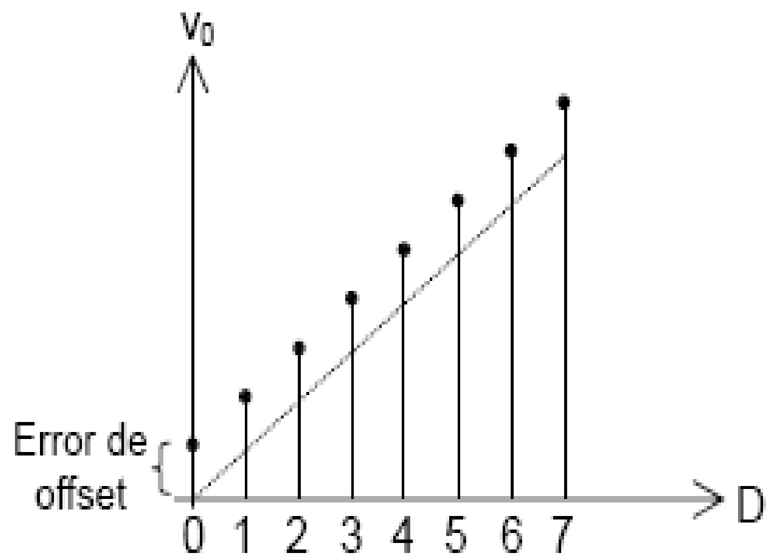
Especificaciones

- Error de escala: Es el error que se obtiene a fondo de escala con respecto al valor ideal. Se debe en general a errores de ganancia o en la referencia. Se expresa también en LSB a fondo de escala. El error de escala ideal es 0 LSB.



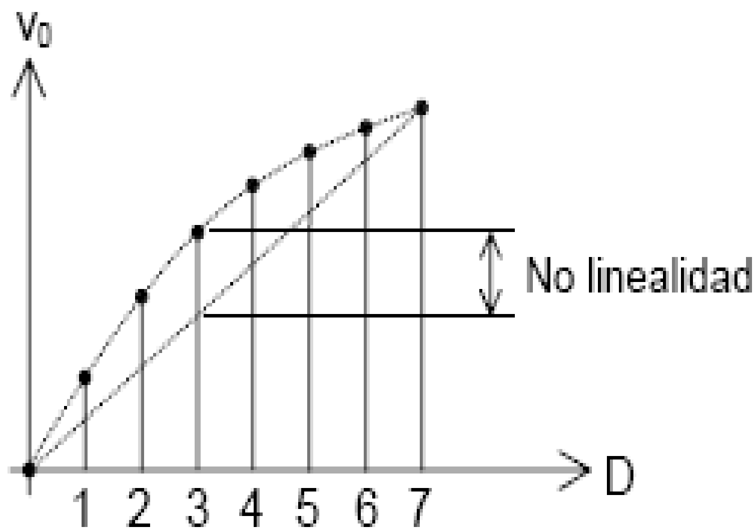
Especificaciones

- Error de offset: Es el valor de salida obtenido cuando la entrada es nula. Se mide en porcentaje del máximo nominal o en LSB. El valor ideal es 0 LSB.



Especificaciones

- No linealidad integral: Indica la máxima separación de la línea recta que resulta luego de eliminar los errores de escala y de offset.



Especificaciones

- No linealidad diferencial: Es la máxima diferencia entre un salto a la salida debido a un cambio de 1 LSB y el salto ideal. Se expresa como porcentaje del máximo nominal o en LSB. El valor ideal es 0 LSB.