Análisis de Señales

Sistemas Lineales

Sistemas

- Un sistema procesa u opera con señales en una ó más entradas para producir señales en una ó más salidas. Los representamos mediante diagrama en bloques

Señal de entrada ó excitación

Señal de salida ó respuesta

$x(t) \longrightarrow y(t)$

Sistemas

- Matemáticamente es un operador que toma una señal y nos devuelve otra señal.
- Puede ser lineal, no lineal, estático, dinámico, variante o invariante en el tiempo y más características que vamos a ver…
- En particular en esta materia estudiaremos sistemas lineales.

Sistema continuo y discreto

- Un sistema continuo transforma las señales de entrada continuas, en señales continuas de salida.

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

- Un sistema discreto transforma las señales discretas de entrada, en señales de tiempo discreto de salida.

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

Sistema de tiempo continuo

- Muchos sistemas y procesos en tiempo continuo relacionan la salida con la entrada mediante ecuaciones diferenciales lineales, cuya forma general se expresa como
- $\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{d^n xt)}{dt}$
- Donde a_n y b_n en general son constantes.

Sistema de tiempo continuo

- Como ejemplo recordar la corriente en un circuito RC

- $i(t)R + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\, dt = x(t)$
- La solución de este sistema tiene una respuesta de la forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
- Donde $y_h(t)$ es la respuesta a la ecuación homogénea (condiciones iniciales) e $y_p(t)$ es la respuesta a la ecuación particular (depende de la excitación)

Sistema de tiempo discreto

- Así como en TC hay ecuaciones con derivadas e integrales, en TD hay ecuaciones con diferencias y acumulaciones
- $a_n\, y[n] + a_{n-1}\, y[n-1] + a_{n-2}\, y[n-2] = x[n]$

Propiedades de los sistemas

- Sistema **estático ó sin memoria**: si su salida en cualquier valor de la variable independiente (t ó n), depende a lo sumo de la entrada en ese mismo instante.

- $y(t)=Ax(t)$
- $y[n]=x^2[n]+x[n]$

Propiedades de los sistemas

- Sistema **dinámico ó con memoria**: cuando su salida en un instante depende del valor de la entrada en otros instantes.

- ✓ $y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(u)du$ tensión en un capacitor
- ✓ $y[n]=x[n-1]$ retardo

Propiedades de los sistemas

- **Linealidad**: si una excitación $x_1[n]$ ocasiona una respuesta $y_1[n]$ y una excitación $x_2[n]$ provoca una respuesta $y_2[n]$, entonces una excitación:

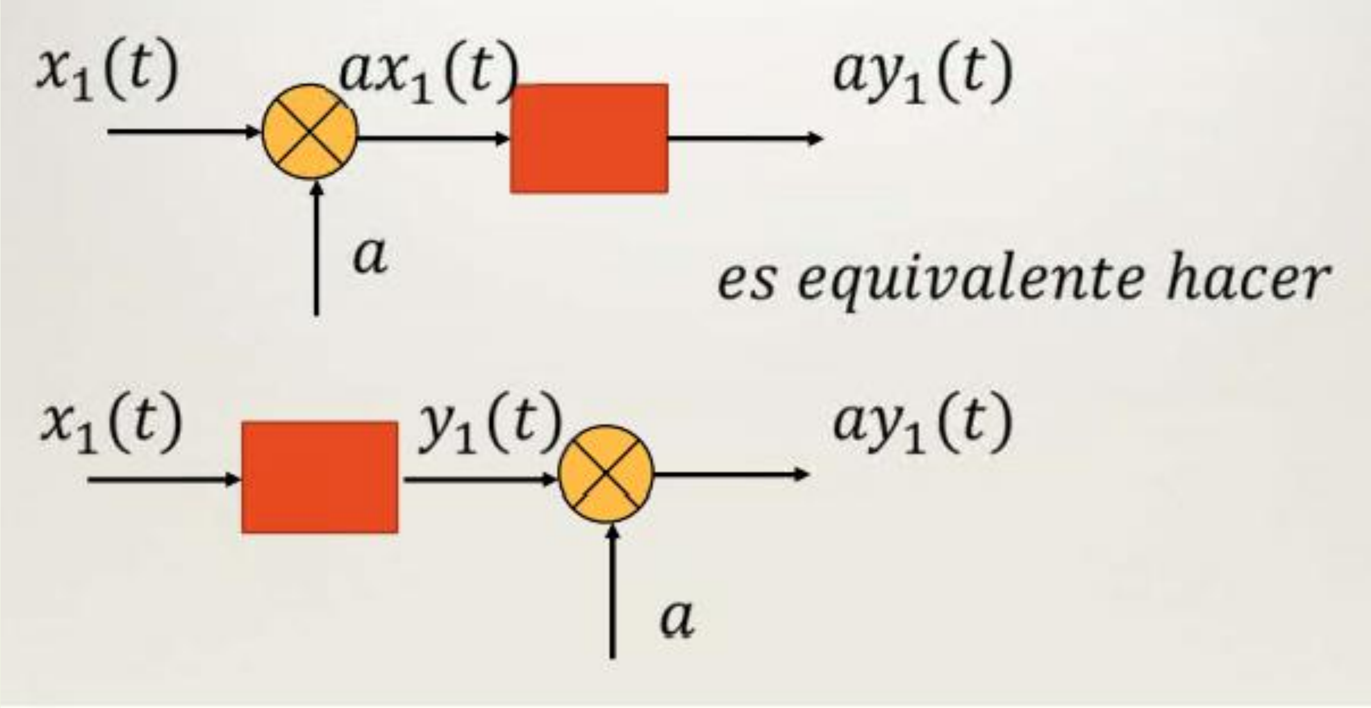
  $x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$ (combinación lineal)

  causará la respuesta:

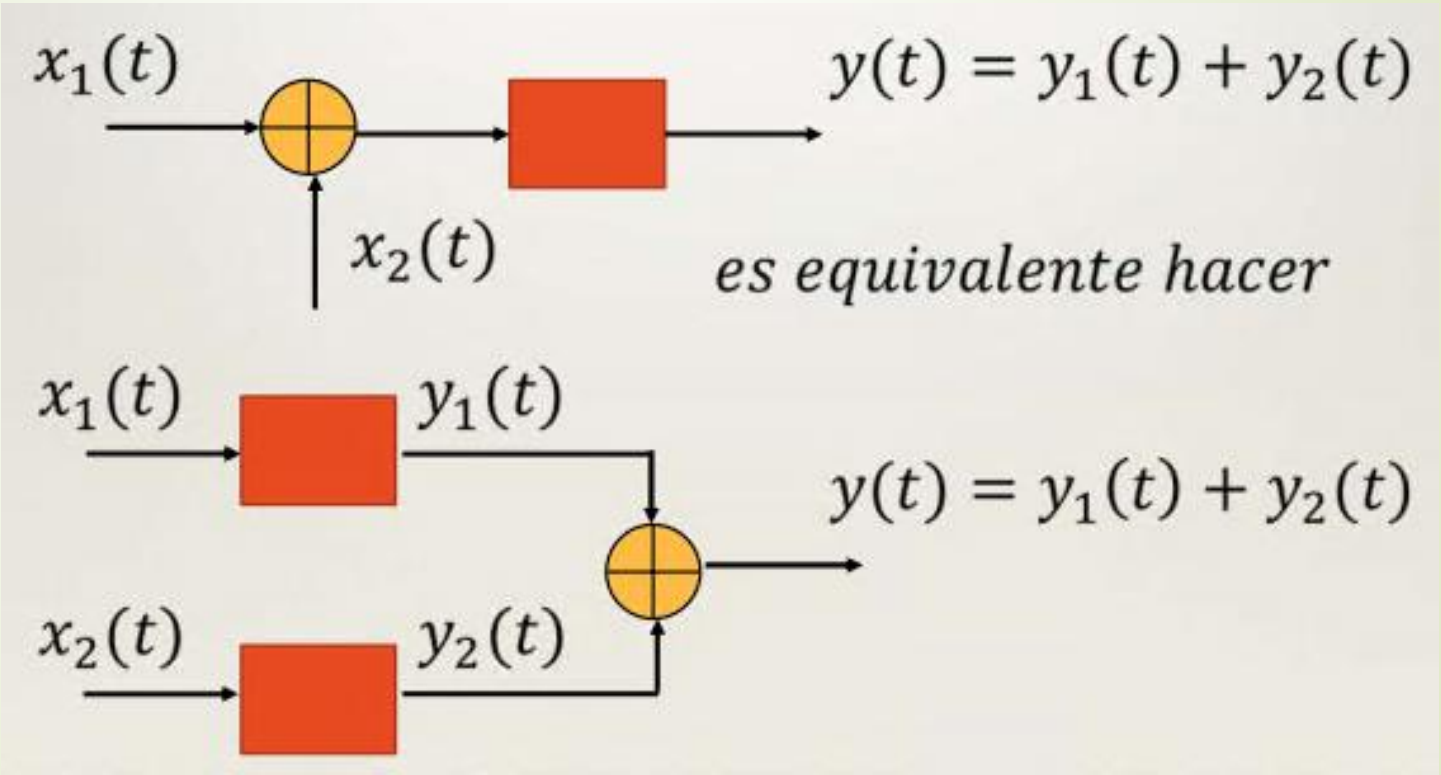
  $y[n]=ay_1[n]+by_2[n]$

  donde a y b son constantes arbitrarias. Lo mismo en tiempo continuo.

Propiedades de los sistemas



Propiedades de los sistemas



Propiedades de los sistemas

- Esta característica de los sistemas lineales da lugar a lo que se llama ***superposición***.
- Un sistema lineal además debe cumplir que para excitación x[n]=0 deberá ser y[n]=0
- Para tiempo continuo lo mismo.
- $ax_1(t)+bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t)+by_2(t)$

Propiedades de los sistemas

- Entonces un sistema es **lineal** si:
- la respuesta a $x_1(t)+x_2(t)$ es $y_1(t)+y_2(t)$
- la respuesta a $ax_1(t)+bx_2(t)$ es $ay_1(t)+by_2(t)$ donde a y b son ctes. complejas cualesquiera.
- Propiedad de aditividad
- Propiedad de escalamiento

Ej: $y(t)=tx(t)$ es lineal?

- $x_1(t)$ $\qquad y_1(t) = tx_1(t)$
- $x_2(t)$ $\qquad y_2(t) = tx_2(t)$
- $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$
- $y_3(t) = tx_3(t) = t(ax_1(t) + bx_2(t)) =$
- $\quad atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$

- Concluimos que el sistema es lineal.

Ej: $y[n]=2x[n]+3$ es lineal?

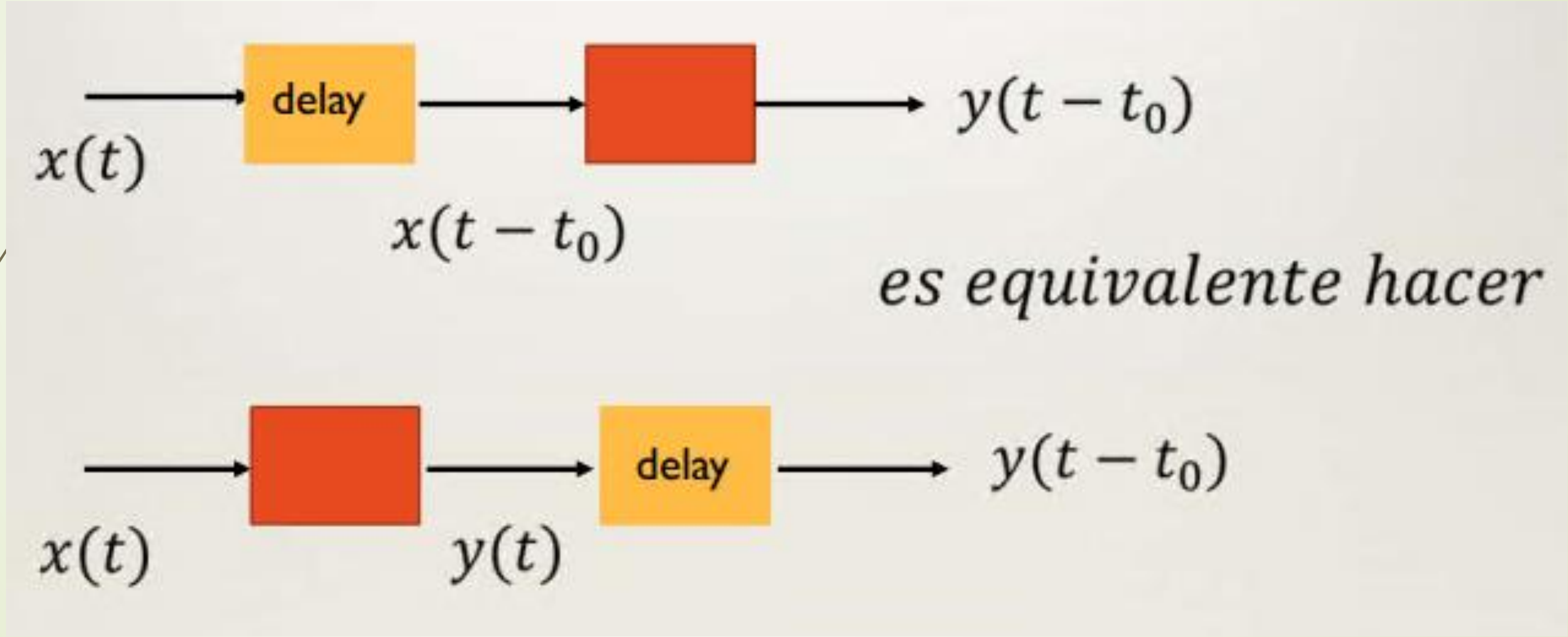
- ✓ $x_1[n] \qquad y_1[n] = 2x_1[n] + 3$
- ✓ $x_2[n] \qquad y_2[n] = 2x_2[n] + 3$
- ✓ $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$
- ✓ $y_3[n] = 2x_3[n] + 3$
- ✓ $y_3[n] = 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq y_1[n]+y_2[n]$
- ✓ No es lineal. No cumple $y[n] = 0$ para

  $x[n] = 0$

Invariancia en el tiempo

- Un sistema es **invariante en el tiempo** si el comportamiento y características del mismo no cambian con el tiempo.
- Si se aplica una señal x[n] la salida es y[n], si aplicamos $x[n-n_0]$ la salida será $y[n-n_0]$ pues el sistema es invariante en el tiempo. Un desplazamiento en tiempo de la señal de entrada produce un corrimiento en tiempo de la señal de salida.
- En TC $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

Invariancia en el tiempo



Ej. y[n]=2x[n]

- Si retardamos la secuencia de entrada k muestras:
- $y_r[n] = 2x[n-k]$
- Ahora retardemos la salida original:
- $y[n-k] = 2x[n-k]$
- Como $y_r[n] = y[n-k]$ el sistema es invariante en el tiempo.

Ej. $y(t)=tx(t-3)$

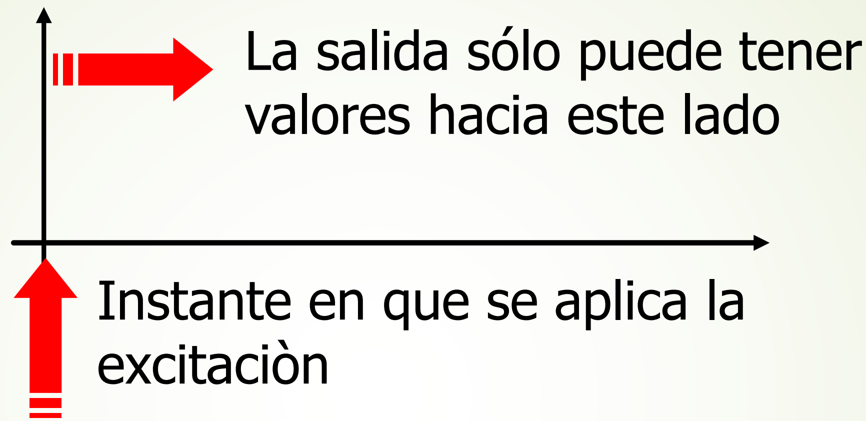
- Si retardamos la entrada:
- $y_r(t) = tx(t-3-t_0)$
- Si retardamos la salida original:
- $y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-3-t_0)$
- $y_r(t) \neq y(t-t_0)$
- El sistema no es invariante en el tiempo.

Causalidad

- Un sistema es **causal** si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado. También se le suele llamar sistema no anticipativo.

- $y[n] = x[n] - x[n-1]$ ⇐ causal
- $y(t) = x(t-1)$ ⇐ causal
- $y(t) = x(t-2) + x(t+4)$ ⇐ no causal

Causalidad



- La salida es el efecto de la entrada.
- Todos los dispositivos reales son causales.
- No puede haber salida antes que la entrada.
- Si consideramos t=0 como el tiempo a partir del cual es aplicada la excitación, la salida de un sistema causal sólo tendrá puntos para t>=0.

Estabilidad

- Definimos un sistema **estable** como aquél en el que cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Es decir
- $|x(t)| \leq M_x < \infty \quad \Longrightarrow \quad |y(t)| \leq M_y < \infty$
- Si para alguna entrada acotada x(t) la salida no está acotada (es infinita) el sistema no es estable (inestable).

Ej. y[n]=nx[n-3]

- Si consideramos que la entrada es x[n]=u[n], que es acotada, la salida será una rampa que no está acotada
- y[n] = nu[n-3]
- En consecuencia el sistema no es estable

SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO (LIT)

Sistemas LIT

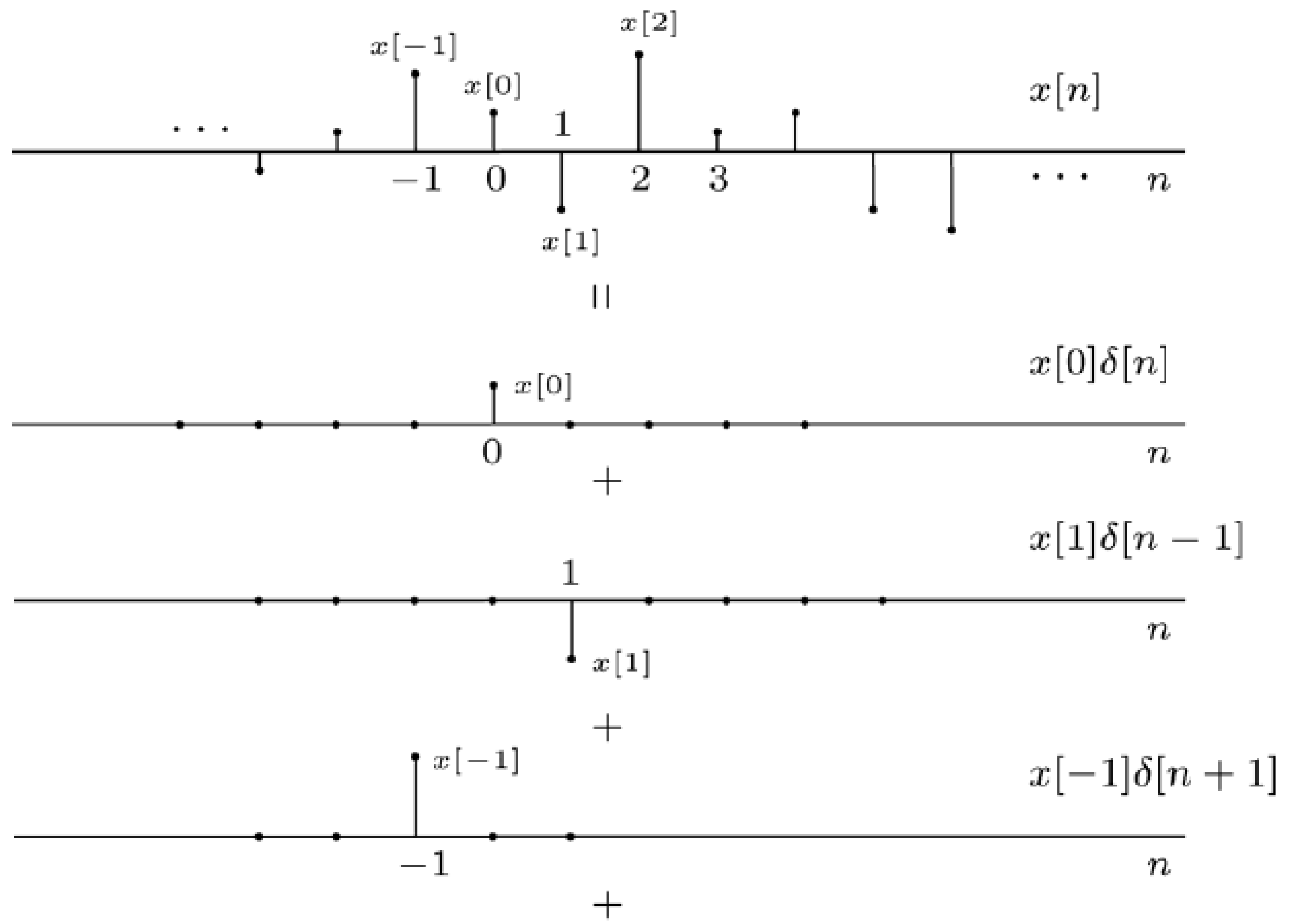
- Dos propiedades importantes en el análisis de señales y sistemas son la linealidad e invariancia en el tiempo.
- Muchos procesos físicos y sistemas tienen estas propiedades, y pueden ser modelizados por sistemas LIT.
- Sistemas no lineales pueden ser considerados como lineales, al menos en un determinado intervalo.
- Los sistemas LIT cumplen con la propiedad de superposición, esto significa que si una señal de entrada se puede representar en términos de una combinación lineal de un conjunto de señales básicas, entonces se puede utilizar la superposición para calcular la salida del sistema en términos de las respuestas a estas señales básicas.

Sistemas LIT

- La respuesta de sistemas LIT a entradas específicas, se lleva a cabo a través de los siguientes métodos:
- Solución del modelo del sistema representado por una ecuación diferencial (Ecuación de sumas y diferencias)
- Integral de convolución (Suma de convolución)
- Transformada de Fourier (En tiempo contínuo y discreto)
- Transformada de Laplace (Transformada Z)
- Los dos primeros métodos se realizan en el dominio del tiempo ya que la representación de los sistemas y las señales asociadas están dados en términos de funciones de tiempo y los dos siguientes corresponden a métodos en el dominio de la frecuencia debido a que son especificados en términos de funciones de la variable compleja *s* que corresponde a la variable de frecuencia.

Sistemas LIT discretos : la suma de convolución

- Nos preguntamos si existe un conjunto de señales tales que:
  - ✓ Podamos representar otras señales como combinación de estas funciones básicas.
  - ✓ La respuesta a estas señales de los sistemas LTI será simple ?
- La idea es ver cómo se puede utilizar el impulso unitario discreto para representar cualquier señal discreta.



x[−1]
x[2]
x[0]
x[n]
1
−1
0
2
3
n
x[1]
=
x[0]δ[n]
x[0]
0
n
+
x[1]δ[n − 1]
1
n
x[1]
+
x[−1]
x[−1]δ[n + 1]
−1
n
+

TD muestras unitarias desplazadas

- Es decir

$$x[n] = \ldots\ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots\ldots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Coeficientes

Funciones básicas

- ✓ Representamos una secuencia arbitraria como combinación lineal de impulsos unitarios desplazados, con pesos x[k].
- ✓ La ecuación anterior se la suele llamar *propiedad de selección* del impulso unitario discreto.
- ✓ $\delta[n-k]$ es distinta de cero para n=k y selecciona el valor de la función x[k] para k=n.

- Supongamos un sistema lineal y definamos como $h_k[n]$ a la respuesta del sistema a $\delta[n-k]$

- Por superposición:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

- De acuerdo a la expresión anterior: si conocemos la respuesta de un sistema lineal al conjunto de impulsos desplazados, podemos construir la respuesta a una entrada arbitraria.

LIT

- Supongamos un sistema IT (invariante en el tiempo), entonces :

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Suma de convolución ó suma de superposición. Si el sistema es LIT entonces la respuesta sólo depende de la diferencia de tiempos y no del tiempo de aplicación.

Convolución

- La operación anterior la llamamos convolución de las secuencias x[n] y h[n]. De manera simbólica :

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Por lo tanto el sistema LIT queda completamente caracterizado por la respuesta a una sola señal, su respuesta al impulso unitario.

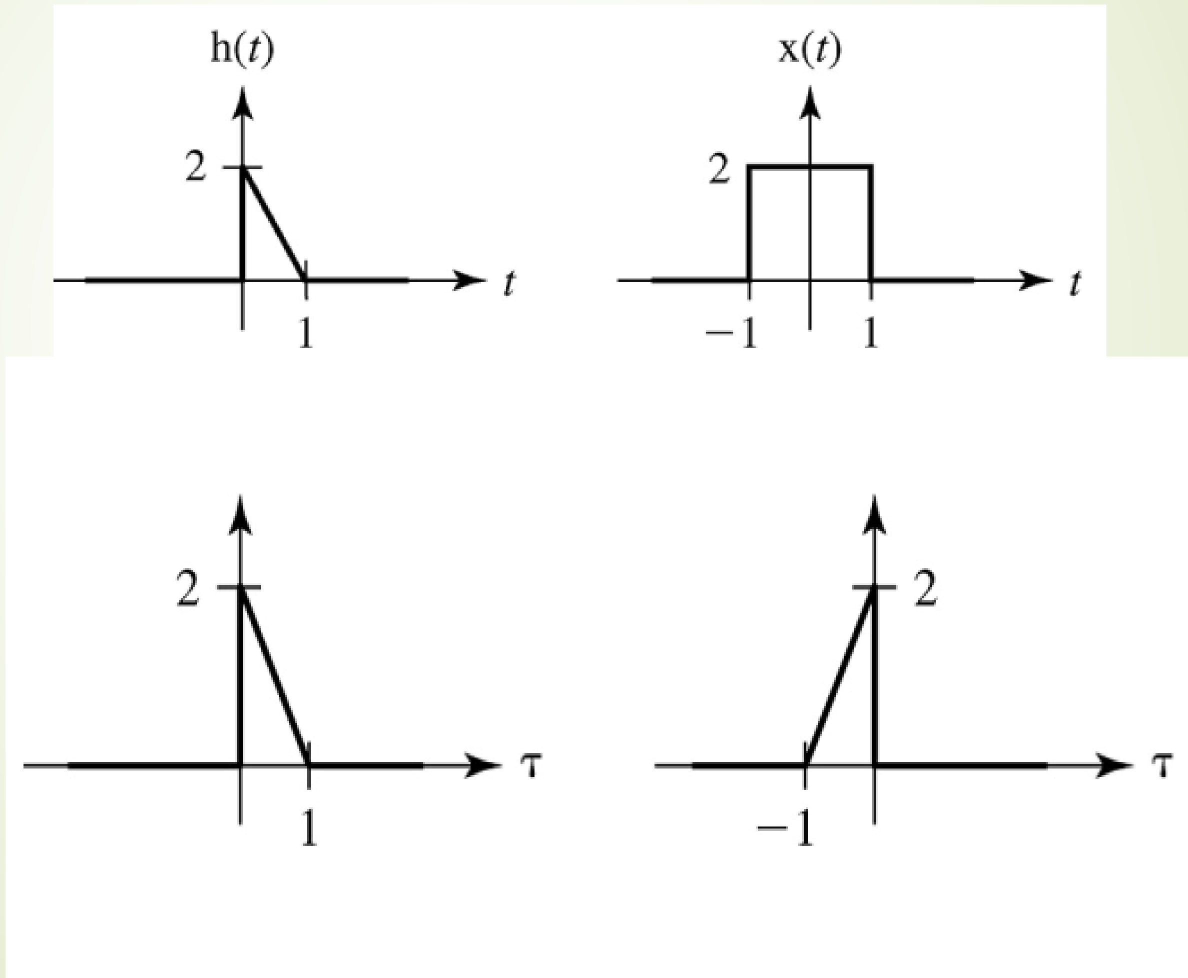
Para TC

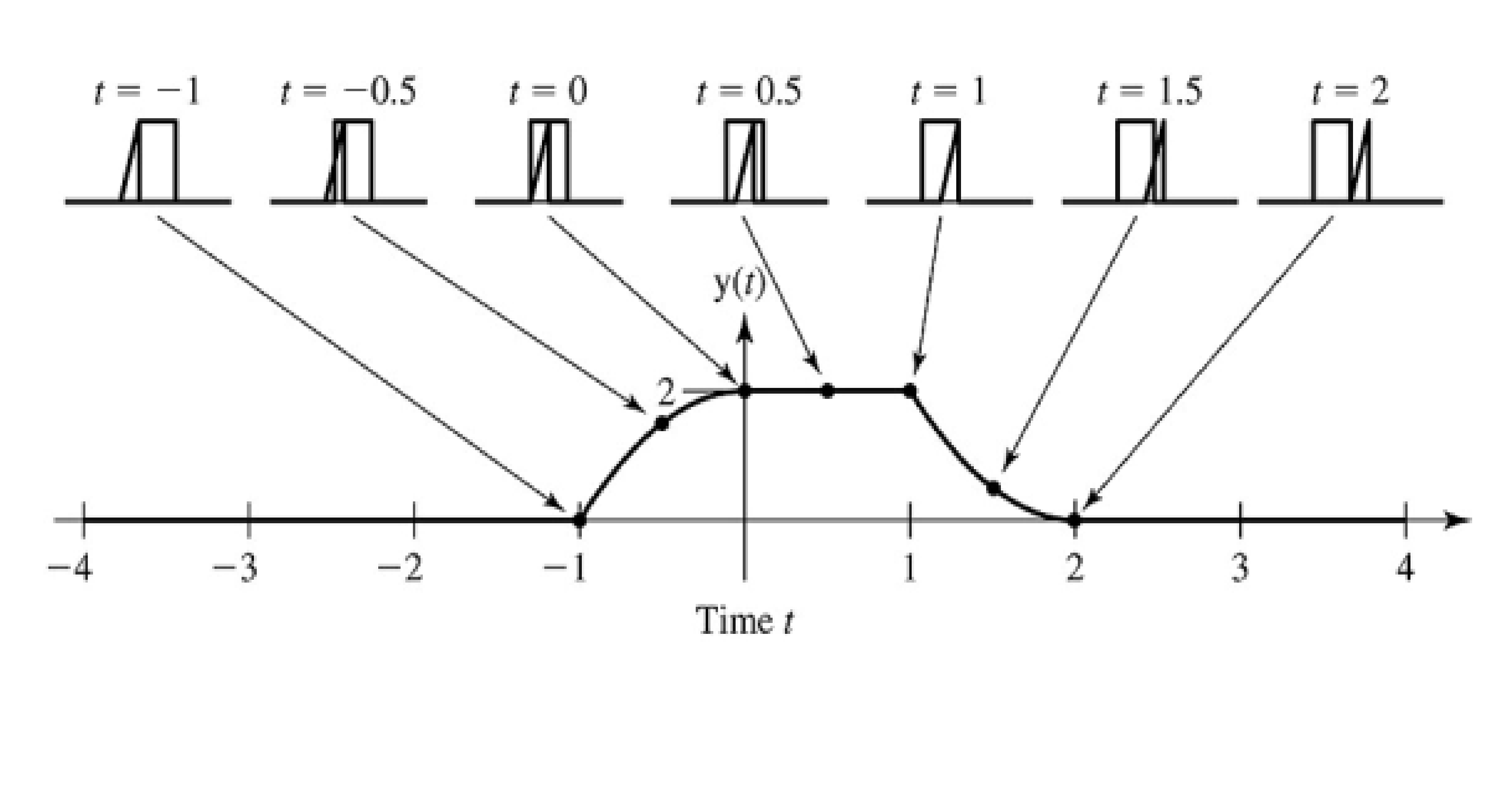
- Con un razonamiento análogo al caso de TD, podemos obtener una caracterización completa de un sistema LIT de TC en término de su respuesta al impulso unitario.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- *Integral de convolución o de superposición*

Interpretación gráfica de la convolución





t = −1
t = −0.5
t = 0
t = 0.5
t = 1
t = 1.5
t = 2
y(t)
2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
Time t

Propiedades de los sistemas LIT

- Conmutativa
  - $x[n]*h[n] = h[n]*x[n]$
  - $x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$
- Distributiva
  - $x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$
  - $x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$
- Asociativa
  - $x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*(h_1[n])*h_2[n]$
  - $x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$

Sistemas LIT descritos por ecuaciones diferenciales

- Son aquellos sistemas para los cuales la salida y la entrada están relacionadas por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.
- Ej.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Sistemas LIT descritos por ecuaciones diferenciales

- La solución consistirá de la suma de la solución particular y una solución a la homogénea (entrada cero).
- A la homogénea se la llama respuesta natural del sistema.
- Es necesaria por las condiciones iniciales.

Sistemas LIT descritos por ecuaciones diferenciales

- En general, una ecuación diferencial de orden *N*:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d\,t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d\,t^k}$$

- Para el caso que *N*=0

$$y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d\,t^k}$$

- y(t) es una función explícita.

Sistemas LIT descritos por ecuaciones de diferencias

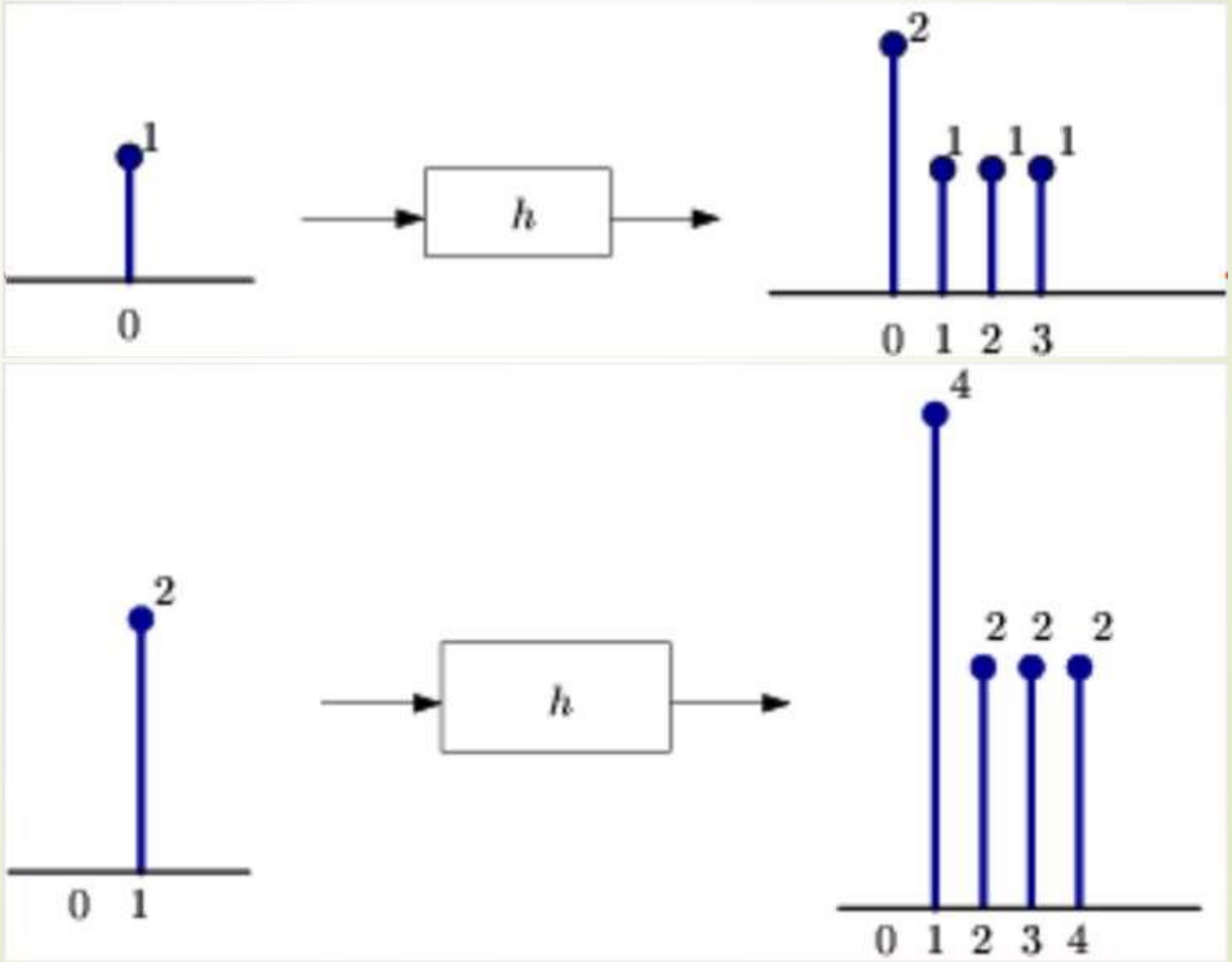
- Es la contraparte de TD.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

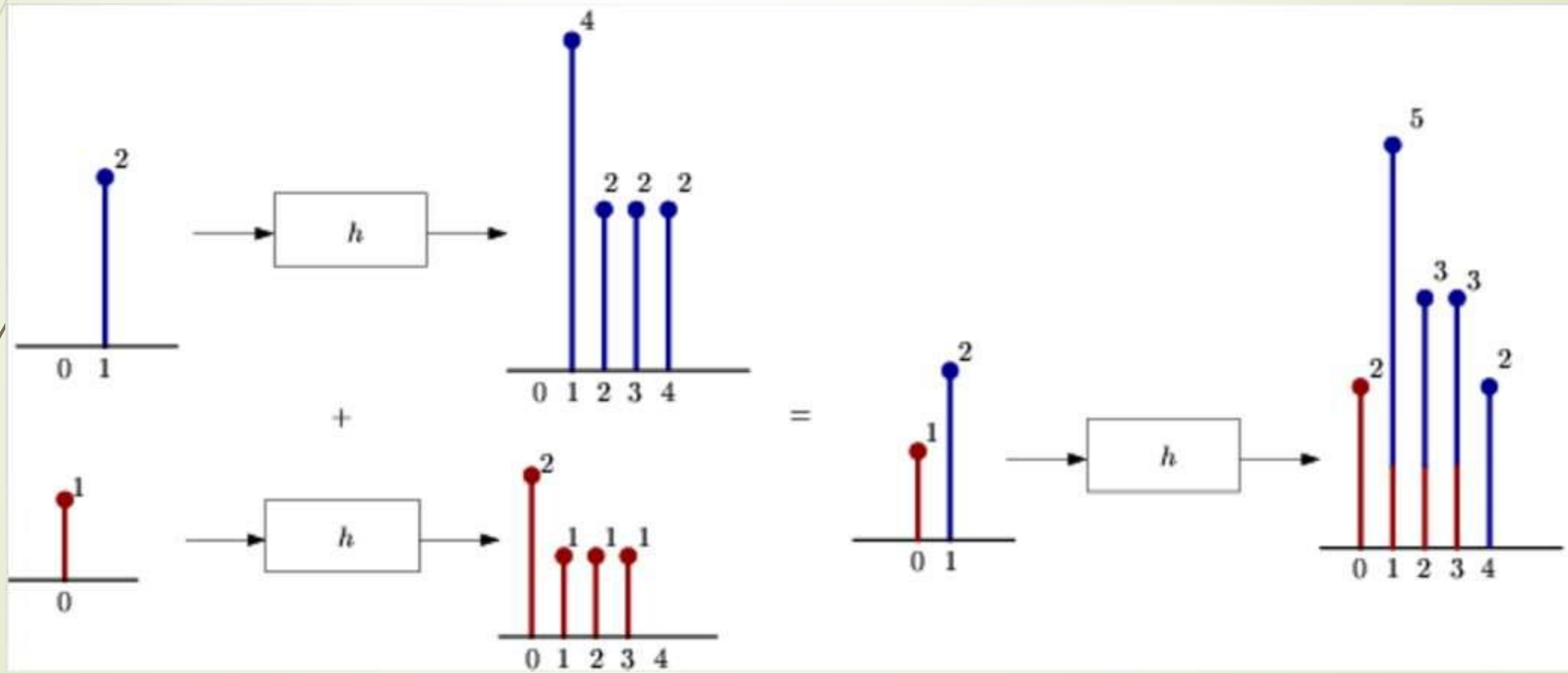
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$ Recursiva

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k]$$ No recursiva

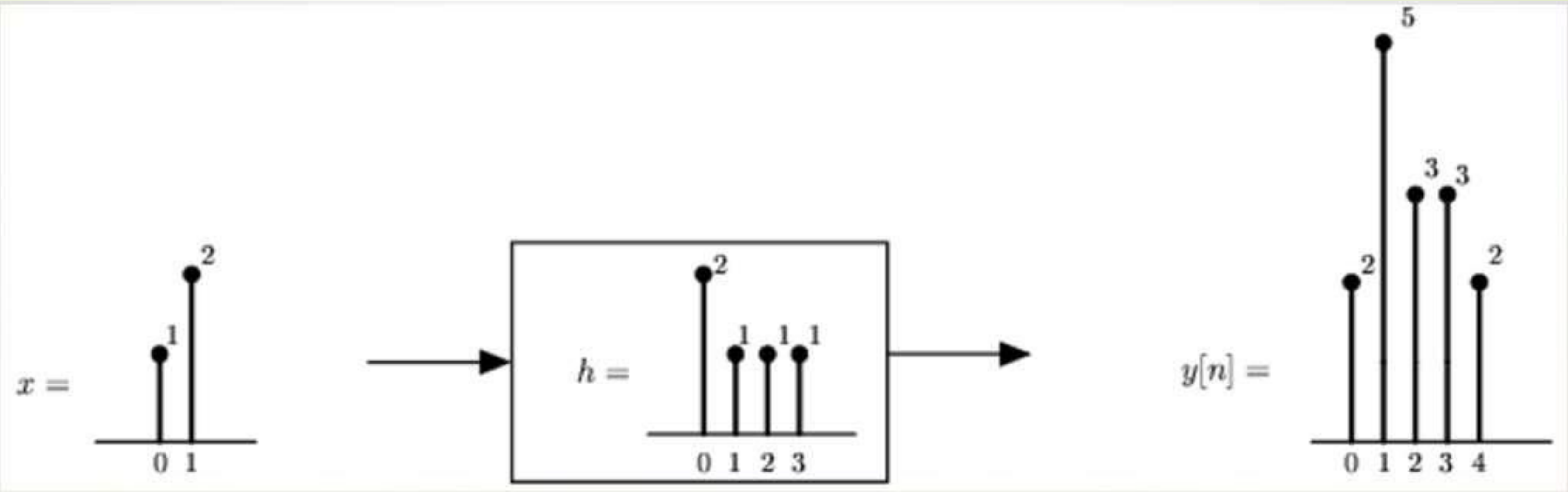
Ejemplo gráfico de superposición



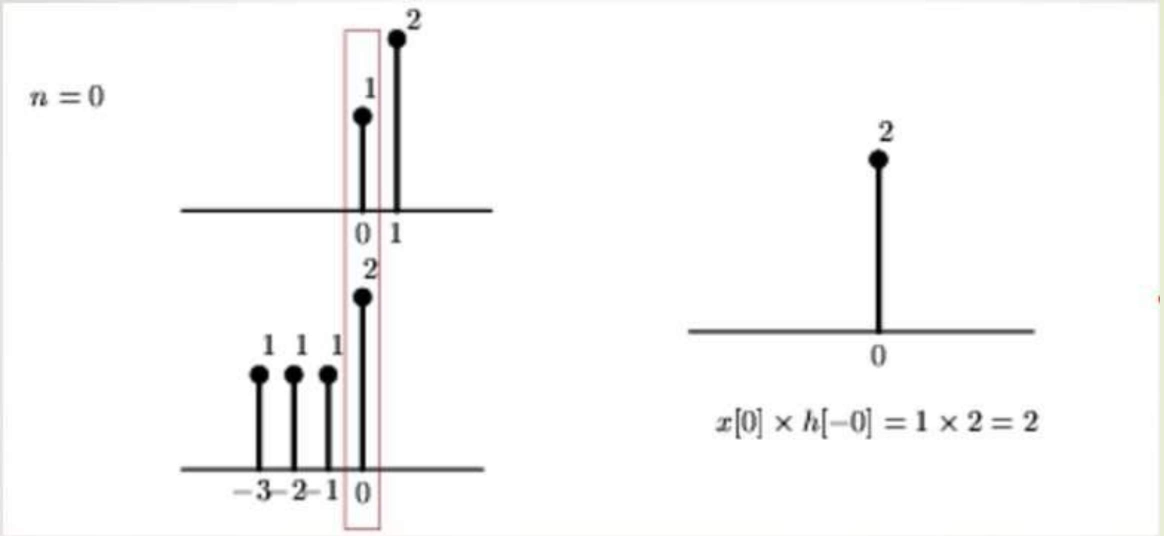
Ejemplo gráfico de superposición

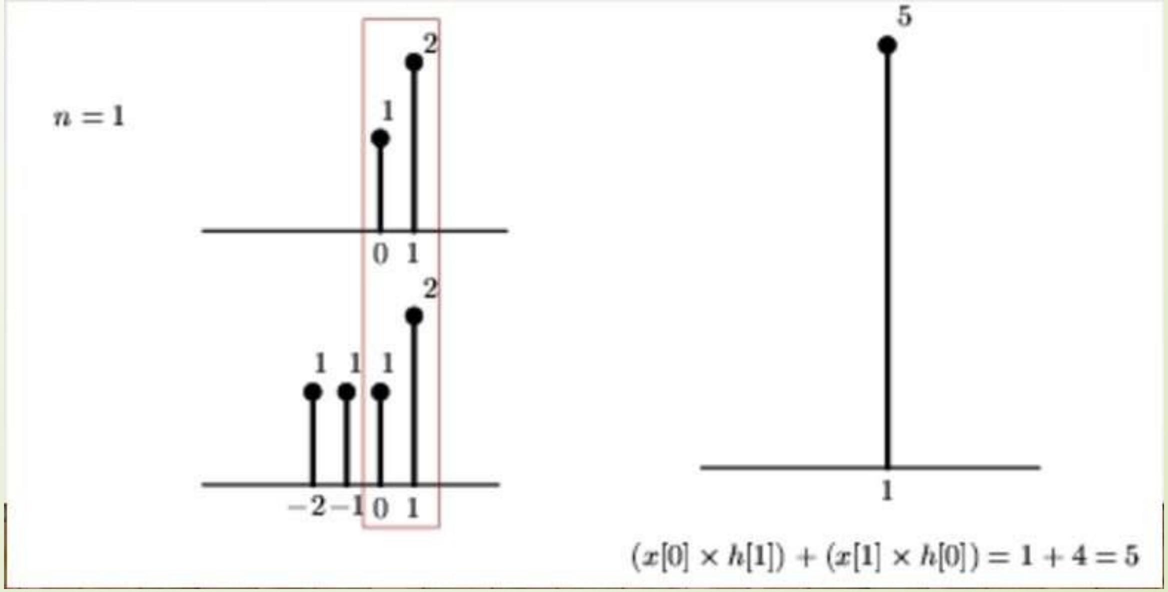


Ejemplo de convolución

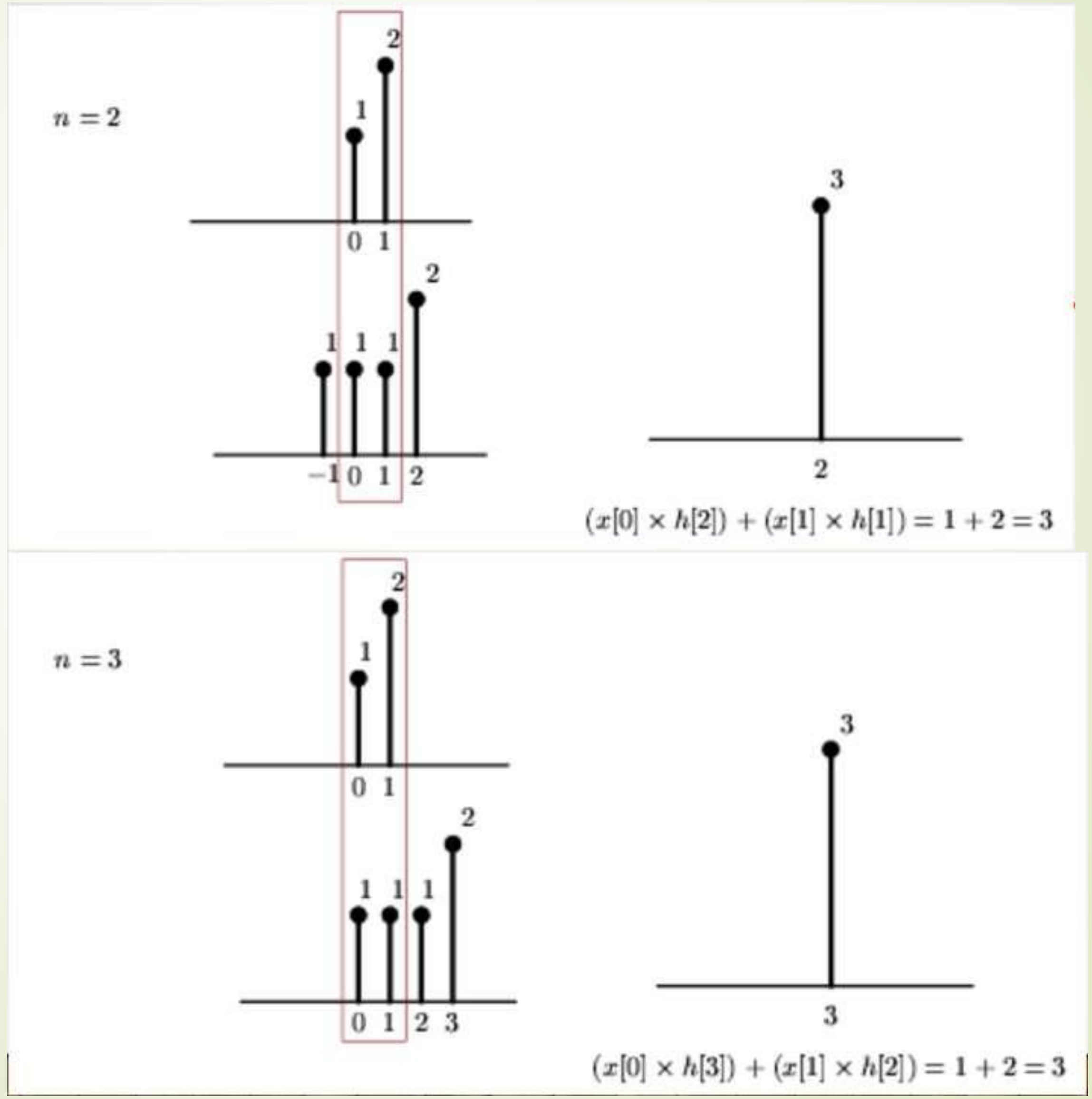


Ejemplo de convolución





Ejemplo de convolución



Ejemplo de convolución

… y así seguimos…