Análisis de Señales

Transformada de Fourier en TC

TF en TC

- Derivación del par TF de TC
- Ejemplos de TF
- Propiedades de la TF en TC

Derivación

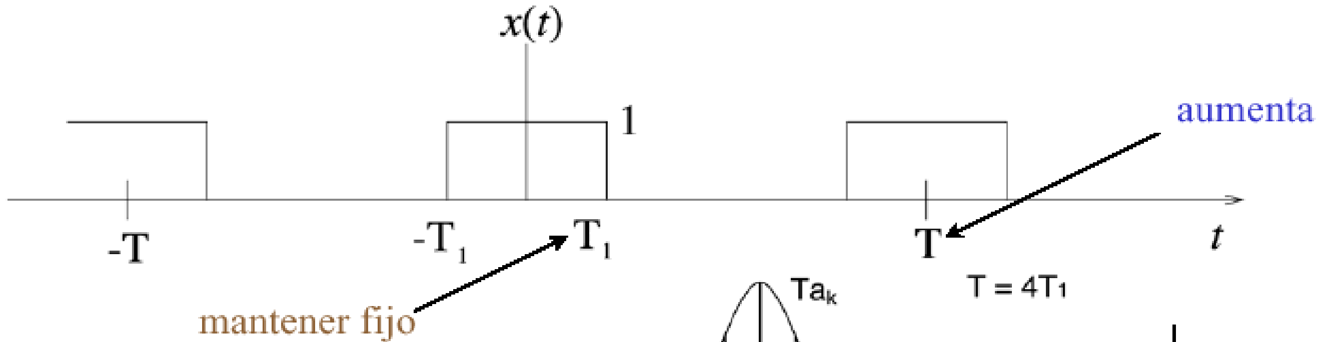
- La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas $f(t)$.
- ¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas?

Derivación

- Sea $x(t)$ una señal aperiódica. Pensemos como el límite de una señal periódica en la que $T \longrightarrow \infty$
- Para una señal periódica las componentes armónicas están separadas $w_0=2\pi/T$
- Como $T \longrightarrow \infty$, $w_0 \longrightarrow 0$ y las componentes armónicas están c/vez más cerca en f

$$\Downarrow$$

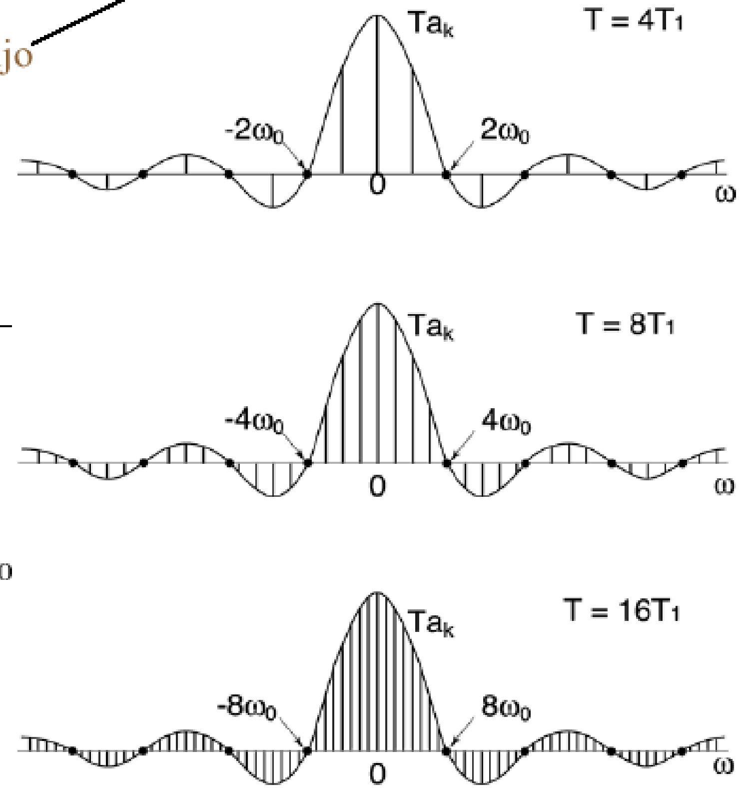
Serie de Fourier $\Rightarrow$ Integral de Fourier



$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

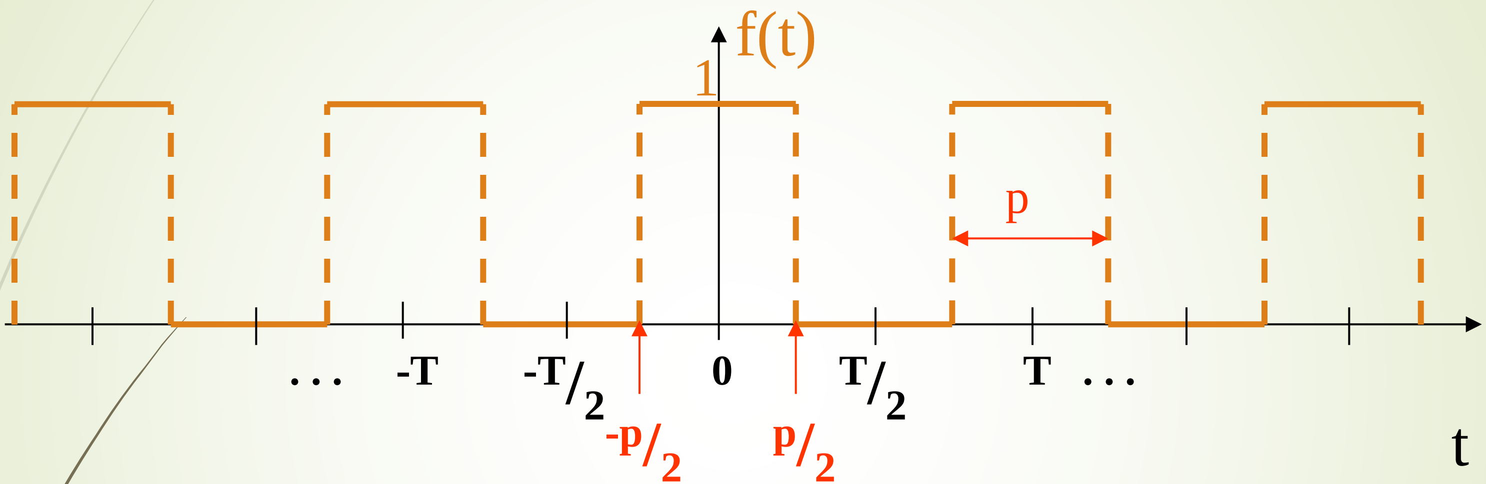
$$\Downarrow$$

$$T a_k = \left.\frac{2\sin \omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$



Los puntos de frecuencia discreta se vuelven más densos en ω a medida que aumenta T

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



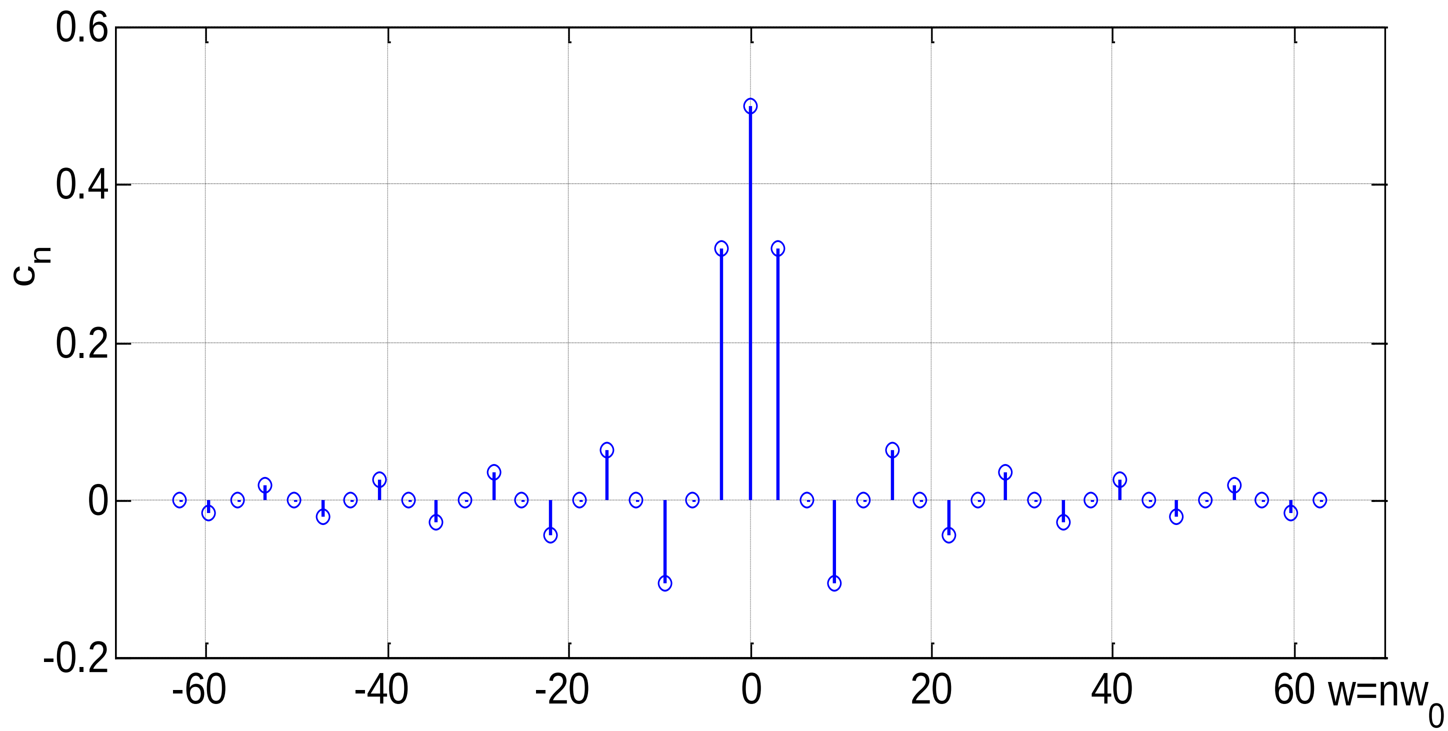
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

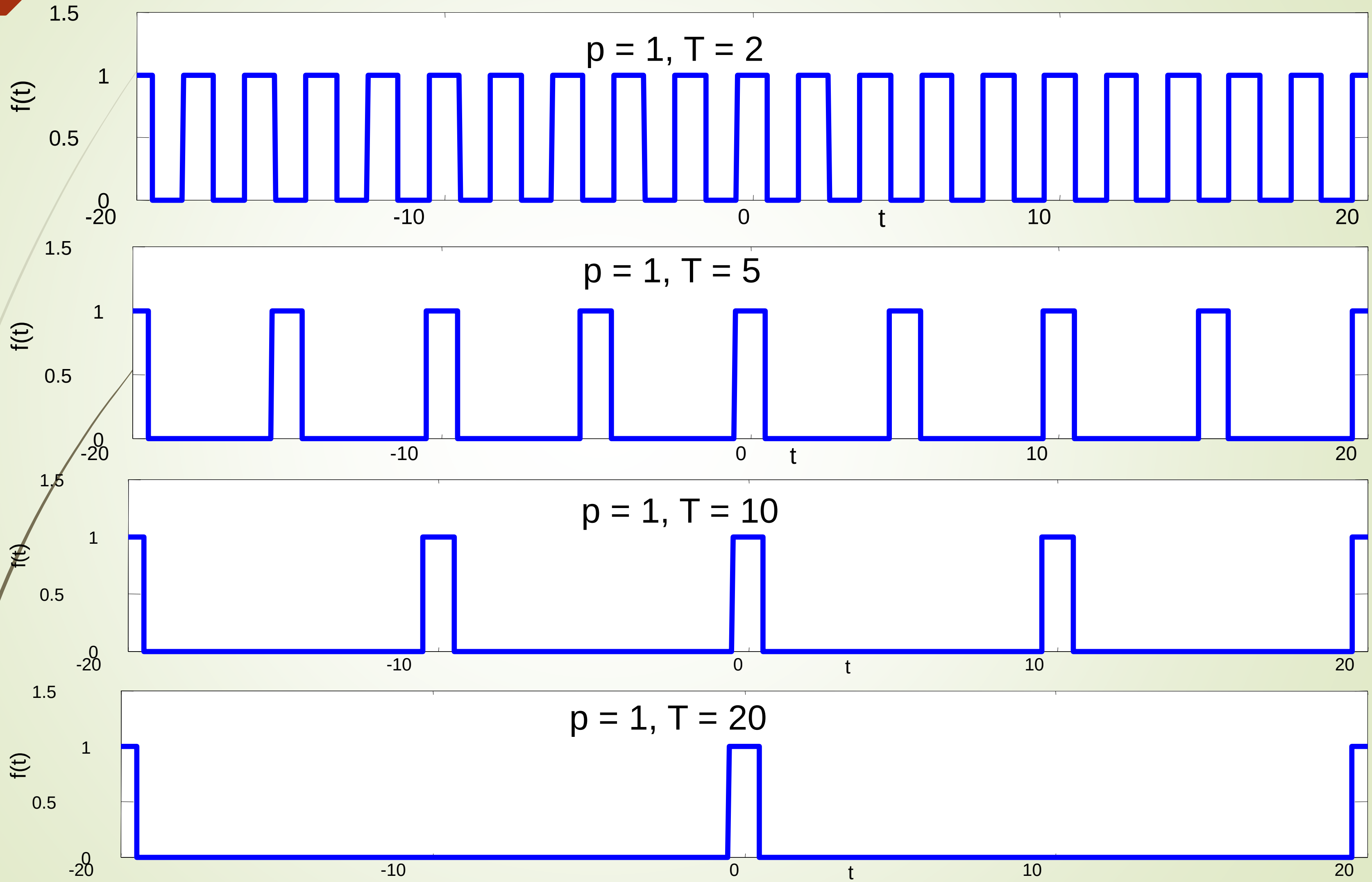
$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right) \frac{sen(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

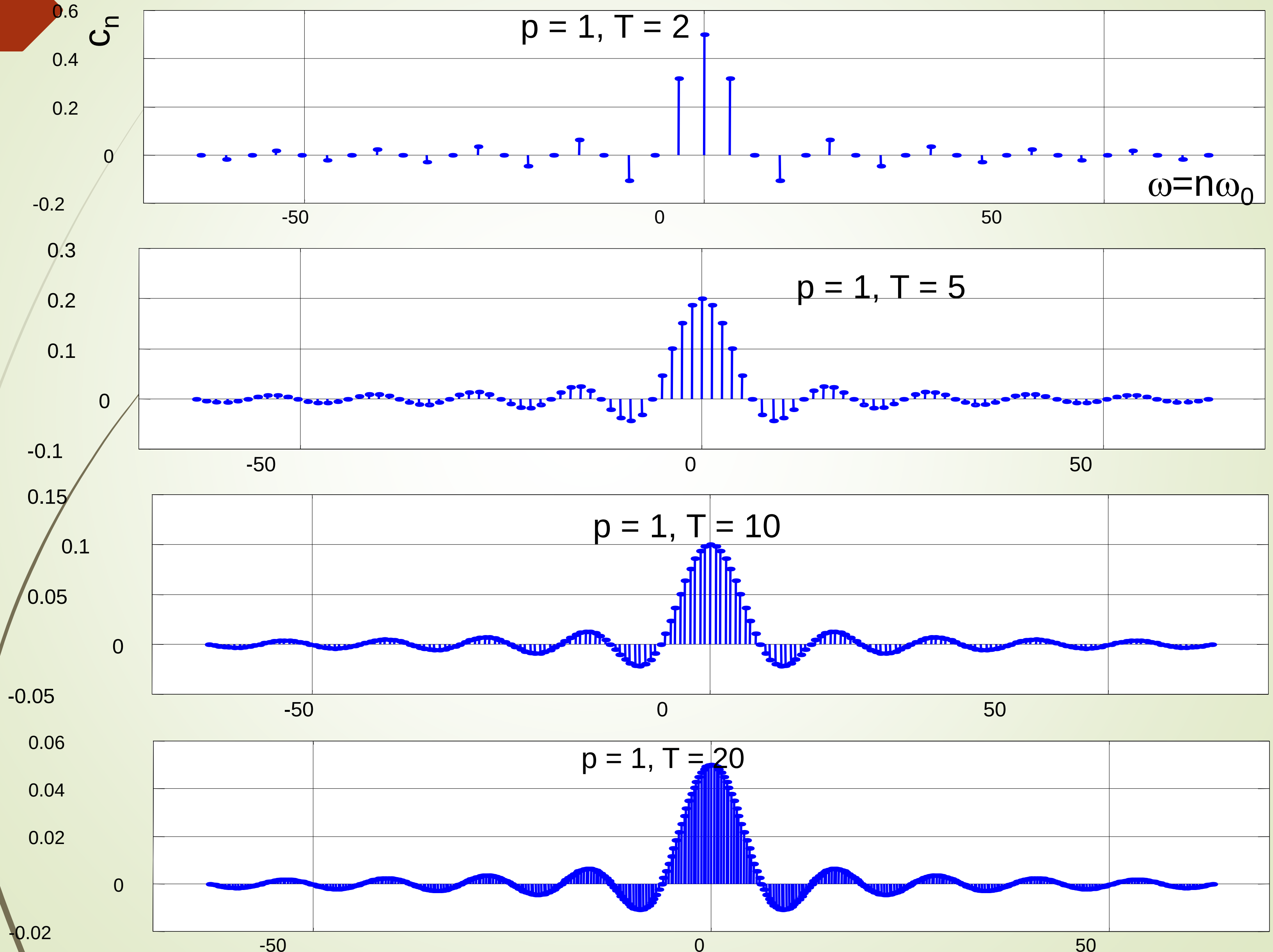
Espectro del tren de pulsos para $p = 1, T = 2$



Si el período del tren de pulsos aumenta...

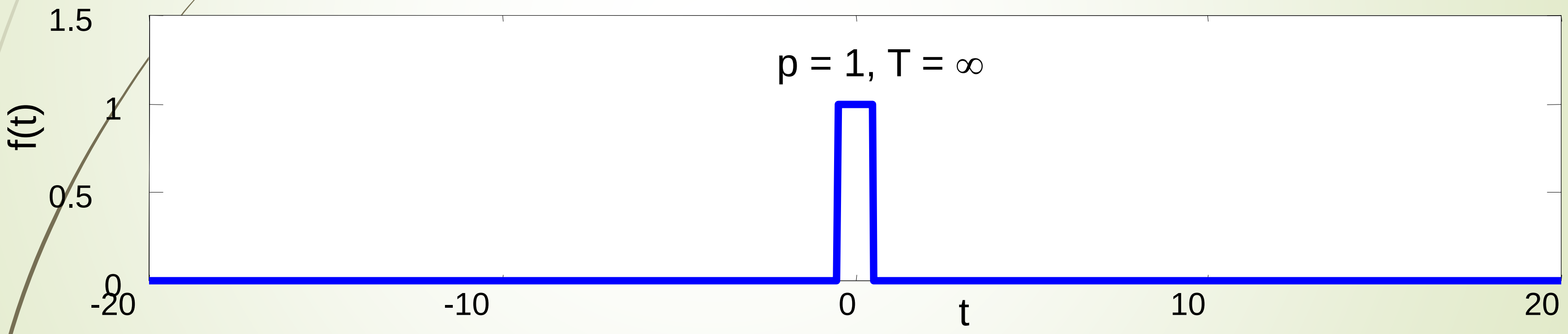


...el espectro se hace más "denso".



Derivación

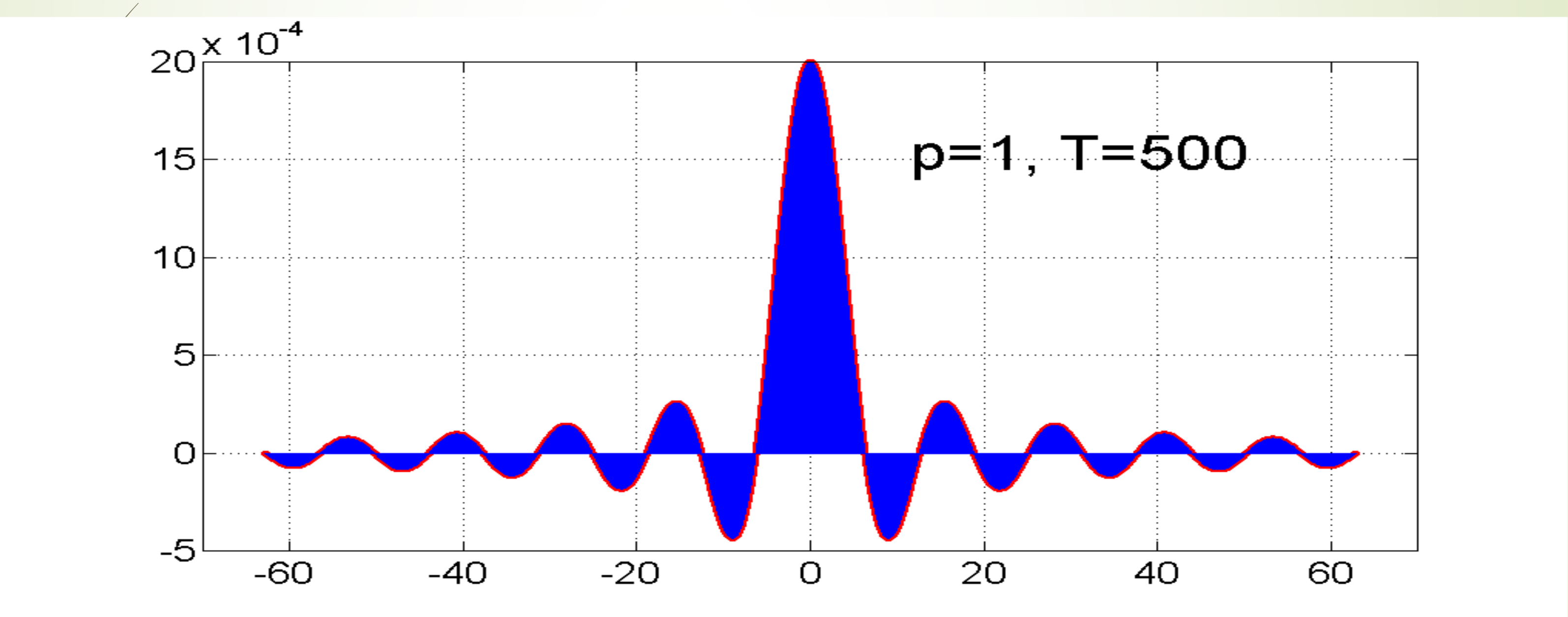
En el límite cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Derivación

Si se hace T muy grande ($T \to \infty$), el espectro se vuelve "*continuo*":



Derivación

- La señal periódica donde: $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk w_0 t}$

- $$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-j w_0 k t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j w_0 k t}\, dt$$

- Si definimos $X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\, w_0)$$

Derivación

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\,w_0)\, e^{jk w_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0\, X(jk\,w_0)\, e^{jk w_0 t}$$

Dado que $T \longrightarrow \infty$ entonces $\Sigma w_0 \longrightarrow \int dw$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$ Ecuación de síntesis

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt} dt$$ Ecuación de análisis

Resumiendo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Identidad de Fourier o antitrans-formada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Transformada de Fourier

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión $F(\omega)$ (dominio de la frecuencia) a partir de $f(t)$ (dominio del tiempo) y viceversa.

Par de TF

- Las ecuaciones anteriores son conocidas como el par de transformadas de Fourier. Las señales periódicas las expresamos como una suma de exponenciales complejas de amplitud a_k y para un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para una sucesión contínua de frecuencias y de "amplitud" $X(j\omega)d\omega / 2\pi$

Relación entre los coeficientes de la SF y la TF

- Supongamos que $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica con período T y coeficientes de Fourier a_k. $x(t)$ es una señal de duración finita que es igual a $\tilde{x}(t)$ en un período, entonces:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

- ya que x(t) es cero fuera del intervalo T

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T} X(jw)\Big|_{w = k\,w_0}$$

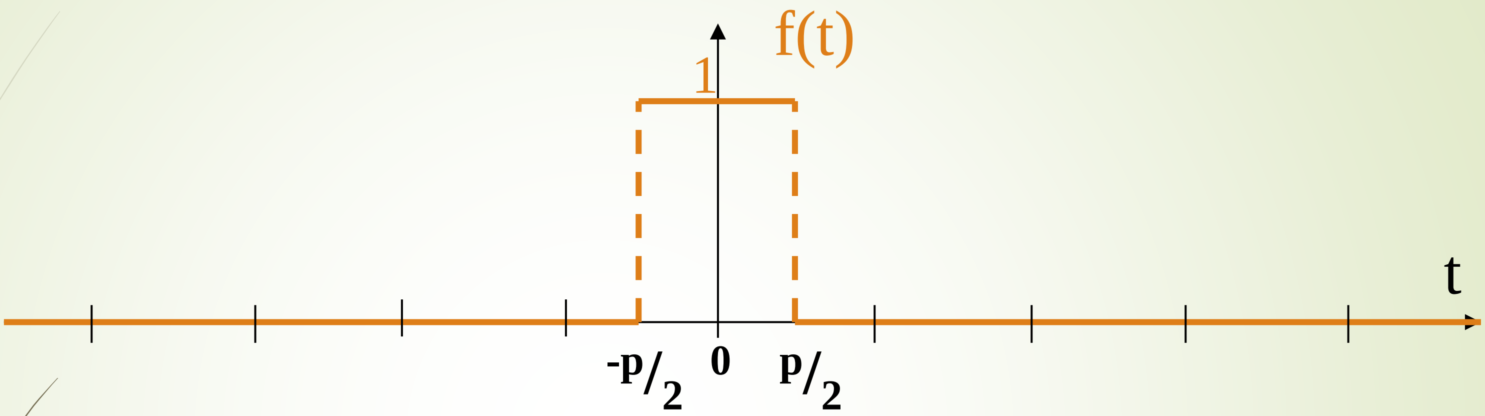
Convergencia de la TF

- Nos referiremos también como condiciones de Dirichlet :
- x(t) sea absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- x(t) tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito
- x(t) tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además cada discontinuidad debe ser finita.

Ejemplo. Calcular $F(\omega)$ para el pulso rectangular $f(t)$ siguiente:



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t\end{cases}$$

Integrando:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2} \qquad = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega p/2} - e^{j\omega p/2})$$

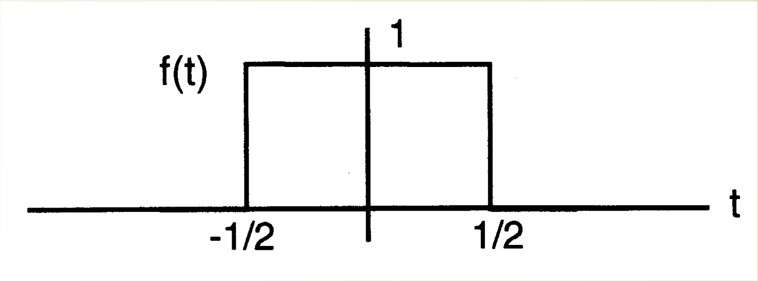
Usando la fórmula de Euler:

$$sen(\omega p/2) = \frac{e^{j\omega p/2} - e^{-j\omega p/2}}{2j}$$

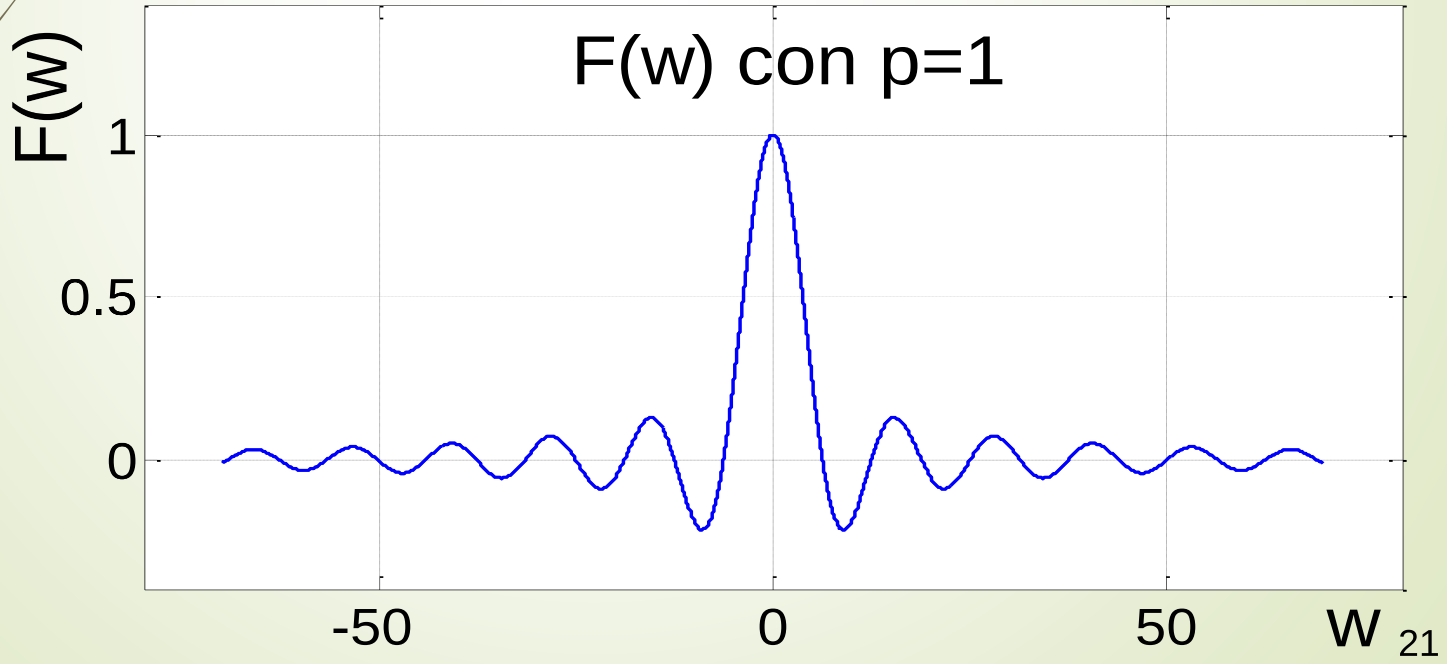
$$F(\omega) = p \frac{sen(\omega p/2)}{\omega p/2} = p \operatorname{sinc}(\omega p/2)$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t\end{cases}$$

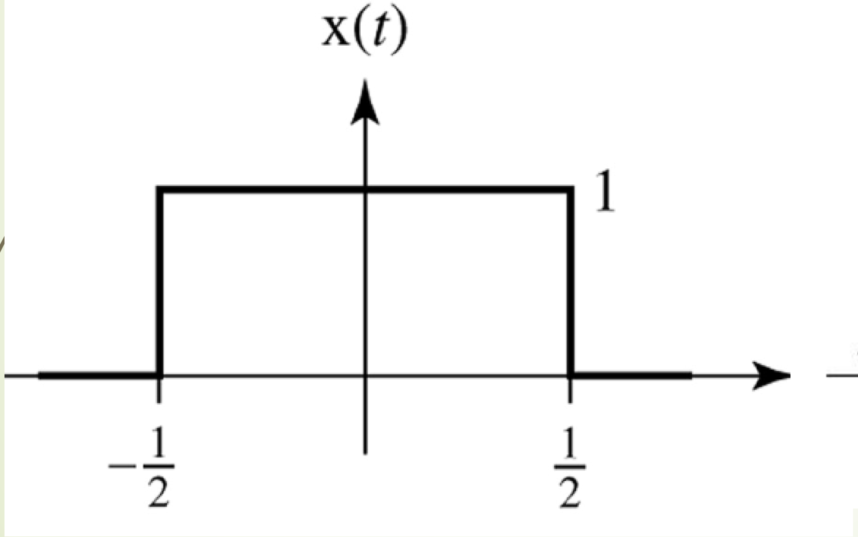
p =1

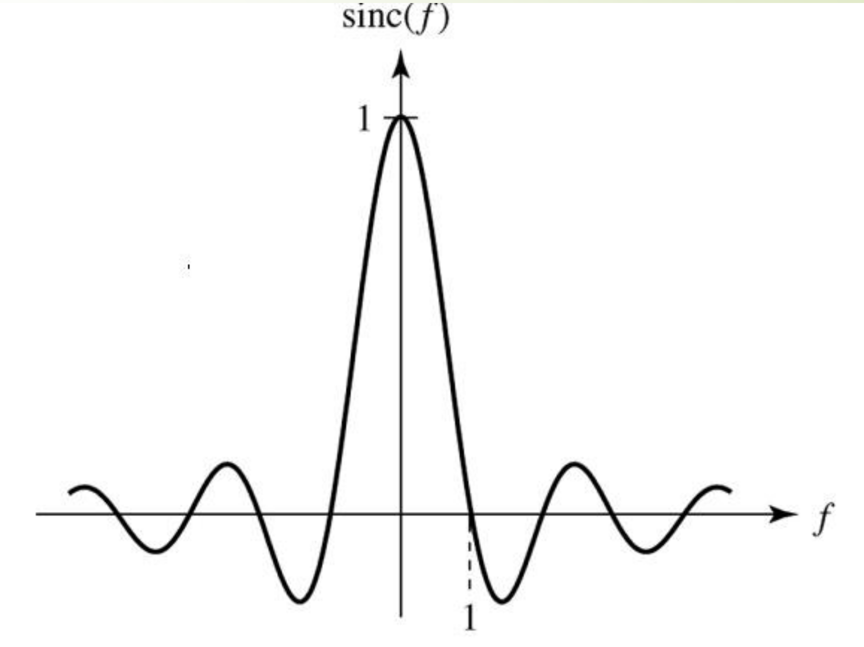


$$F(\omega)=p\,\mathrm{sinc}\,(\omega p/2)$$



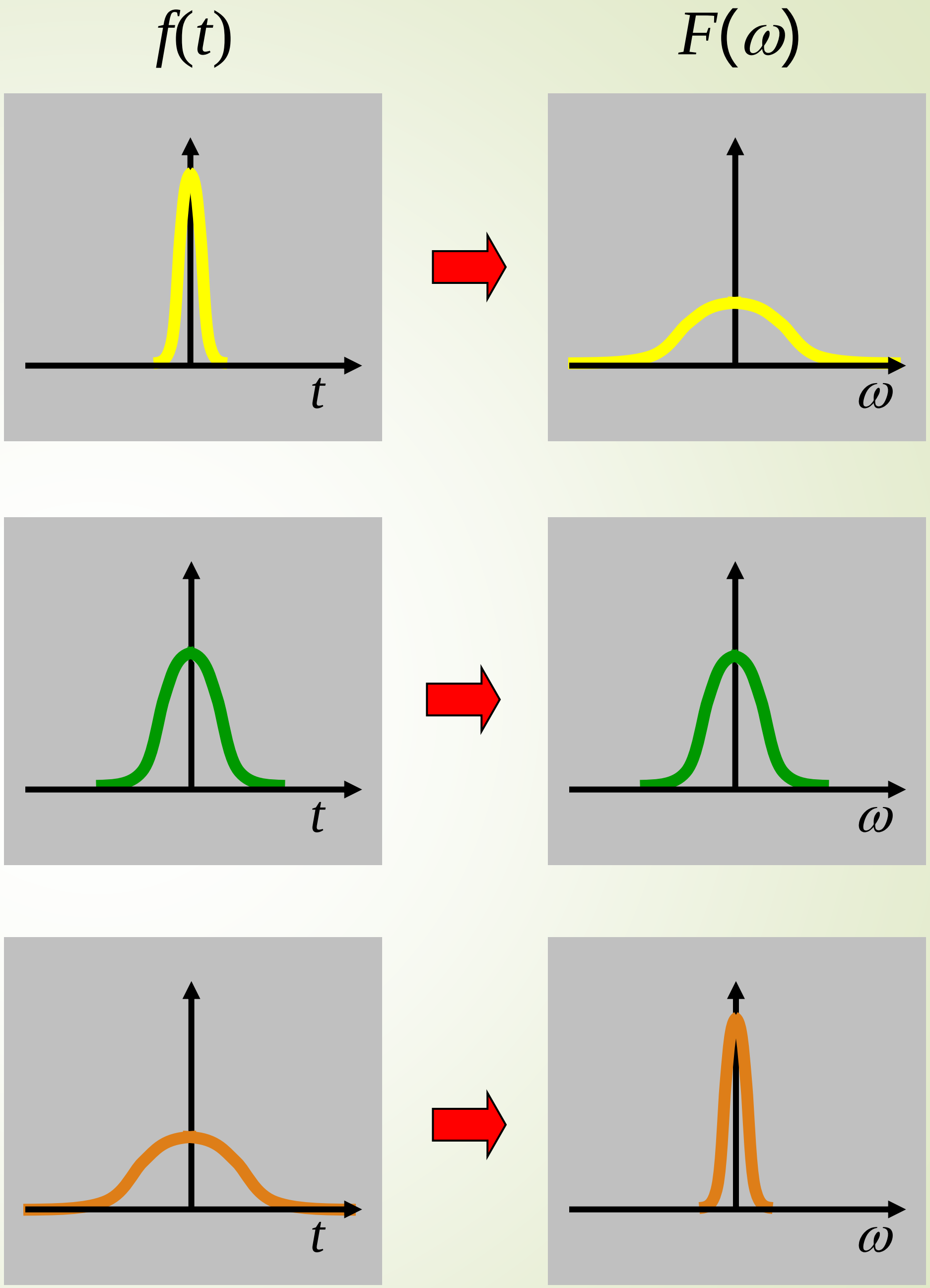
Ejemplo





Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.



Linealidad

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

  y

- $y(t) \longleftrightarrow Y(\omega)$

  entonces

- $ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(\omega)+bY(\omega)$

Desplazamiento de tiempo

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

  entonces

- $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega to} X(\omega)$

Diferenciación e integración

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \ \leftrightarrow \ \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

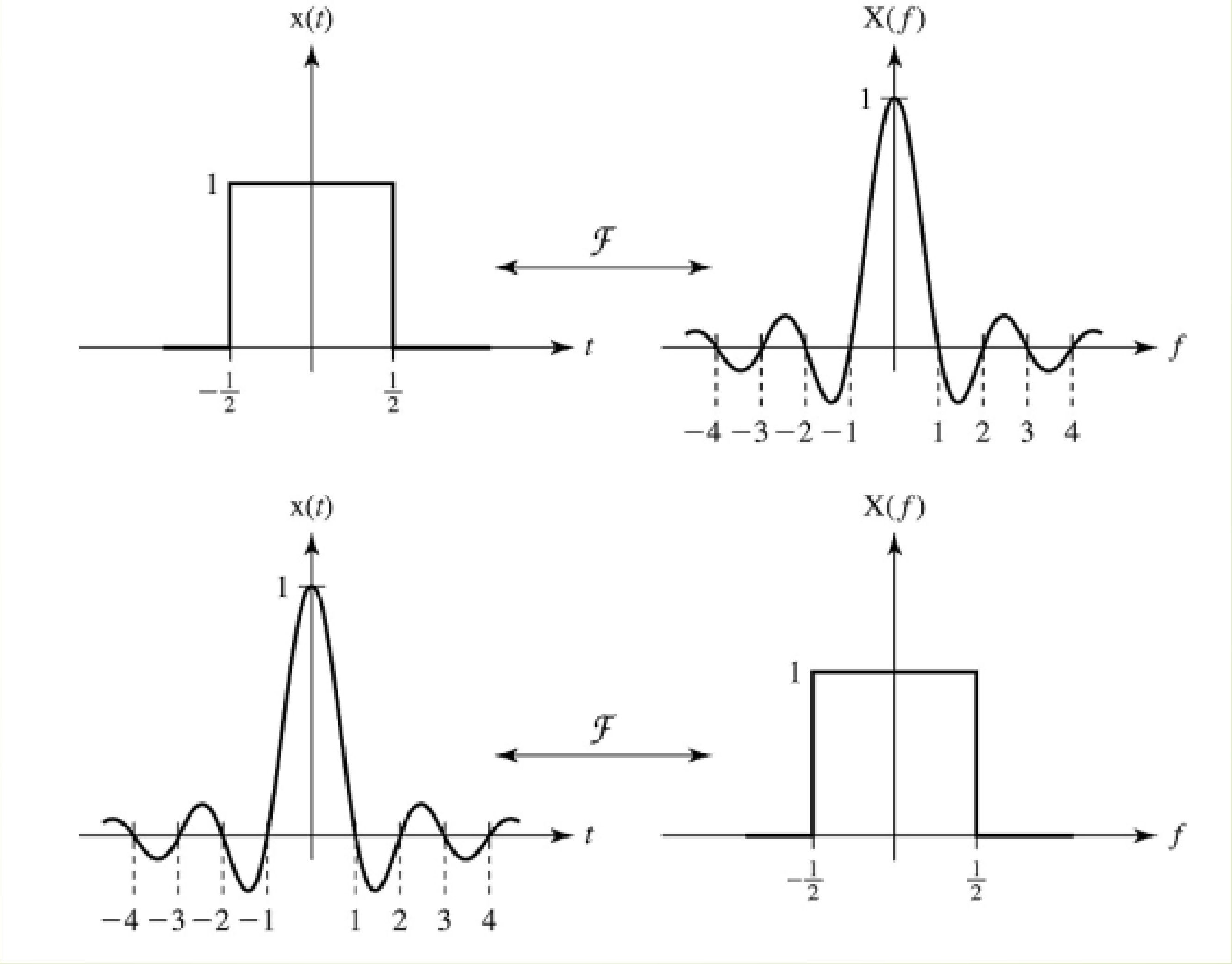
Escalamiento de tiempo y frecuencia

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

  entonces

- $x(at) \longleftrightarrow 1/|a|.\ X(\omega\ /a)$

Dualidad



x(t)
1
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
t
$\mathcal{F}$
X(f)
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4
f
x(t)
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4
t
$\mathcal{F}$
X(f)
1
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
f

Relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(w)|^2 \, dw$$

La energía total se puede calcular ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo integrando para todo tiempo, ó calculando la energía por unidad de frecuencia e integrando para todas las frecuencias.

Convolución

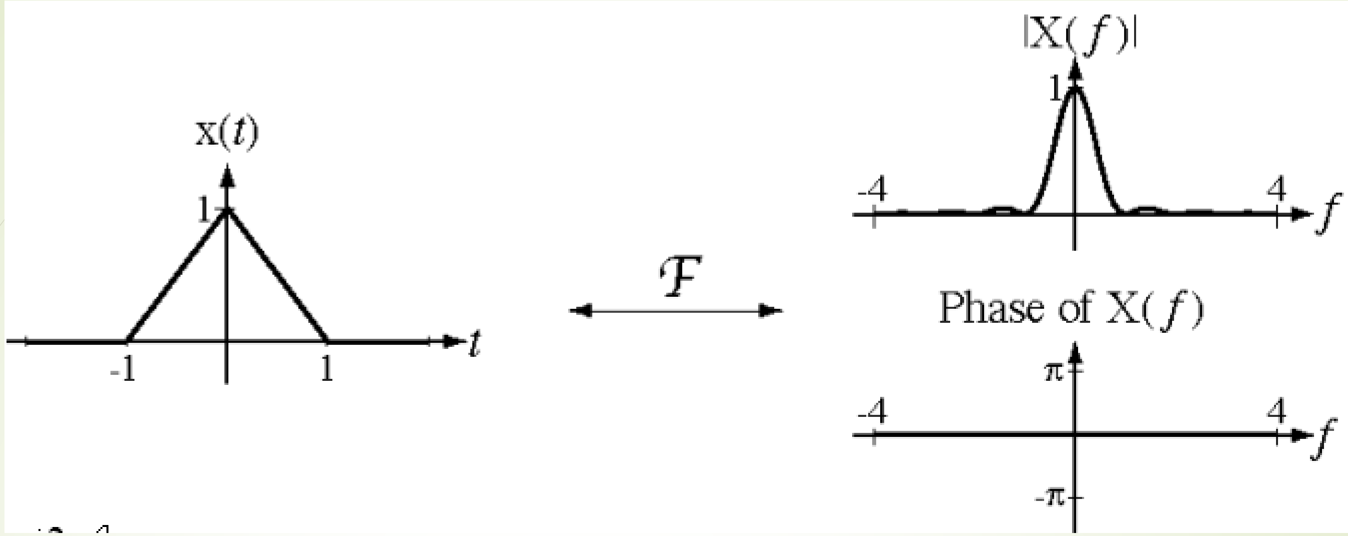
- Si $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

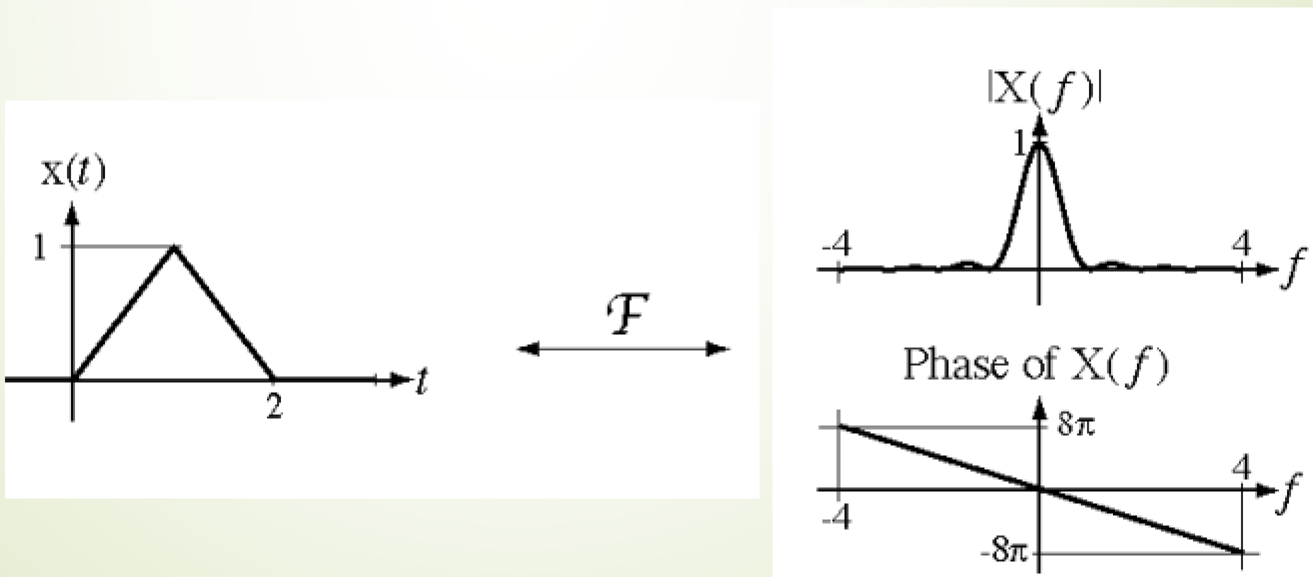
  y

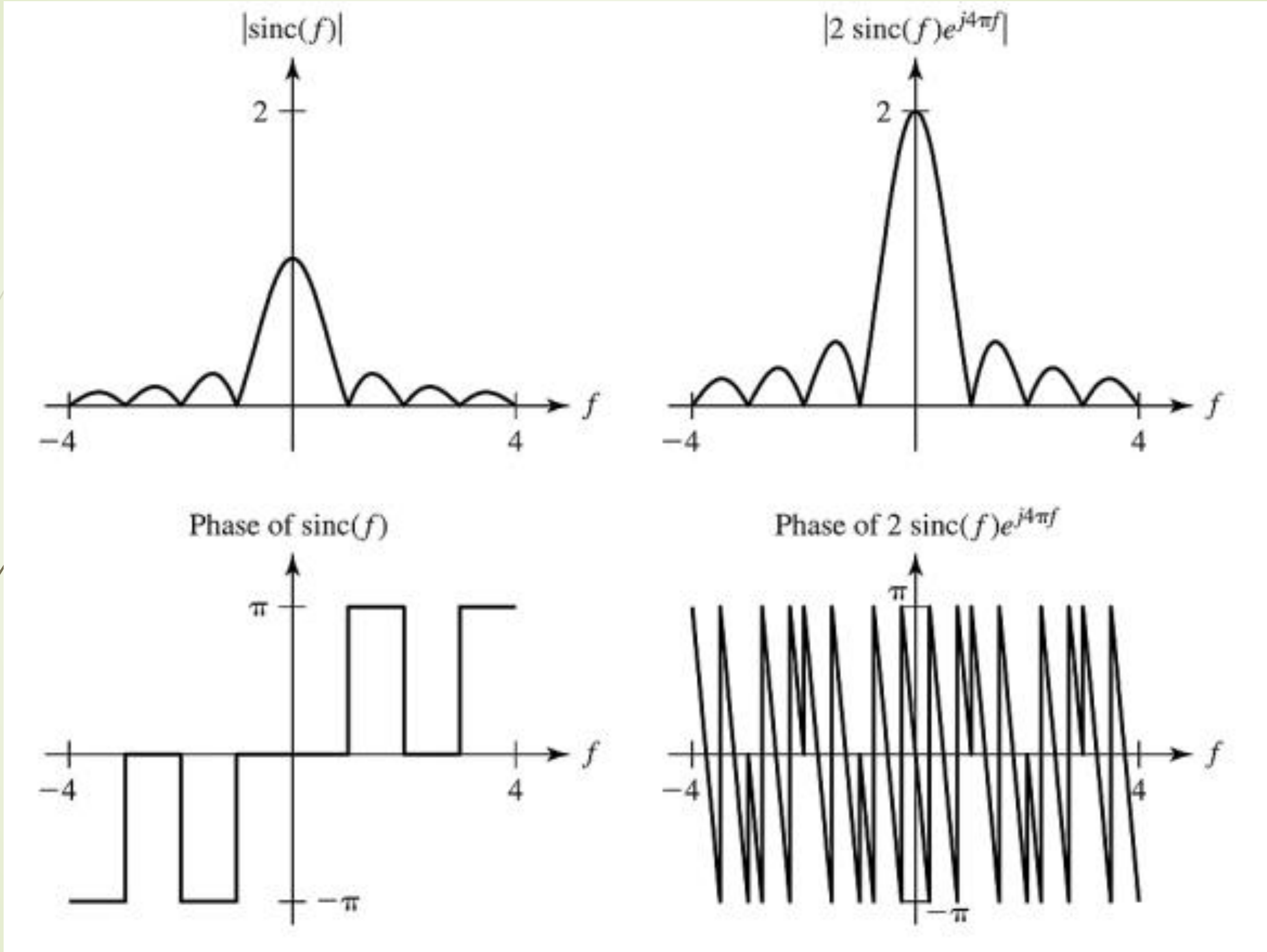
- $h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$

entonces:

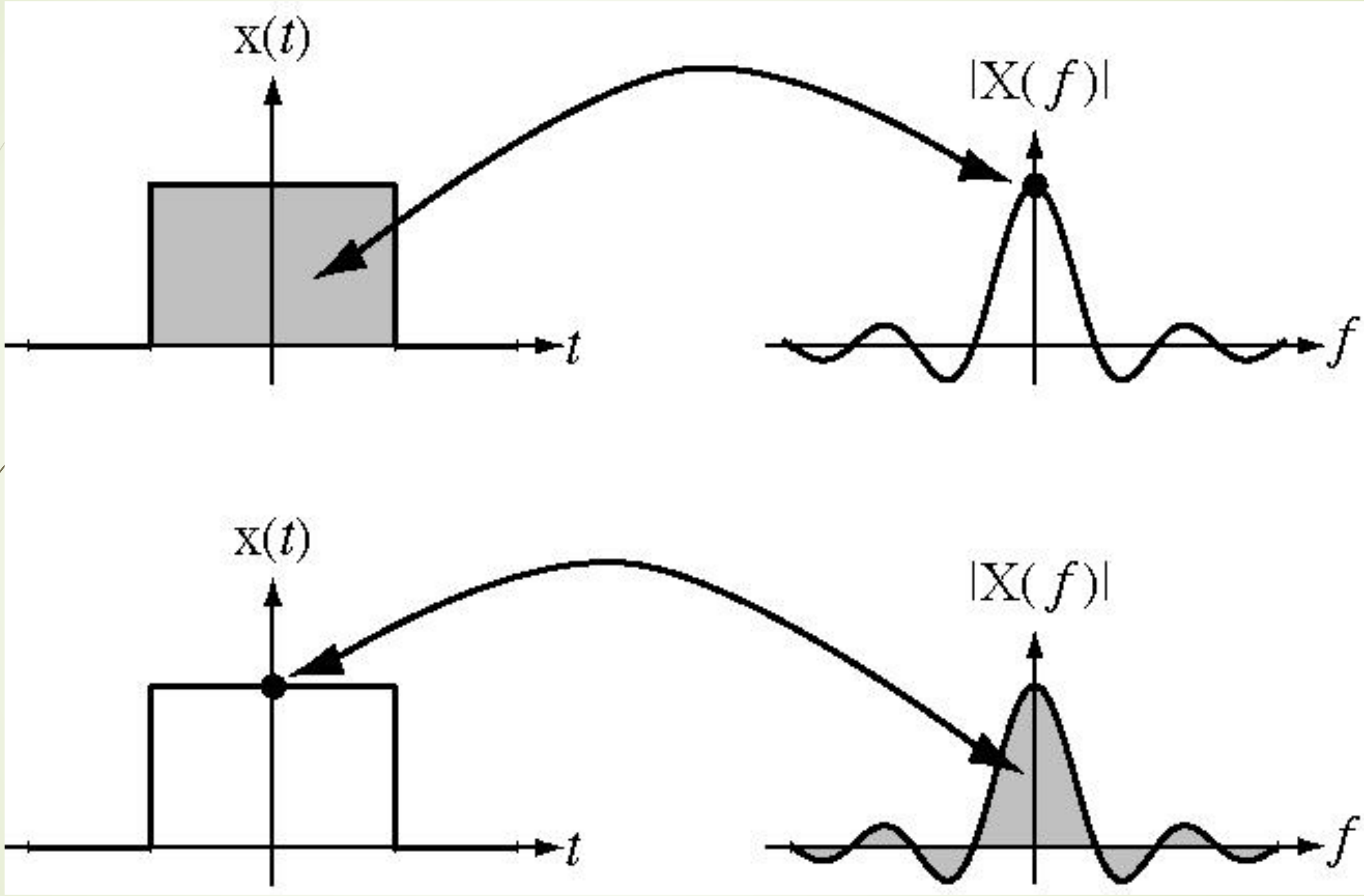
$$y(t)=x(t)*h(t) \longleftrightarrow Y(\omega)=X(\omega).H(\omega)$$


x(t)
1
-1
1
t
ℱ
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
π
-π
-4
4
f

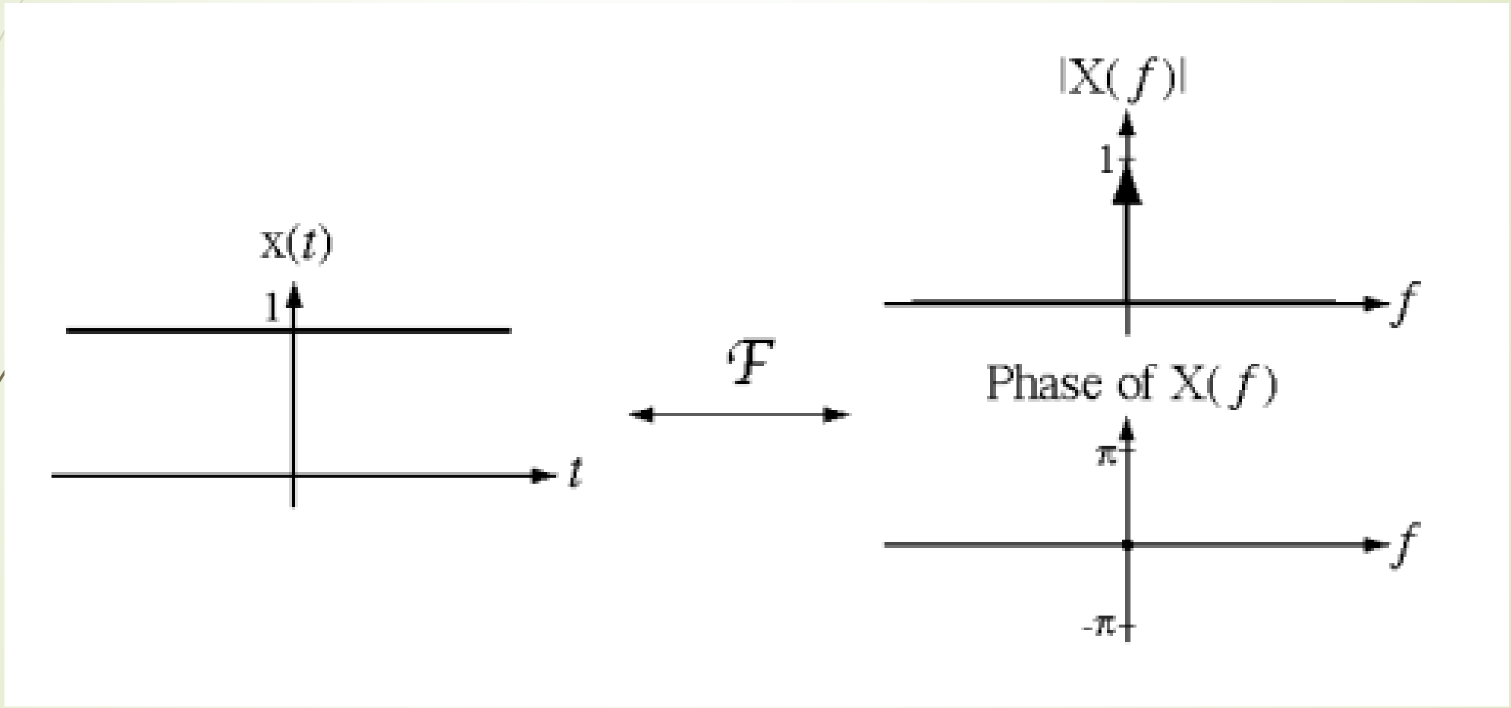

x(t)
1
2
t
ℱ
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
8π
-8π
-4
4
f



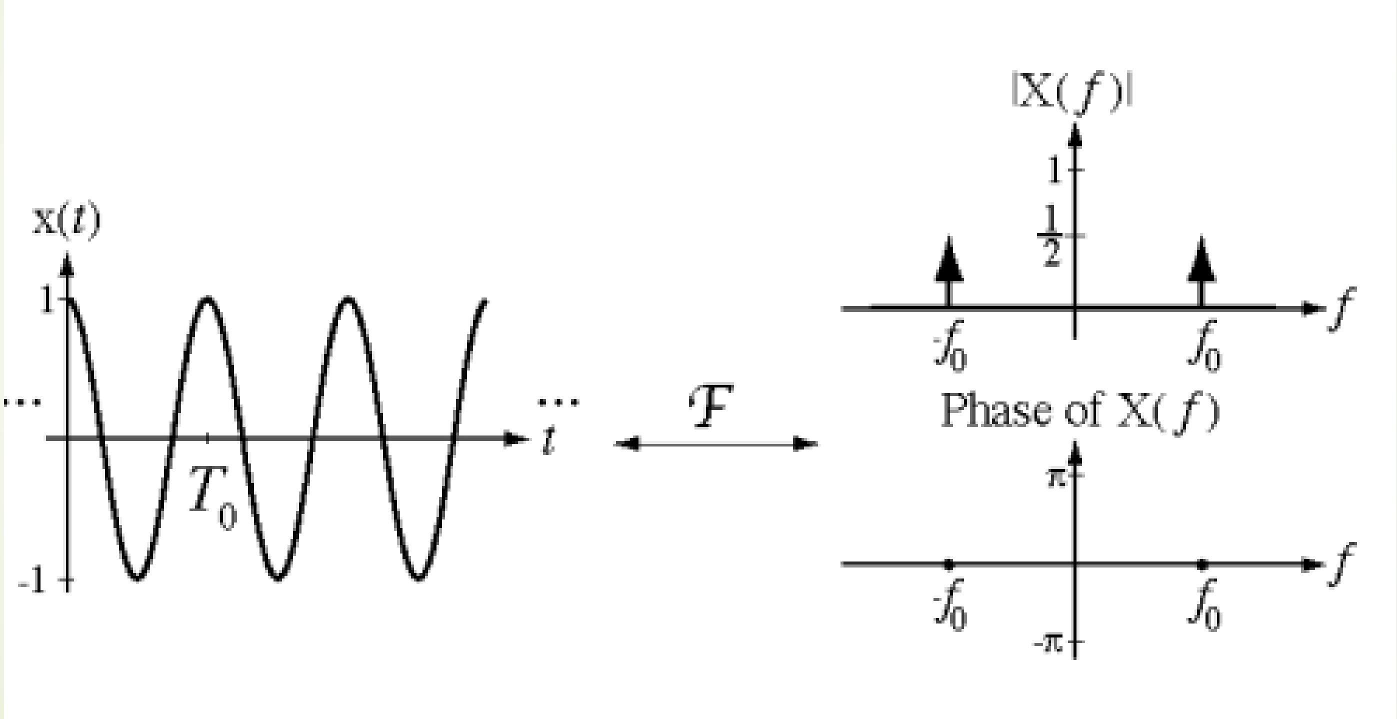
$|\text{sinc}(f)|$
$|2\ \text{sinc}(f)e^{j4\pi f}|$
2
f
-4
4
Phase of $\text{sinc}(f)$
Phase of $2\ \text{sinc}(f)e^{j4\pi f}$
π
$-\pi$


x(t)
|X(f)|
t
f
x(t)
|X(f)|
t
f

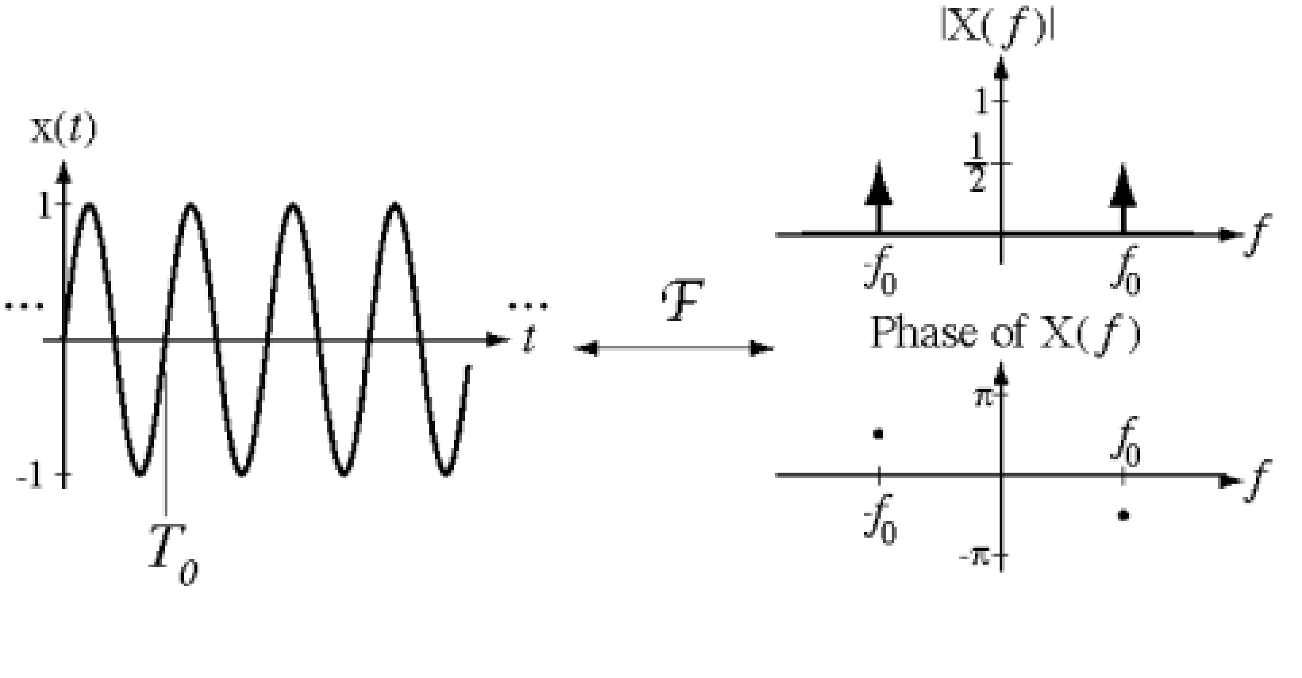
$1 \longleftrightarrow \delta(f)$



$$\cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$



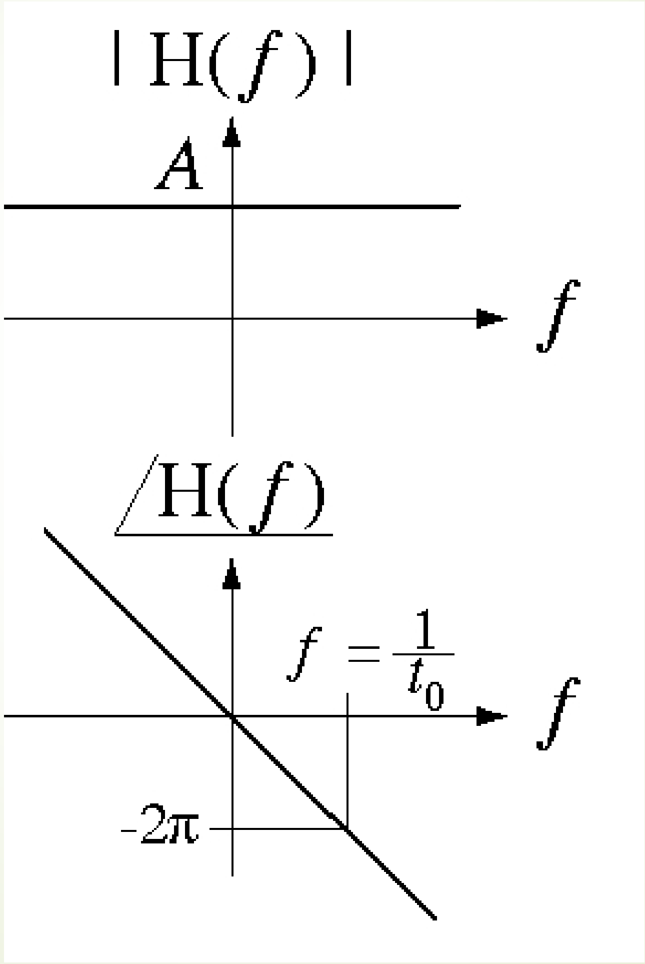
$$\text{sen } 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}j[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$$



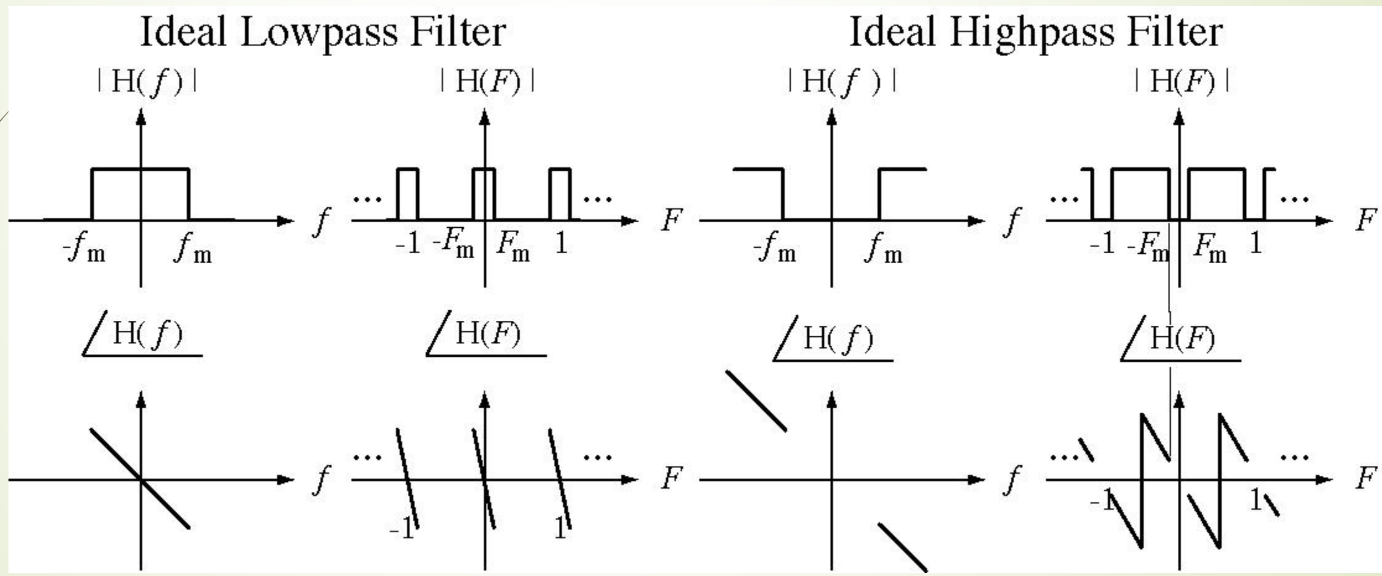
Filtros ideales en TC

- Filtro: separa lo deseado de lo que no es deseado.
- En señales un filtro separa señales en un rango de f, de señales en otro rango de f.
- Un filtro ideal "pasa" toda la señal en su banda de paso sin distorsión y bloquea la señal fuera de su banda.

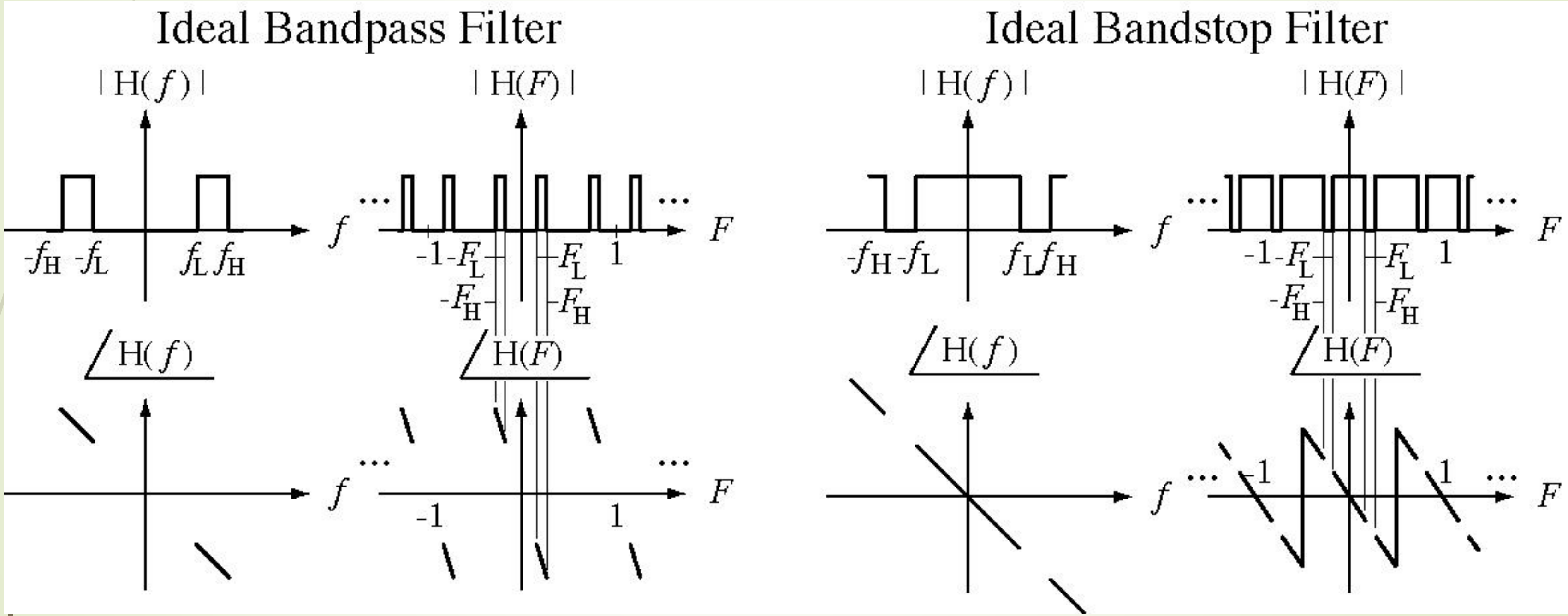
Filtro ideal



Pasa bajos ideal – Pasa altos ideal



Pasa banda ideal – Rechazo de banda ideal



Ancho de banda

- Rango de f.

- Rango de frecuencias que deja pasar el filtro ó rango de frecuencias presentes en la señal.

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Intregración	$\int_{-\infty}^{t}x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega)=X(j\omega)^* \\ \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert \\ \angle X(j\omega)=-\angle X(-j\omega) \end{cases}$