Análisis de señales

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

Hay dos maneras de desarrollar la Transformada de Laplace:

- Como generalización de la Transformada de Fourier.
- Utilizando a las exponenciales complejas como autofunciones de las ecuaciones diferenciales que describen SLIT.

Transformada de Laplace

Hasta ahora utilizamos a las exponenciales complejas de parámetro real de la forma:

$e^{j\omega t}$ con ω real.

Ahora las vamos a extender a exponenciales con un parámetro s complejo:

e^{st} con $s=\sigma+j\,\omega$

Transformada de Laplace

La definición de la Transformada de Laplace queda:

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

s ahora es complejo con parte real σ y parte imaginaria ω.

Transformada de Laplace

Cuando la Transformada de Fourier de una señal $x(t)$ existe entonces coincide con la Transformada de Laplace con $s=j\omega$.

$$X(\omega) = X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

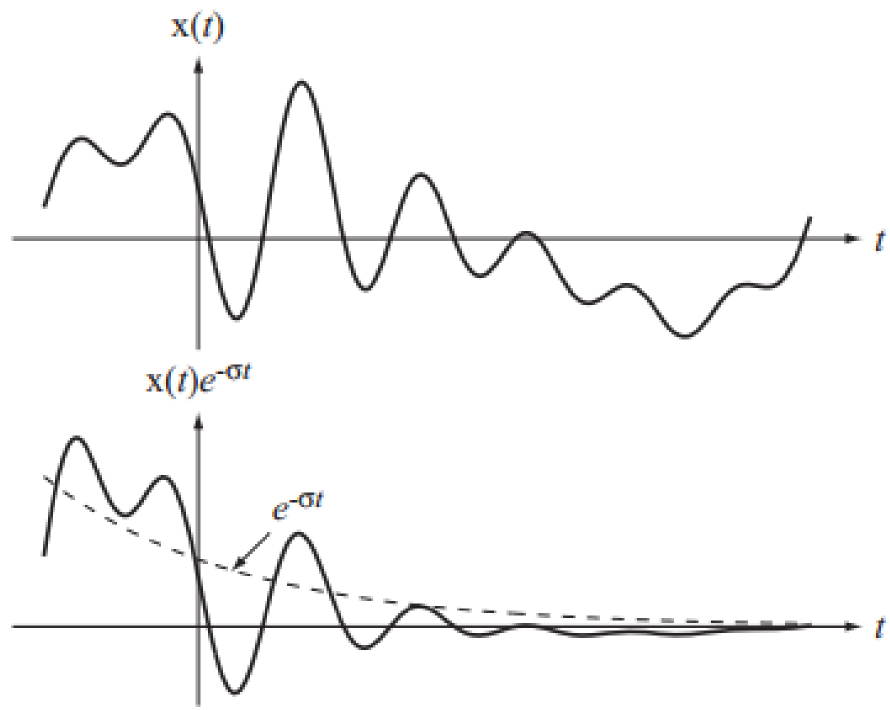
Transformada de Laplace

Utilizando $s=\sigma+j\omega$ en la Transformada de Laplace tenemos:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt$$

Pero eso es la Transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$! O sea $x(t)$ multiplicada por un factor de convergencia $e^{-\sigma t}$. Por eso la Transformada de Laplace es una generalización y puede aplicarse a una clase más amplia de funciones.

Transformada de Laplace



Efecto de un factor de convergencia exponencial real decreciente.

Transformada de Laplace

Para encontrar la transformación inversa vamos a considerar la TF de la función $x_\sigma(t)=x(t)e^{-\sigma t}$.

$$F\{x_\sigma(t)\} = X_\sigma(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\sigma(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

Entonces como ya vimos:

$$F\{x_\sigma(t)\} = L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Transformada de Laplace

La Transformada Inversa de Fourier será:

$$F^{-1}\{X_\sigma(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_\sigma(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{j\omega t}d\omega$$

Haciendo $s=\sigma+j\omega$ y $ds=jd\omega$ tenemos:

$$x_\sigma(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{(s-\sigma)t}\,ds = \frac{e^{-\sigma t}}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Y dividiendo por $e^{-\sigma t}$:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Transformada de Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Transformada directa de Laplace.

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Transformada inversa de Laplace

Transformada de Laplace

Otra manera de ver a la Transformada de Laplace es considerando la respuesta de un SLIT ante una entrada exponencial compleja de la forma $x(t)=Ke^{st}$, donde $s=\sigma+j\omega$.

$$y(t)=h(t)*Ke^{st}=K\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau=\underbrace{Ke^{st}}_{x(t)}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Si la integral converge, la salida es la misma señal de entrada multiplicada por $H(s)$ (la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$.

Transformada de Laplace

Ahora para una señal generica *x(t)*:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t) * x(t)]e^{-st}\,dt$$

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

Bajo ciertas condiciones técnicas podemos separar las dos integrales:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, e^{-st}dt$$

Transformada de Laplace

Haciendo un cambio de variables $\lambda = t - \tau$ y $d\lambda = dt$:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, e^{-s(\lambda+\tau)} d\lambda$$

$$Y(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, e^{-s\lambda} d\lambda}_{X(s)}$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Transformada de Laplace

Obtuvimos un resultado similar que con Fourier y muy importante.

La Transformada de Laplace de la respuesta a una señal $x(t)$ de un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$ es igual al producto de las transformadas $X(s)$ y $H(s)$.

$H(s)$ se llama función de transferencia.

Transformada de Laplace

Ejemplo: sea $x(t)=e^{-at}u(t)$ ya sabemos que la TF $X(j\omega)$ converge y está dada por:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+a)t}\,dt = \frac{1}{j\omega + a}$$

Con $a > 0$.

La Transformada de Laplace será:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt = \frac{1}{s + a}$$

Con $\sigma + a > 0$ o $Re\{s\} > -a$

Transformada de Laplace

Si $a=0$, $x(t)$ es el escalón unitario y la TL será:
$X(s)=1/s$ con $Re\{s\}>0$.

La TL puede converger para algunos valores de $Re\{s\}$ pero no para otros.

En el ejemplo anterior la TL converge para $\sigma=Re\{s\}>-a$. Si a es positiva entonces $X(s)$ se puede evaluar en $\sigma=0$ y obtenemos:

Transformada de Laplace

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

Obtenemos la TF !

Si a<0 la Transformada de Laplace existe pero la Transformada de Fourier no !

Transformada de Laplace

Otro ejemplo: sea $x(t)=-e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\,dt = \frac{1}{s+a}$$

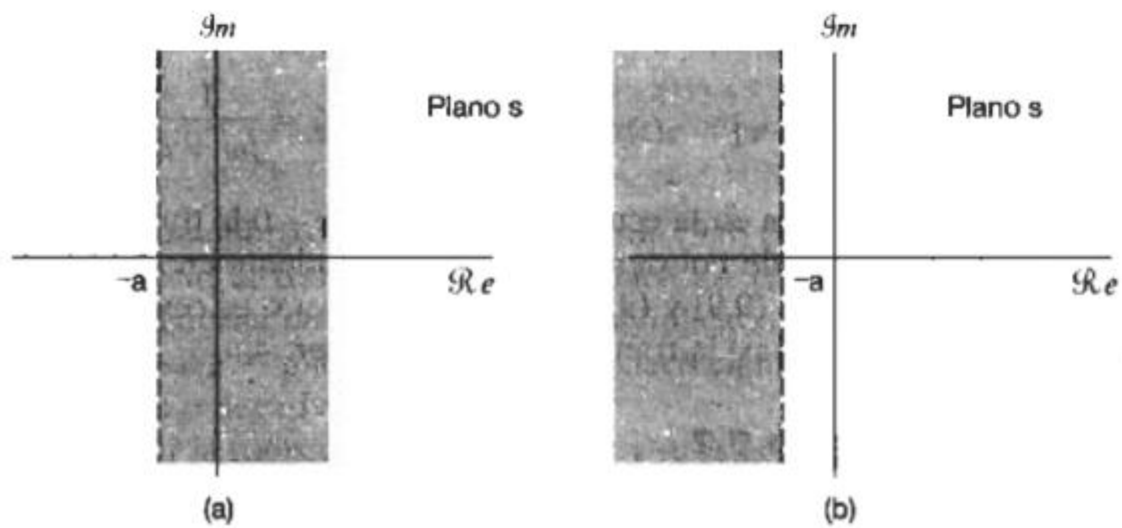
Pero ahora para que la integral converja debe ser $Re\{s\}<-a$.

La expresión algebraica de $X(s)$ resultó la misma que antes, pero los valores de s para los cuales la expresión es válida es diferente.

Transformada de Laplace

Vemos que no es suficiente la expresión de la TL sino que además necesitamos saber lo que se conoce como región de convergencia (ROC).

Para los ejemplos anteriores:



Transformada de Laplace

Algunas propiedades de la TL:

Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si $s - s_0$ está en R)
Escalamiento en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos R $\cap$ $\{\Re e\{s\} > 0\}$

Transformada de Laplace

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	Toda s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} < 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	Toda s
$[\cos \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
$[\text{sen}\, \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
$[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
$[e^{-\alpha t}\,\text{sen}\, \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$

Algunos pares transformados:

Transformada de Laplace

Cualquier combinación lineal de exponenciales reales o complejas tendrá una TL que será suma de terminos similares a los que vimos.

Tambien al analizar SLIT especificados como ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

En esos casos la TL será una función racional en s. (cociente de polinomios)

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Transformada de Laplace

Excepto por una constante, los polinomios del numerador y del denominador pueden expresarse en función de sus raices.

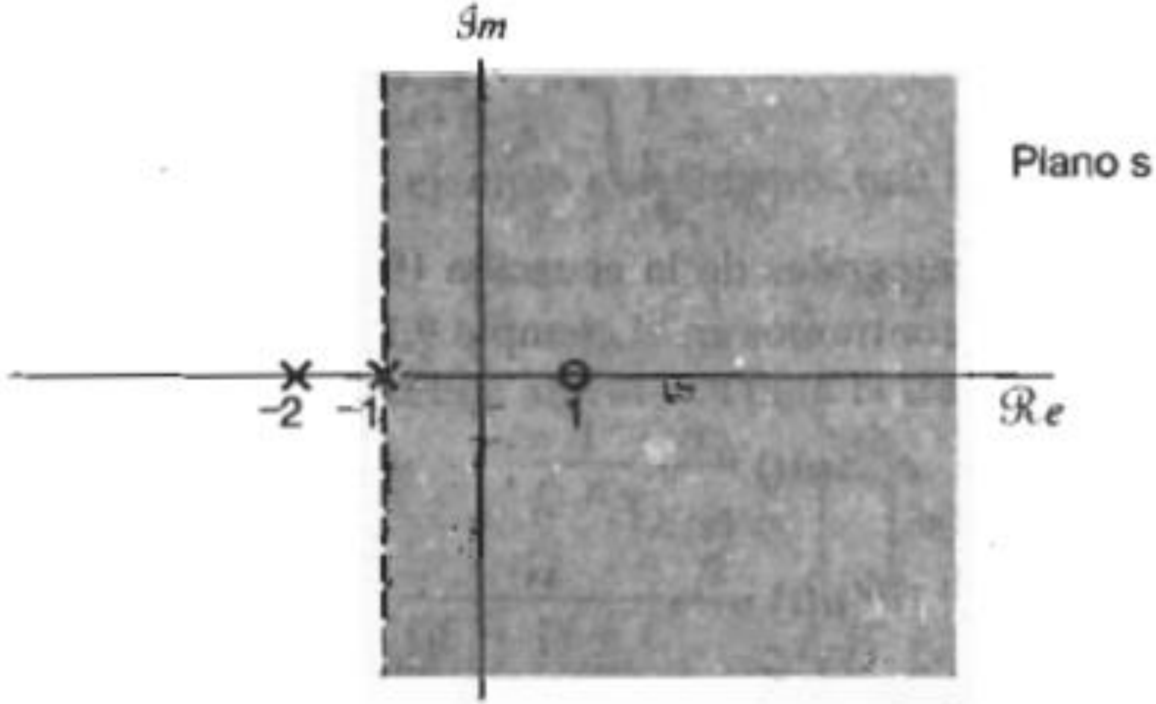
$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^{r}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s - p_j)}$$

Los z_i se llaman ceros y los p_i se llaman polos de $X(s)$.

Los ceros, los polos y la ROC, todos marcados en el plano s, nos dan una forma gráfica para describir a la TL.

Transformada de Laplace

Ejemplo: $x(t)=3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$



Transformada de Laplace

Si las TL son funciones racionales (cociente de polinomios) se puede encontrar de una manera sencilla la antitransformada de Laplace mediante fracciones parciales.

Ejemplo: sea $H(s) = \dfrac{s}{(s^2 + 4s + 3)}$ con $Re\{s\} > -1$

Utilizando el comando `roots` de Matlab podemos encontrar las raices del denominador (polos).

Transformada de Laplace

```
>> roots([1 4 3])
ans =
      -3
      -1
```

entonces $H(s) = \dfrac{s}{(s+3)(s+1)}$

Igualando $H(s) = \dfrac{A}{(s+3)} + \dfrac{B}{(s+1)}$

Podemos encontrar los valores de A y B.

Transformada de Laplace

$$\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s+1)}=\frac{A(s+1)+B(s+3)}{(s+3)(s+1)}=\frac{(A+B)s+A+3B}{(s+3)(s+1)}$$

Con lo que tenemos un sistema de ecuaciones:

$$A+B=1$$
$$A+3B=0$$

Cuya solución es $A=3/2$ y $B=-1/2$. Por lo tanto:

$$H(s)=\frac{3/2}{(s+3)}-\frac{1/2}{(s+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{(s+3)}-\frac{1}{(s+1)}\right)$$

Y $h(t)=1/2(3e^{-3t}-e^{-t})u(t)$ teniendo en cuenta la ROC!

Transformada de Laplace

Otro ejemplo: $x(t)=e^{-at}u(t) - e^{-at}u(-t)$

Ya vimos que ambas tenian TL $1/(s+a)$ y que sus ROC eran $Re\{s\}>-a$ y $Re\{s\}<-a$. Estos son conjuntos disjuntos y no hay ningún valor de s que asegure la convergencia de $x(t)$.

Por lo tanto esta señal no tiene TL.

Transformada de Laplace

Para evitar el problema anterior y poder encontrar siempre una ROC vamos a restringir un poco el conjunto de funciones.

Vamos a sacar las funciones que crezcan más rápido que una exponencial (t^t, e^{t^2},..) y además vamos a tratar con señales y sistemas causales ($x(t)=0$, $h(t)=0$ para $t<0$).

Transformada de Laplace

Teniendo en cuenta lo anterior vamos a definir lo que se conoce como Transformada Unilateral de Laplace.

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Es la herramienta que vamos a usar para analizar sistemas causales y especificados por ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y condiciones iniciales no nulas.

Transformada de Laplace

Las dos Transformadas sólo difieren en el límite inferior de la integral.

Dos señales diferentes para $t<0$ pero que son idénticas para $t \geq 0$ tendrán distintas TL bilaterales pero TL unilaterales iguales.

Dos señales que sean idénticamente nulas para $t<0$ tendrán TL bilateral y unilateral idénticas.

Transformada de Laplace

La transformada inversa será la misma.

La mayoría de las propiedades son las mismas salvo algunas diferencias que vamos a ver.

La ROC siempre será un semiplano hacia la derecha a partir del polo más a la derecha.

Transformada de Laplace

La propiedad o teorema de convolución:

$$L\{x(t) * h(t)\} = H(s)X(s)$$

sigue valiendo siempre y cuando x(t) y h(t) sean idénticamente nulas para $t<0$.

La propiedad de diferenciación en el tiempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = sX(s) - x(0^-)$$

$x(0^-)$ es la condición inicial.

Transformada de Laplace

Teorema del valor inicial: si $x(t)$ no tiene impulsos ni funciones singulares en $t=0$

$$lím_{t \to 0^+} x(t) = lím_{s \to \infty} sX(s)$$

Teorema del valor final:

$$lím_{t \to \infty} x(t) = lím_{s \to 0} sX(s)$$

Transformada de Laplace

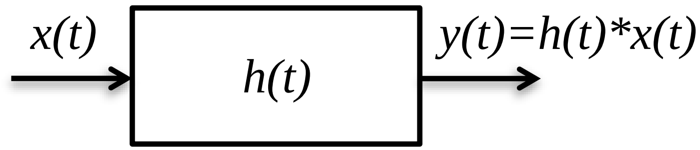
La utilidad más grande de la TL es el análisis y caracterización de SLIT.

Ya vimos que la TL de la entrada y salida de un SLIT están relacionadas a través de la multiplicación por la TL de la respuesta al impulso del sistema.

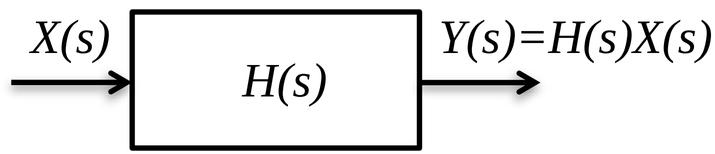
$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Transformada de Laplace

En el dominio del tiempo:



En el dominio de la frecuencia:



$H(s)$ es la función de transferencia. Para $s=j\omega$, $H(j\omega)$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Transformada de Laplace

Causalidad:

Si el sistema tiene $H(s)$ racional y la ROC es un semiplano derecho a la derecha del polo más a la derecha entonces el sistema es causal.

Ejemplo: sistema con respuesta al impulso:

$h(t)=e^{-t}u(t)$. Vemos que es causal pues $h(t)=0$ para $t<0$. La función de transferencia es $H(s)=1/(s+1)$ y la ROC $Re\{s\}>-1$

Transformada de Laplace

Estabilidad:

La estabilidad del sistema era equivalente a que la respuesta al impulso sea absolutamente integrable. En ese caso la TF de la respuesta al impulso converge (existe). Si la TF existe entonces tiene que coincidir con la TL para $s=j\omega$. O sea que el eje $j\omega$ debe pertenece a la ROC.

Transformada de Laplace

Estabilidad y causalidad:

Por lo dicho anteriormente, si la ROC de una $H(s)$ racional es hacia la derecha y además contiene al eje $j\omega$ entonces el polo más a la derecha debe estar a la izquierda del eje $j\omega$. (El polo tiene parte real negativa).

En ese caso el SLIT es causal y estable !

Transformada de Laplace

Ejemplo: sea un SLIT cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfacen la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales nulas:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

encuentre la respuesta causal al impulso.

Transformada de Laplace

Aplicando TL a ambos miembros y utilizando las propiedades de linealidad y diferenciación tenemos:

$$sY(s)+3Y(s)=X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+3}$$

ROC: $Re\{s\}>-3$ (para ser causal)

La antitransformada correspondiente al caso causal es $h(t)=e^{-3t}u(t)$ y además es estable.