Análisis de Señales

Descripción matemática de señales

Señales

- Las señales son representaciones de un fenómeno físico.
- Las usamos para describir matemáticamente al fenómeno.
- Las señales (cuando sea posible) serán descriptas mediante funciones matemáticas.
- A lo largo del curso vamos a estudiar a estas señales/funciones y cómo son afectadas al ser transmitidas y/o procesadas por distintos sistemas (ya definiremos qué es un sistema).

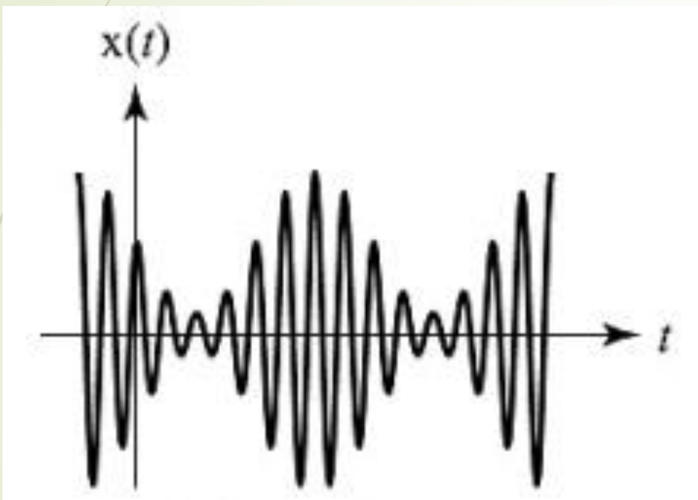
Señales

- Las señales son funciones de variables independientes, portadoras de información.
- Señales eléctricas: tensiones y corrientes en un circuito.
- Señales acústicas: audio.
- Señales de video: variación de la intensidad o color.
- Señales biológicas: secuencias de bases de un gen.

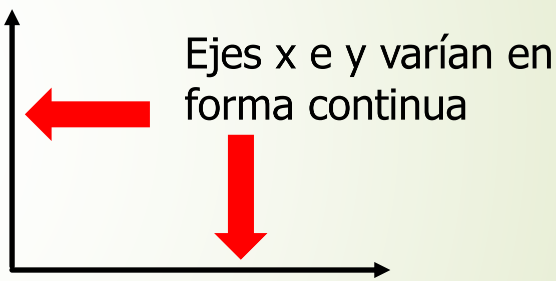
Clasificación según variables independientes

- Pueden ser continuas.
- Pueden ser discretas.
- Pueden ser 1-D, 2-D.....N-D.
- Para este curso: tiempo. Var. Indep.1-D.
- tiempo continuo (TC) $x(t)$ ➡ t toma valores continuos.
- tiempo discreto (TD) $x[n]$ ➡ n toma valores enteros.

Señales en TC: analógicas

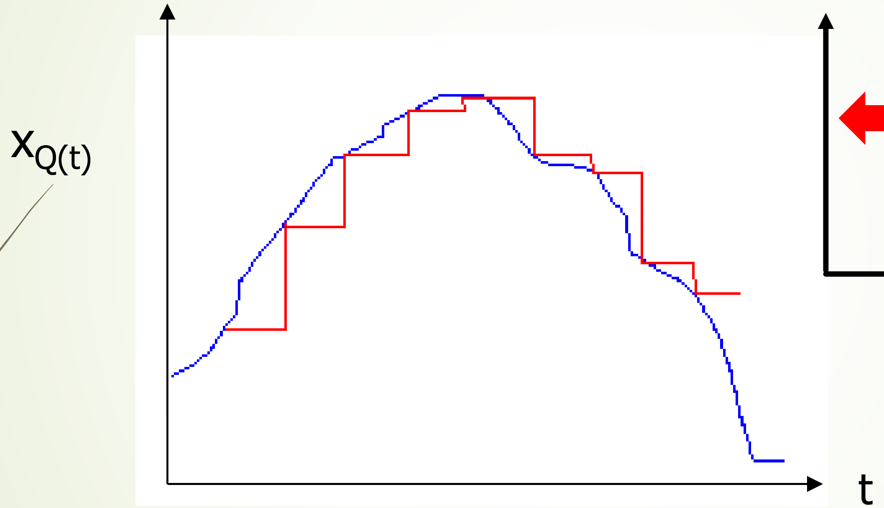


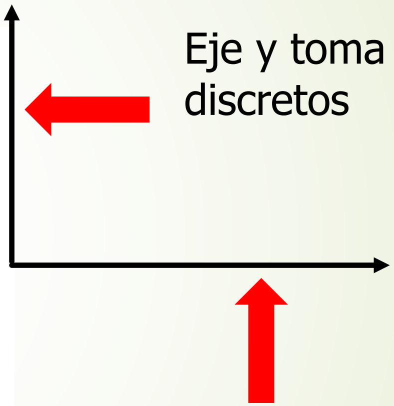
Amplitud y tiempo continuos -
x(t) y t toman valores continuos



La mayoría de las señales del mundo físico son del tipo TC. Por ej. tensión, corriente, presión, temperatura y velocidad. A escala macroscópica son de amplitud continua.

Señales en TC: cuantizadas



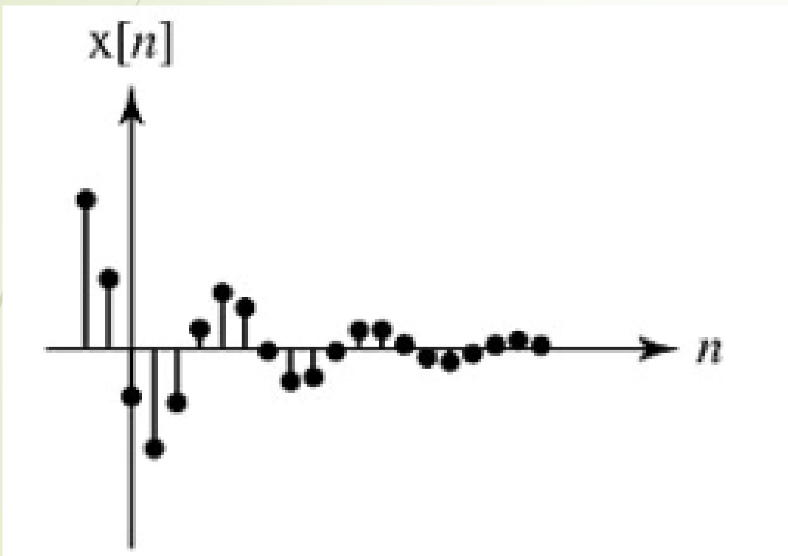


Eje y toma valores discretos

Eje x varía en forma continua

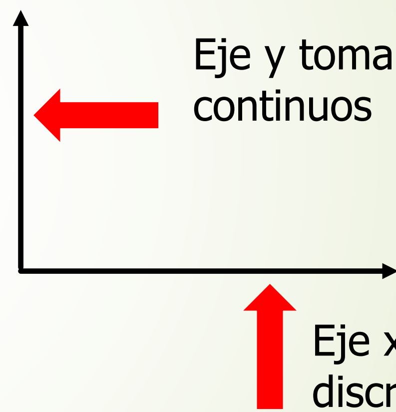
Tiempo continuo, amplitud discreta. La amplitud solo toma determinados valores.

Señales en TD: muestreadas



Muestreadas: tiempo discreto y amplitud continua

X[n] valores continuos y n valores enteros



Eje y toma valores continuos

Eje x varía en forma discreta

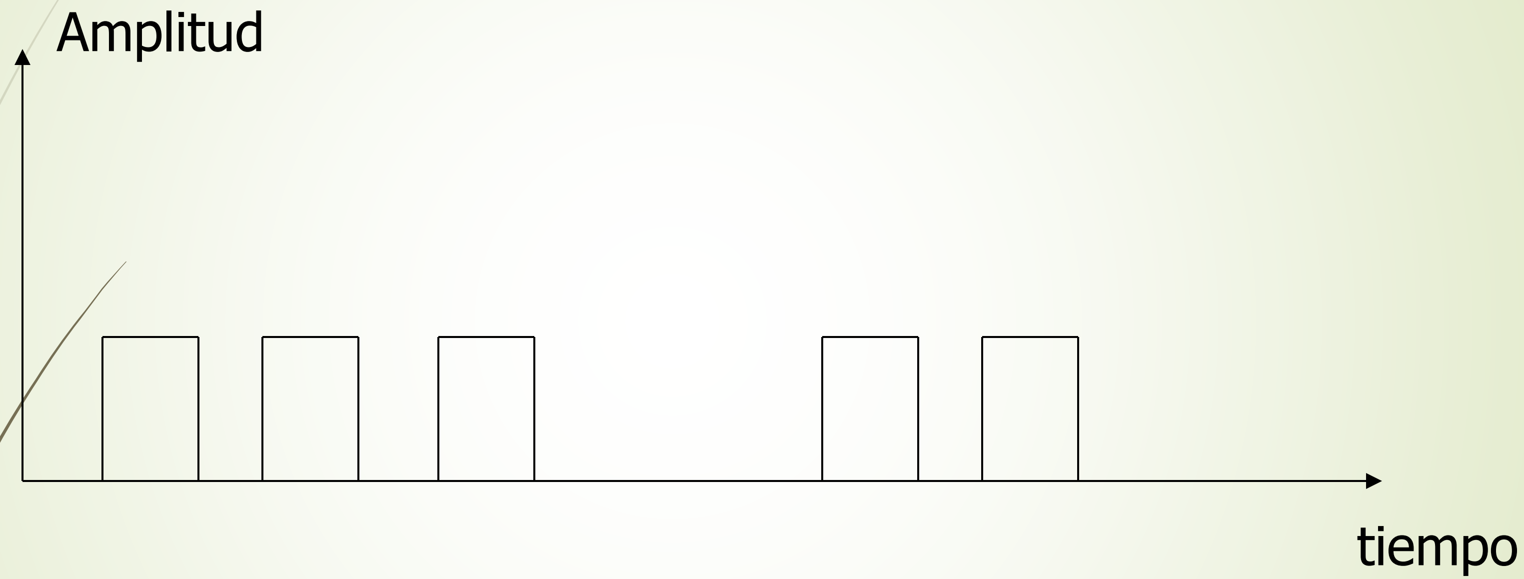
Señales en TD en la naturaleza

- Secuencia de bases ADN
- Población de especies

En TD hechas por el hombre

- Imagen digital
- Interés bancario

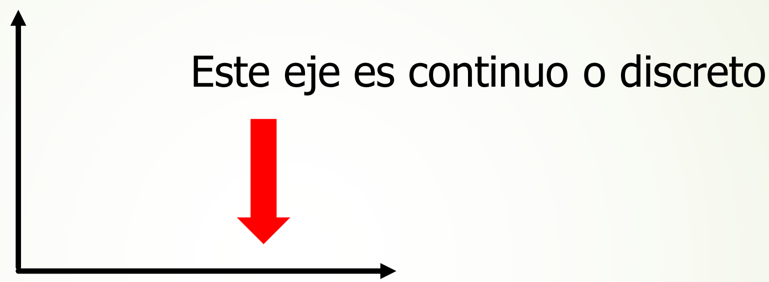
Señales en TD: digitales



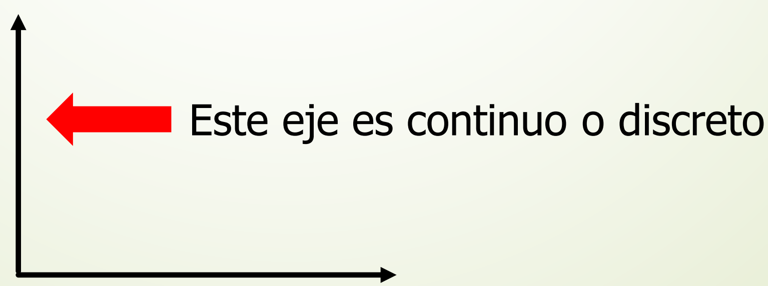
Discreta en amplitud y en tiempo

Resumen

Tiempo continuo o discreto:

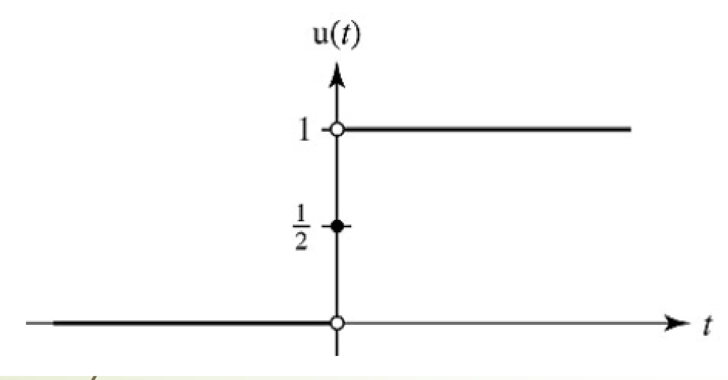


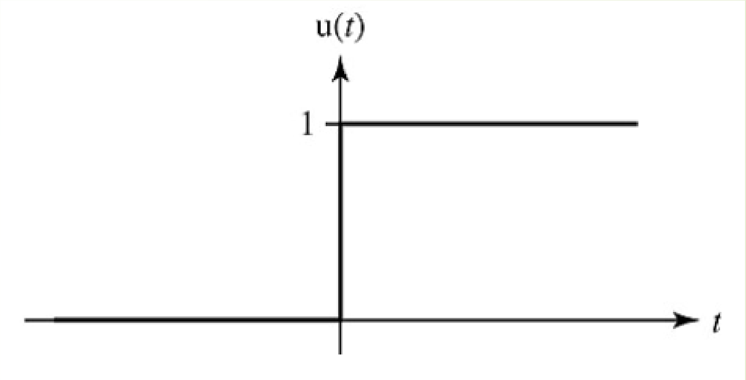
Analógica o digital:



FUNCIONES EN TIEMPO CONTINUO

Función escalón unitario o Heaviside





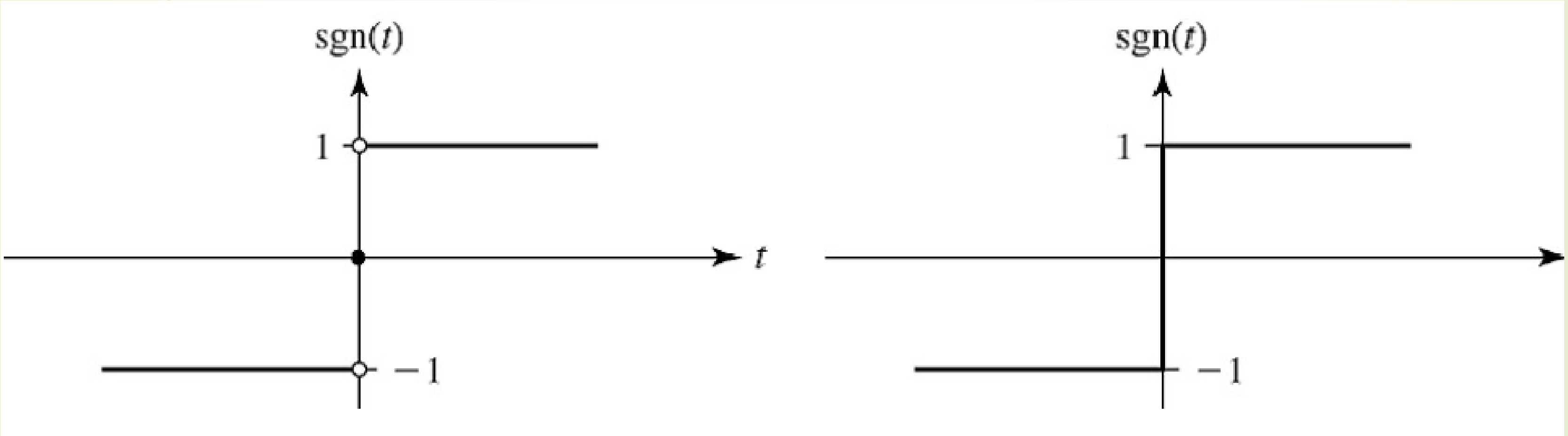
$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ \frac{1}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Función escalón unitario o Heaviside

- Por ejemplo al cerrar un interruptor y conectar una fuente de tensión continua.
- Si bien las dos funciones anteriores son distintas, una integral definida en cualquier intervalo da el mismo resultado.
- En general utilizamos la de la derecha.
- Ningún proceso físico real puede cambiar una cantidad finita en tiempo cero.
- Ambas funciones tienen el mismo efecto en un sistema físico real.

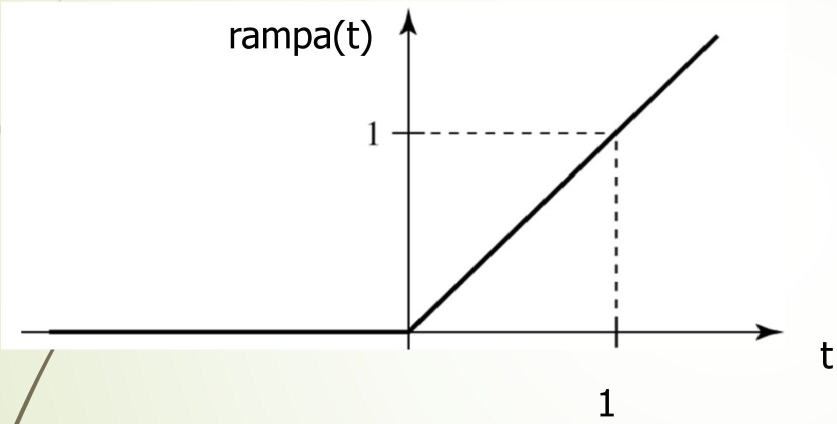
Función signo



$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

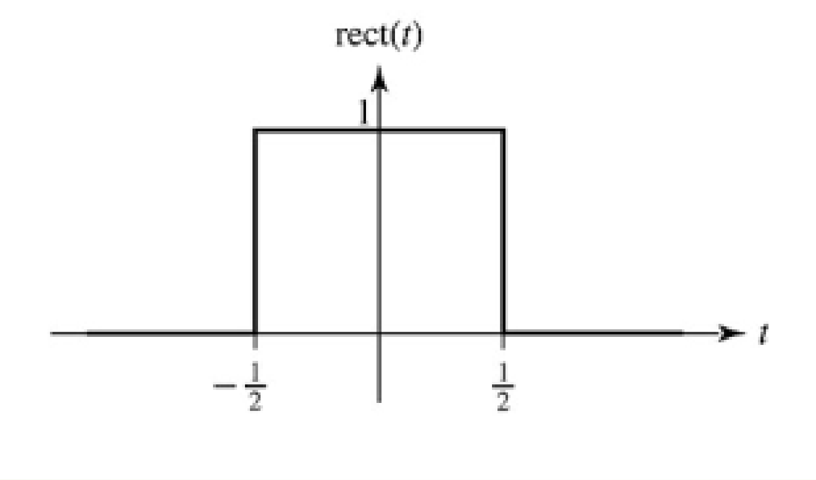
Función rampa unitaria



La función rampa en TC es la integral de la función escalón unitario

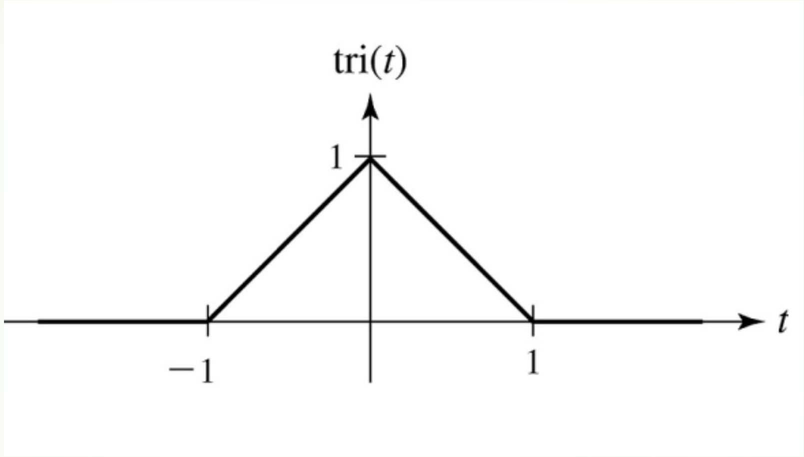
$$rampa(t) = \begin{Bmatrix} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t)$$

Función rectángulo unitario o pulso



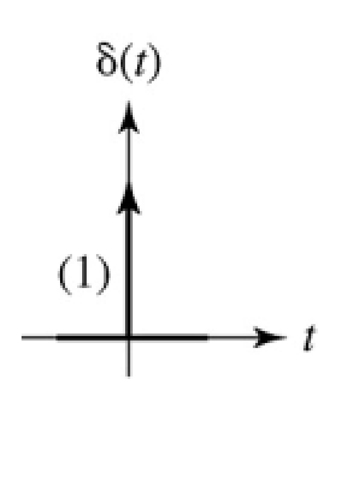
$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Función triángulo unitario

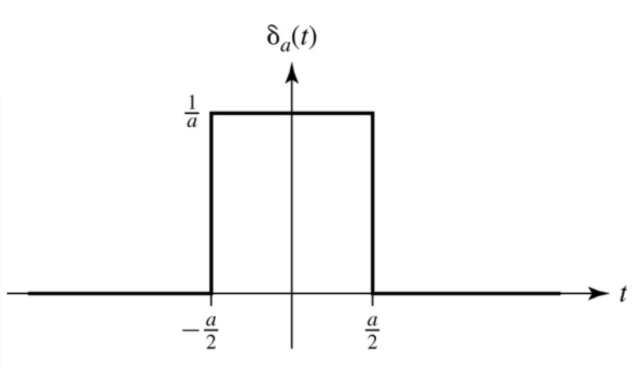


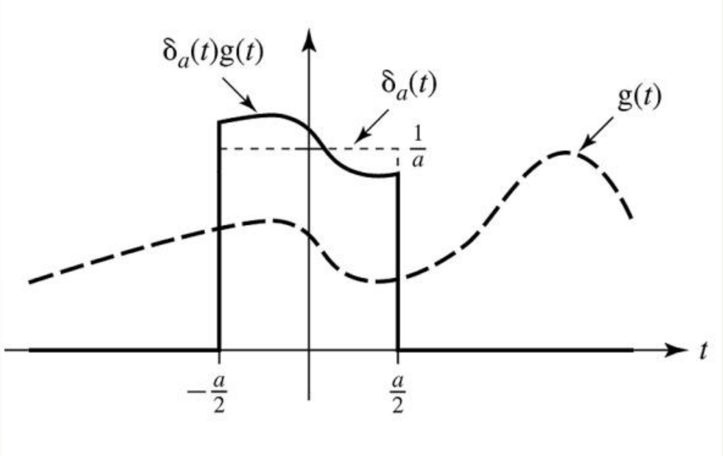
$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Función impulso unitario



Es una función “rara”. En realidad no es una función. Es cero en todos lados salvo en cero y tiene amplitud infinita pero área 1 !!!





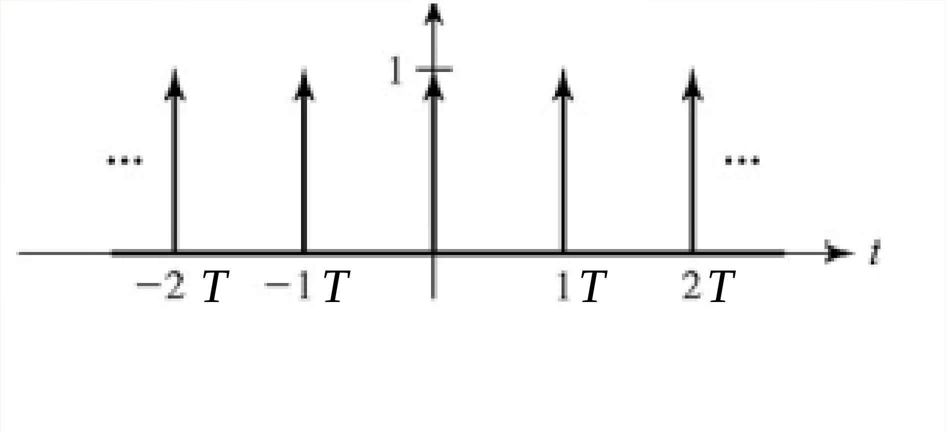
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) g(t)\, dt = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(t)\, dt$$

$$\lim_{a \to 0} A = g(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dt = g(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} . a = g(0)$$

Función impulso unitario

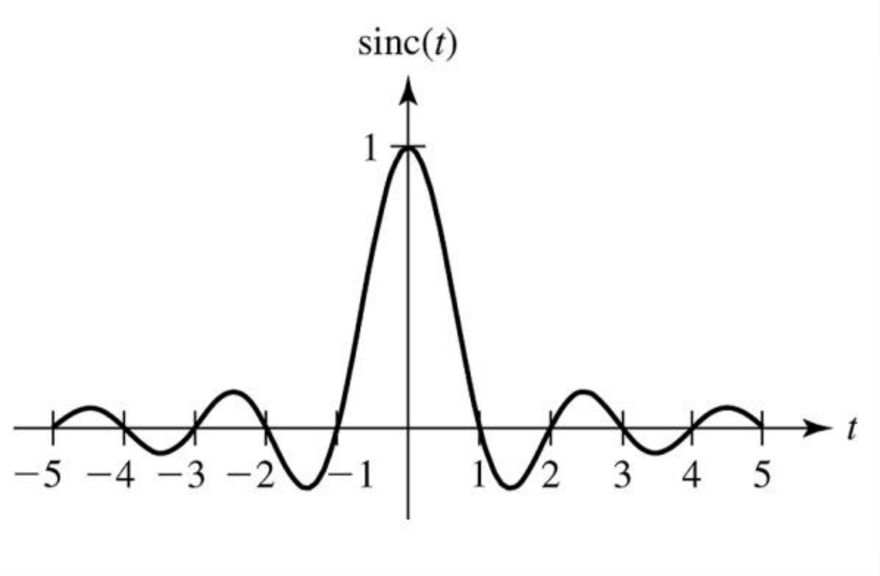
- Por ejemplo una fuerza muy grande que actúa sobre un cuerpo en un tiempo muy corto.
- Ningún proceso físico puede cambiar una cantidad infinita en tiempo cero.
- Puede interpretarse como la derivada de la función escalón o aquella como la integral del impulso.
- Más adelante veremos la utilidad de que puede "extraer" los valores de una función en un punto.

Tren de impulsos unitarios



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Función sinc unitaria

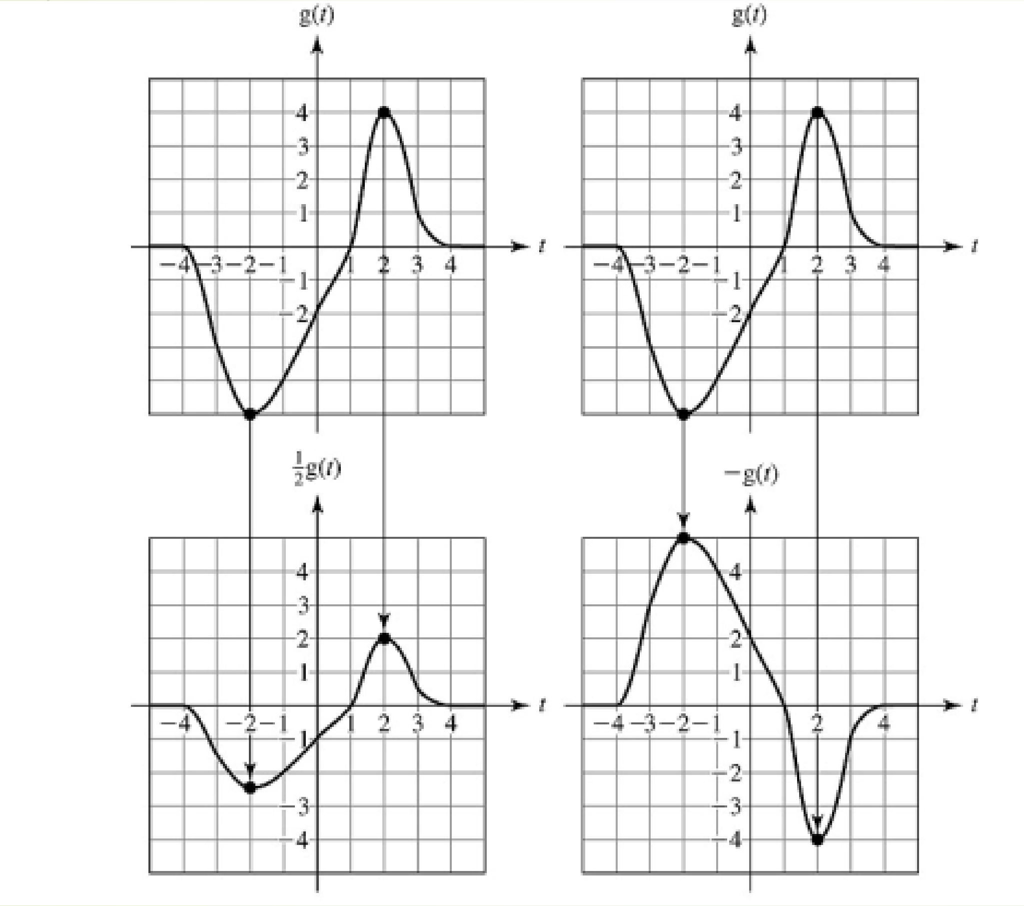


$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

Transformaciones de la variable independiente

- Escalamiento de amplitud
- Desplazamiento en el tiempo
- Escalamiento en el tiempo
- Transformaciones múltiples

Escalamiento en amplitud



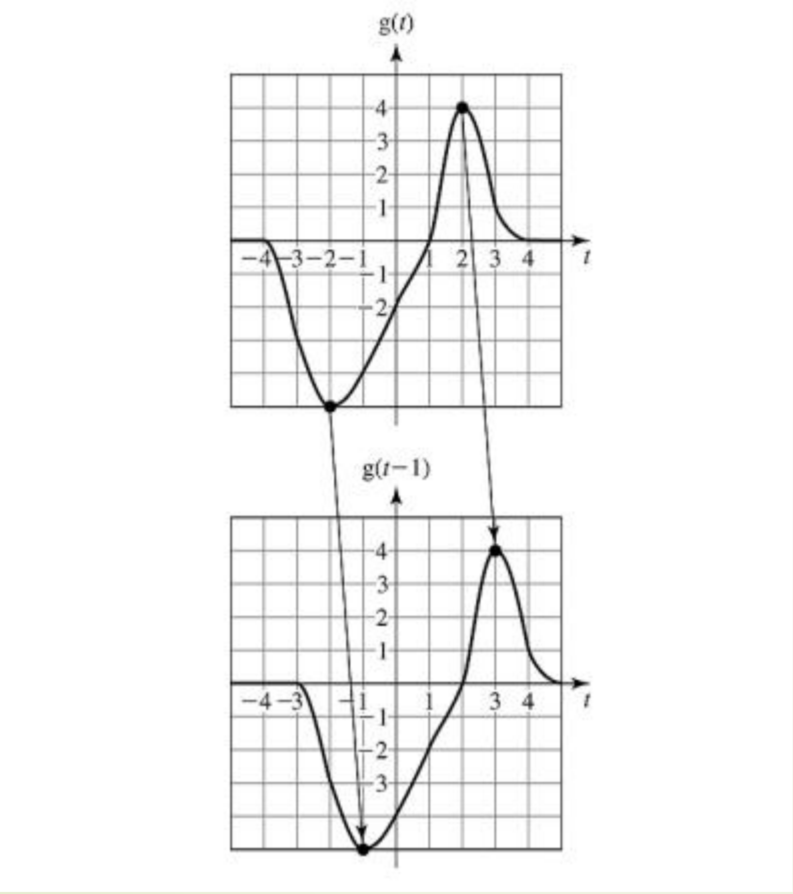
$g(t) \longrightarrow Ag(t)$

Para cada valor de t se multiplica a g(t) por A.
A puede ser + ó -, mayor ó menor que 1.

Escalamiento en amplitud

Valor de A	Transformación en g(t)
$\|A\| > 1$	Amplifica
$0 < \|A\| < 1$	Atenúa
$A < 0$	Invierte

Desplazamiento en el tiempo



$g(t) \longrightarrow g(t-t_0)$

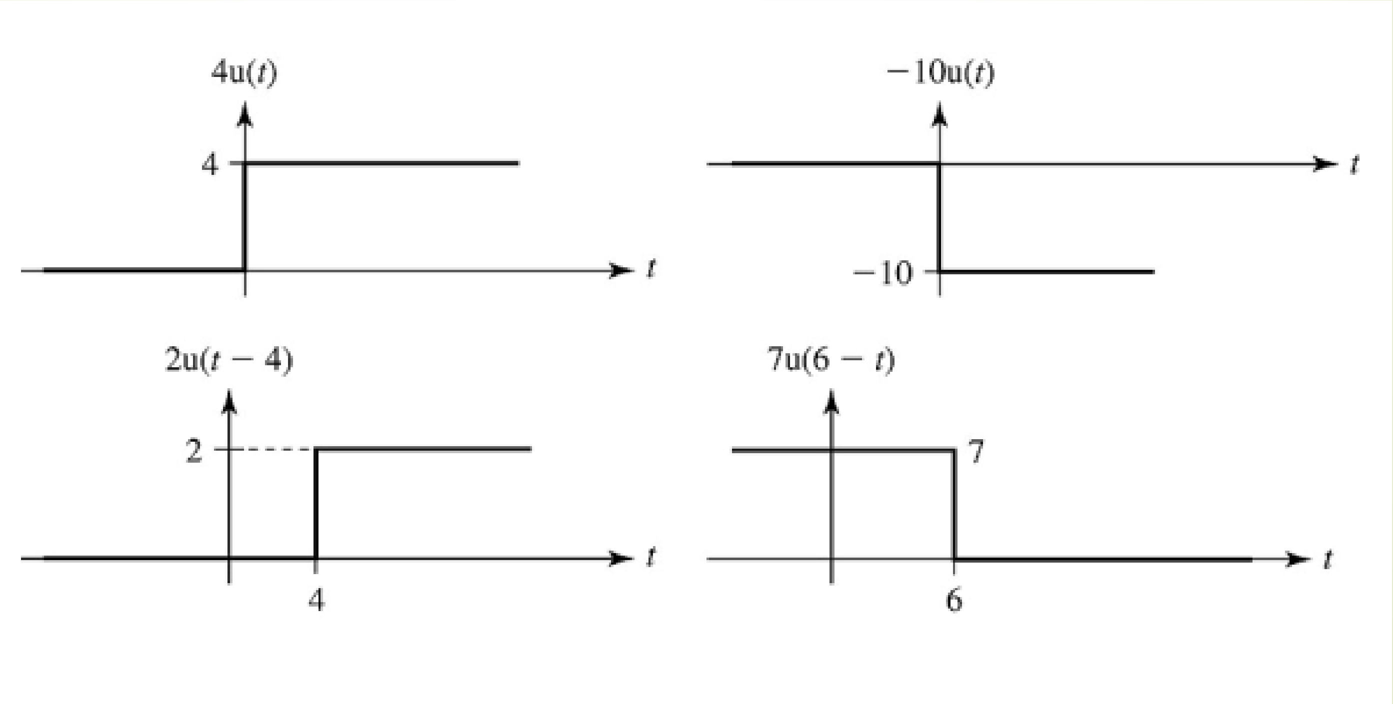
Podemos pensar como un cambio de variables a una nueva t_n

$t = t_n - t_0 \quad t_n = t + t_0$

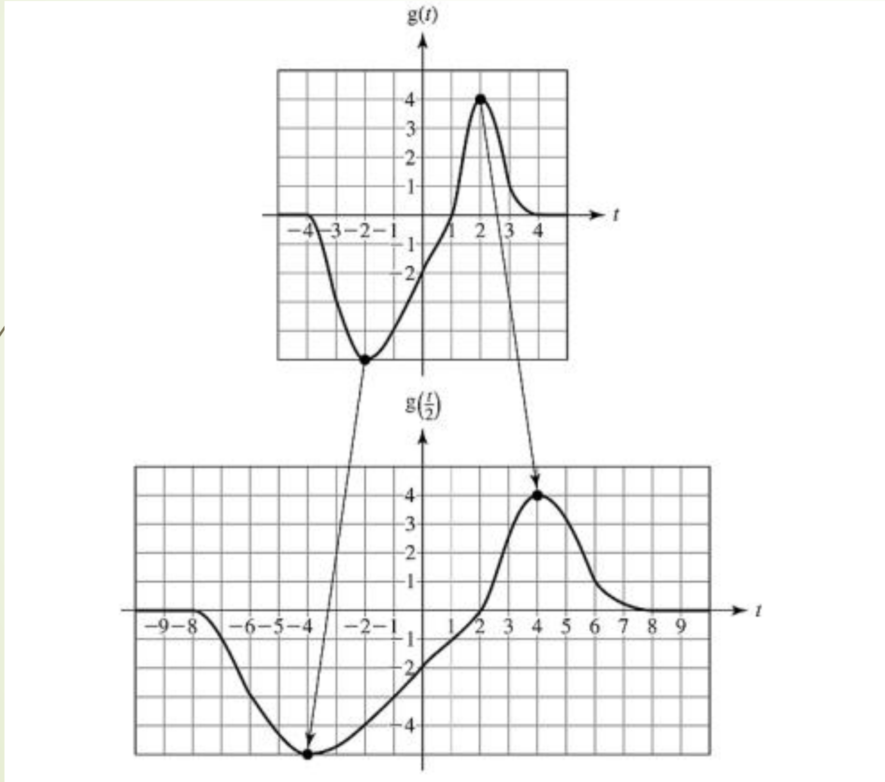
Por ejemplo si $t_0 = 1$

$t_n = t + 1$

Ej. Funciones escalón transformadas



Escalamiento en el tiempo



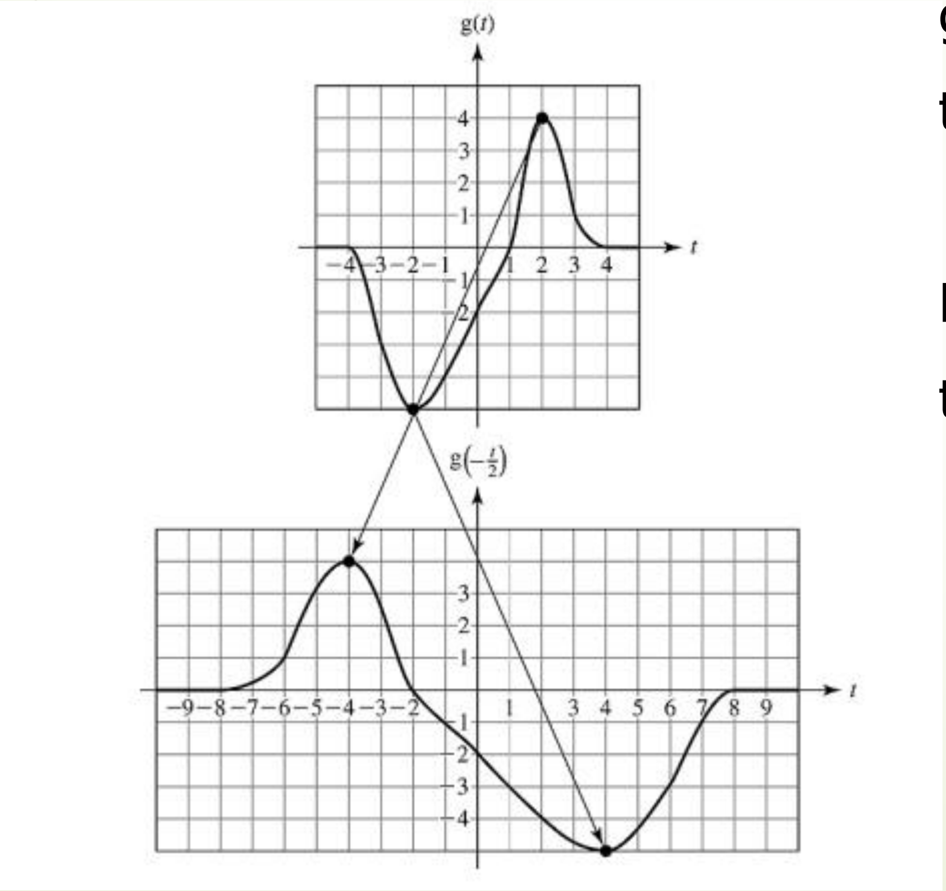
$g(t) \longrightarrow g(at)$

$t = at_n \quad t_n = t/a$

Por ejemplo si $a = 1/2$

$t_n = 2t$

Escalamiento en el tiempo



g(t) g(at)

$t = at_n$ $t_n = t/a$

Por ejemplo si a = -1/2

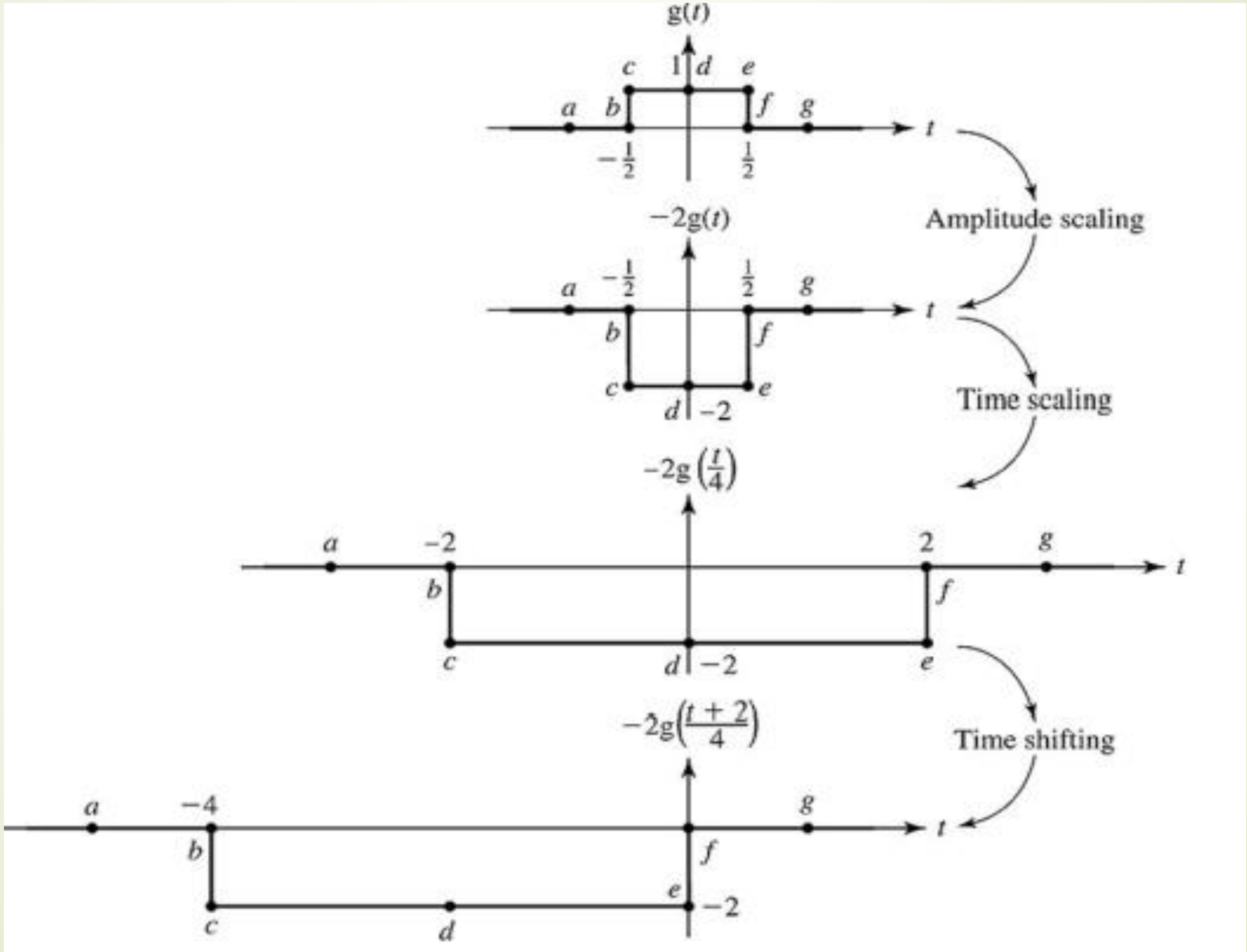
$t_n = -2t$

Escalamiento en el tiempo

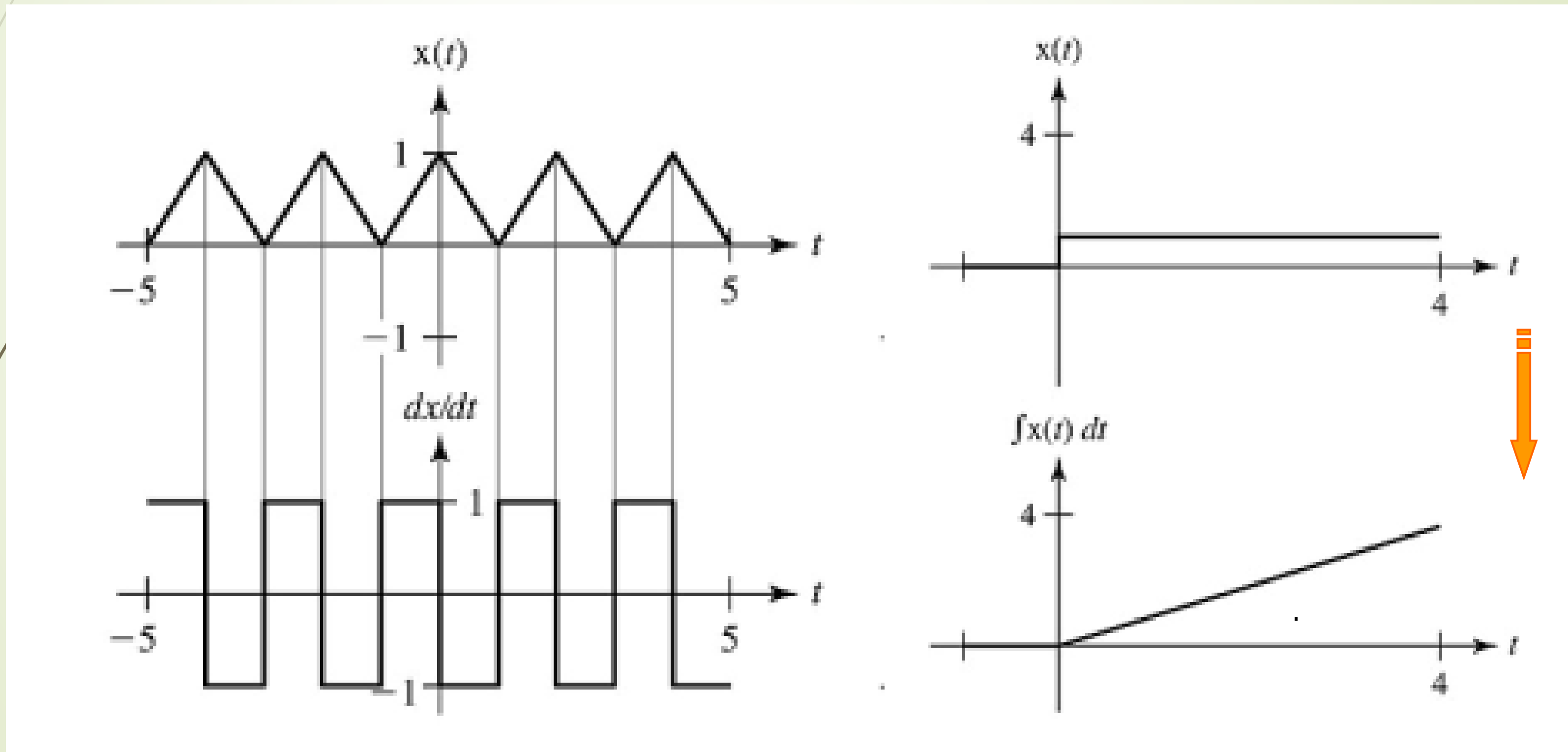
El escalamiento en tiempo de una señal corresponde a comprimir o expandir la señal en el tiempo, esto es, se escala la variable independiente mediante cambios lineales en la misma.

Valor de a	Transformación en g(t)
$a > 1$	Señal comprimida
$0 < a < 1$	Señal expandida
$a < 0$	Invierte y escala

Transformaciones múltiples



Diferenciación e Integración

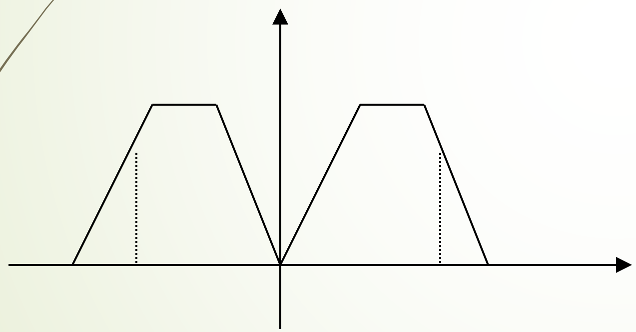


Funciones Par e Impar en TC

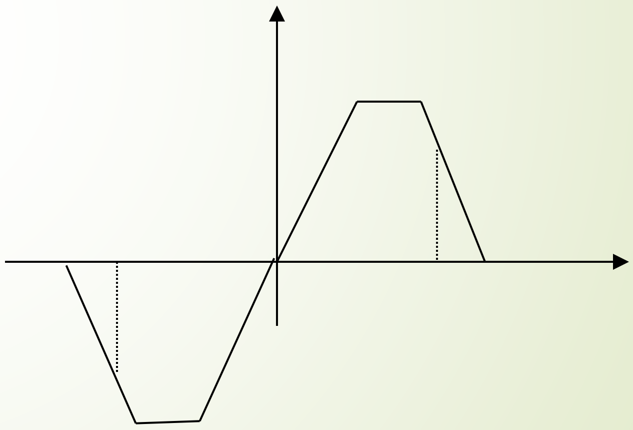
- Función par ➡ $g(t)=g(-t)$
- Función impar ➡ $g(t)=-g(-t)$
- Una forma de reconocer una función par, el eje de las ordenadas es un espejo.
- Para una función impar las mismas dos imágenes son en espejo negativas una de otra.

Funciones Par e Impar en TC

Par



Impar



Ni Par Ni Impar

- ✓ Cualquier función g(t), incluso si no es par ni impar, puede expresarse como la suma de sus partes par e impar:

$$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} \qquad g_o(t) = \frac{g(t)-g(-t)}{2}$$

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

Funciones periódicas en TC

- Una función $g(t)$ es periódica si
- $$g(t)=g(t+nT)$$
- Para cualquier valor entero de n donde T es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental T_o.
- La frecuencia fundamental $f_o=1/T_o$ ciclos/seg ó Hz (Hertz)
- La frecuencia fundamental en radianes por segundo $\omega_o=2\pi f_o$.

Ej. $f(t)=\cos w_1 t + \cos w_2 t$

- Si la función es periódica con período T, entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que
- $w_1 T=2\pi m$ $\qquad w_1/w_2=m/n$
- $w_2 T=2\pi n$
- Es decir la relación w_1/w_2 debe ser un número racional.

Señales periódicas: exponencial compleja y sinusoidal

- Consideremos la siguiente exponencial compleja :

$$x(t) = e^{j w_0 t}$$

- Propiedad importante: es periódica

$$e^{j w_0 t} = e^{j w_0 (t+T)} = e^{j w_0 t} e^{j w_0 T}$$

- Para ser periódica

$$e^{j w_0 T} = 1$$

Señales exponenciales y sinusoidales

- ✓ Si $\omega_0 = 0$ entonces $x(t) = 1$ periódica para cualquier valor de T.

- ✓ Si $\omega_0 \neq 0$ entonces el período fundamental T_0, el valor positivo más pequeño de T que cumple con:

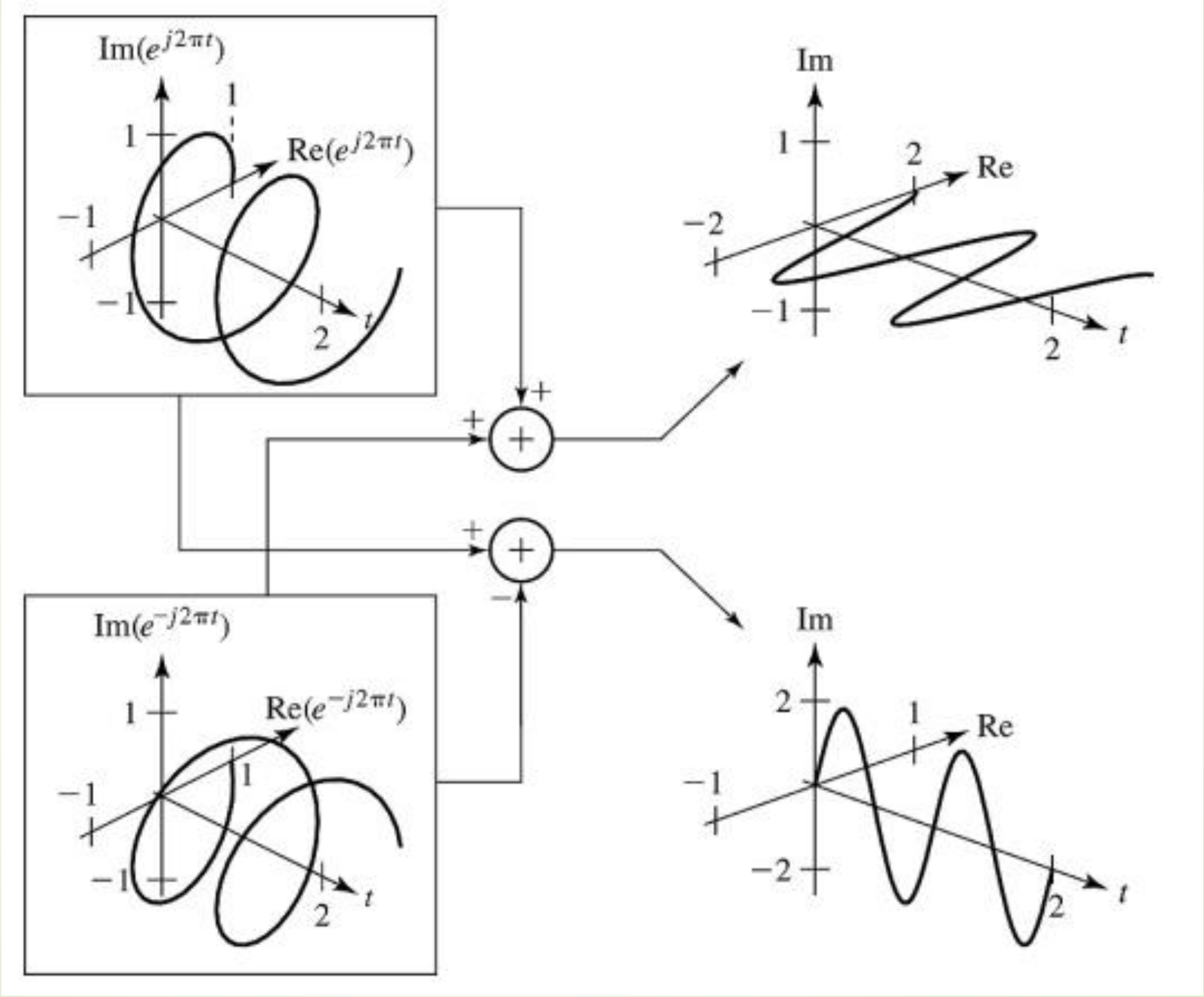
$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

Relación: exponencial compleja ➡ señal senoidal

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\,sen\,\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = Re\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$

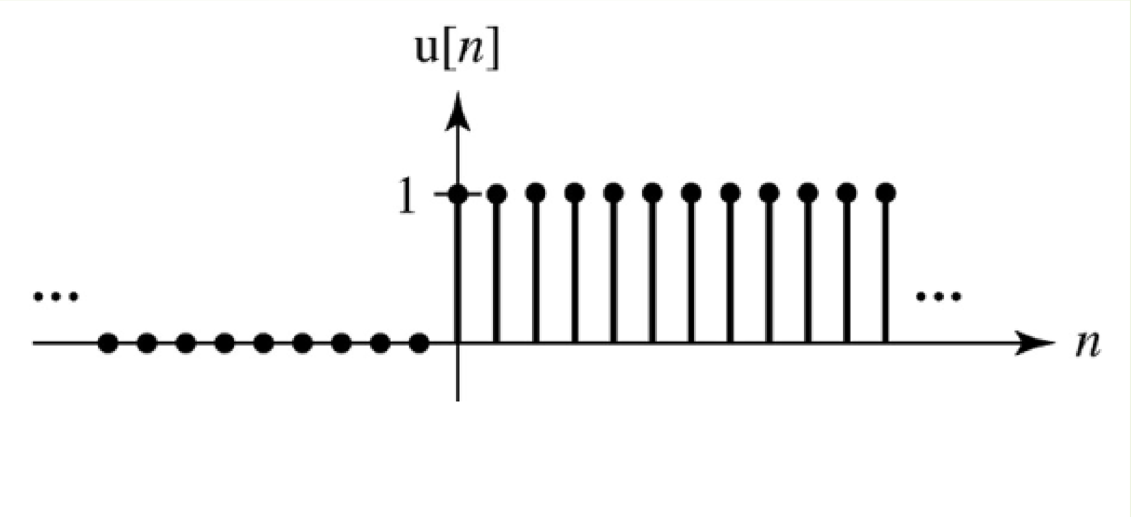
$$sen\,\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = Im\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$



$\mathrm{Im}(e^{j2\pi t})$
$\mathrm{Re}(e^{j2\pi t})$
$\mathrm{Im}(e^{-j2\pi t})$
$\mathrm{Re}(e^{-j2\pi t})$
Im
Re
t

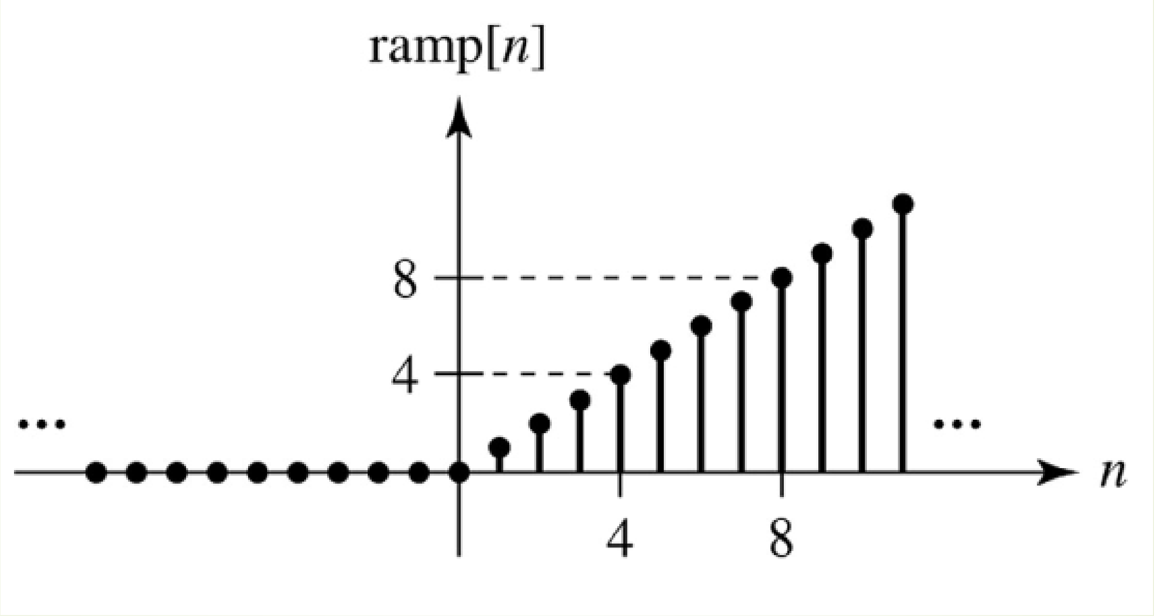
FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Secuencia escalón unitario



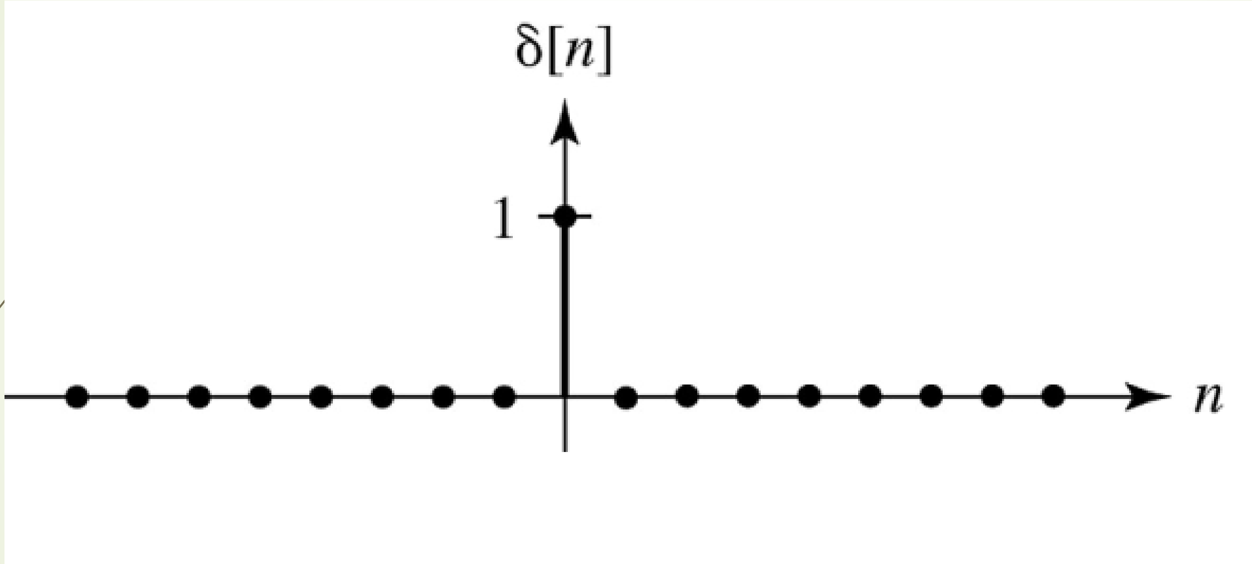
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Función rampa unitaria



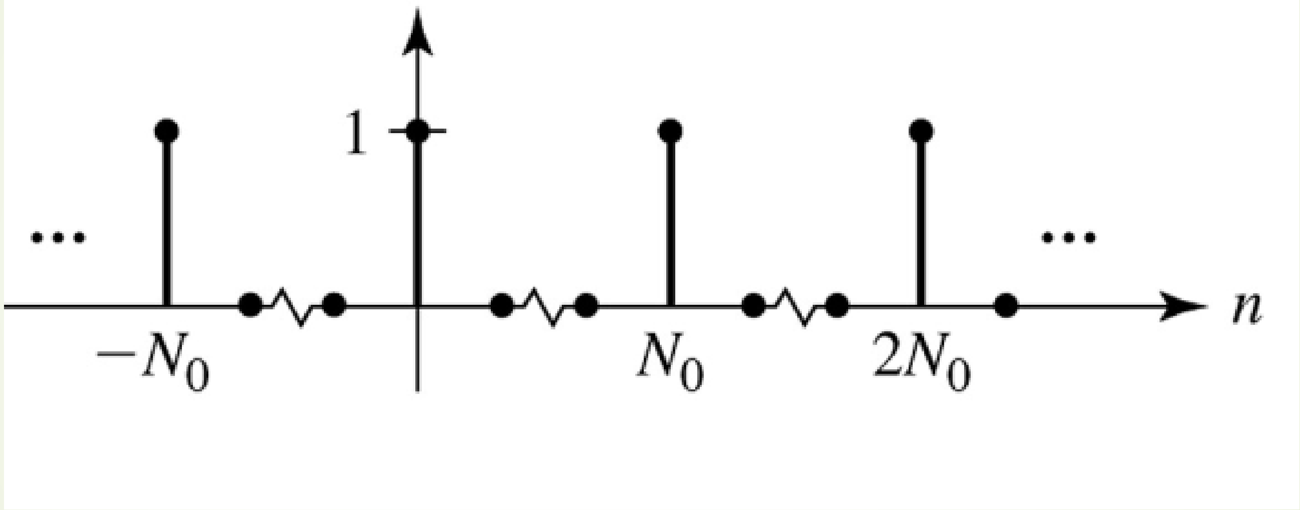
$$rampa[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Impulso unitario



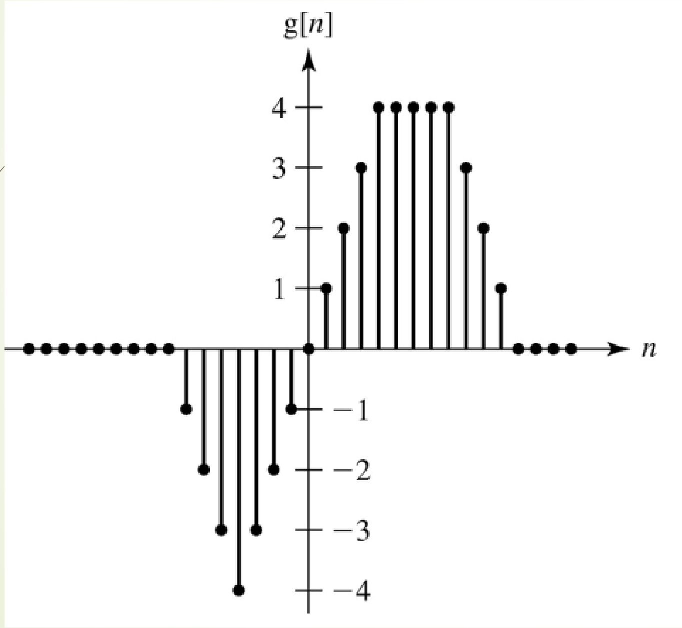
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

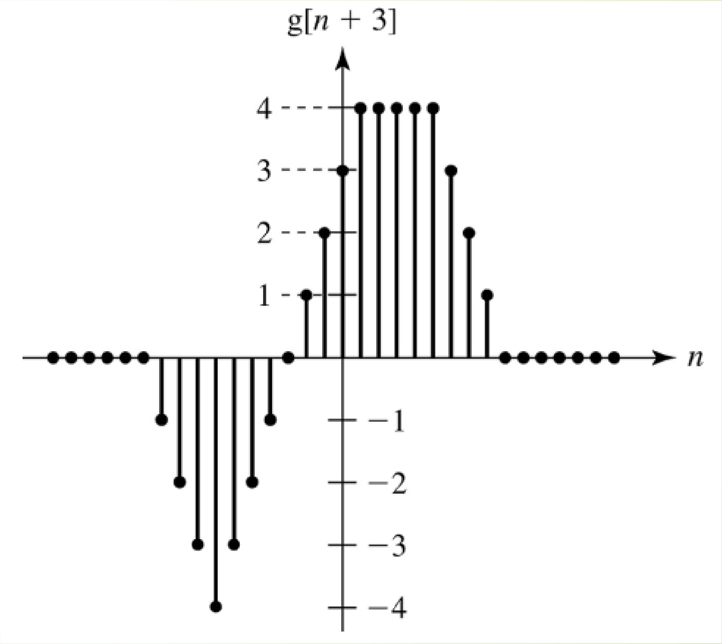
Tren de impulsos unitarios



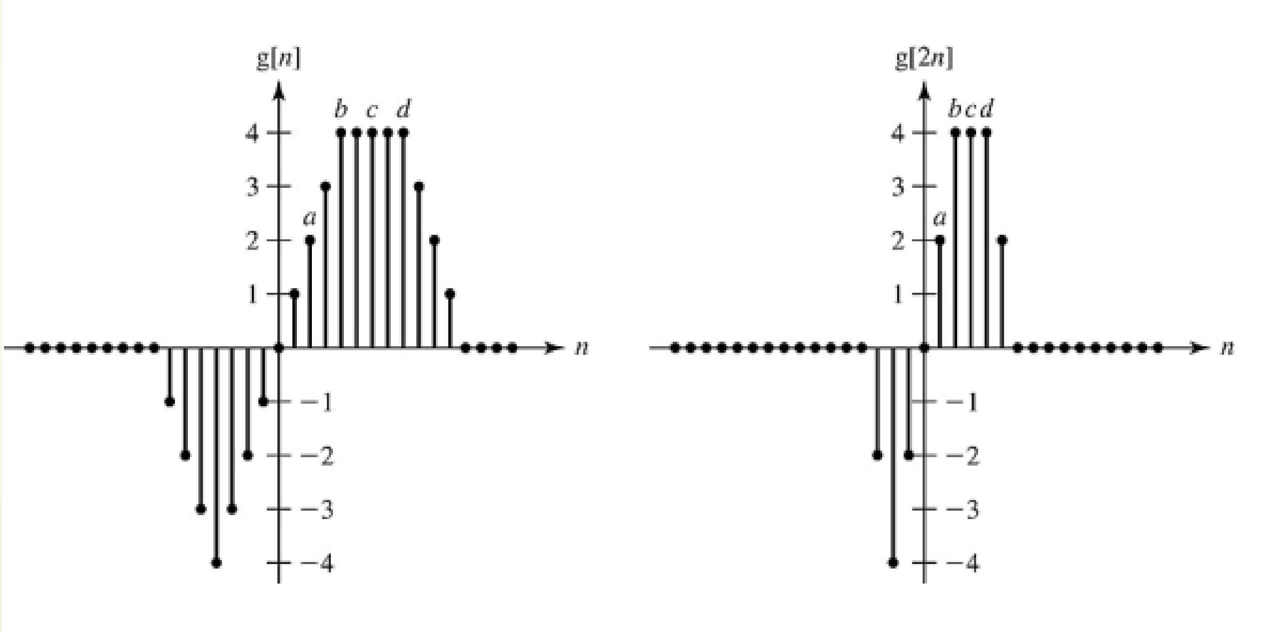
$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN_0]$$

Desplazamiento en TD





Escalamiento en TD



Funciones Par e Impar en TD

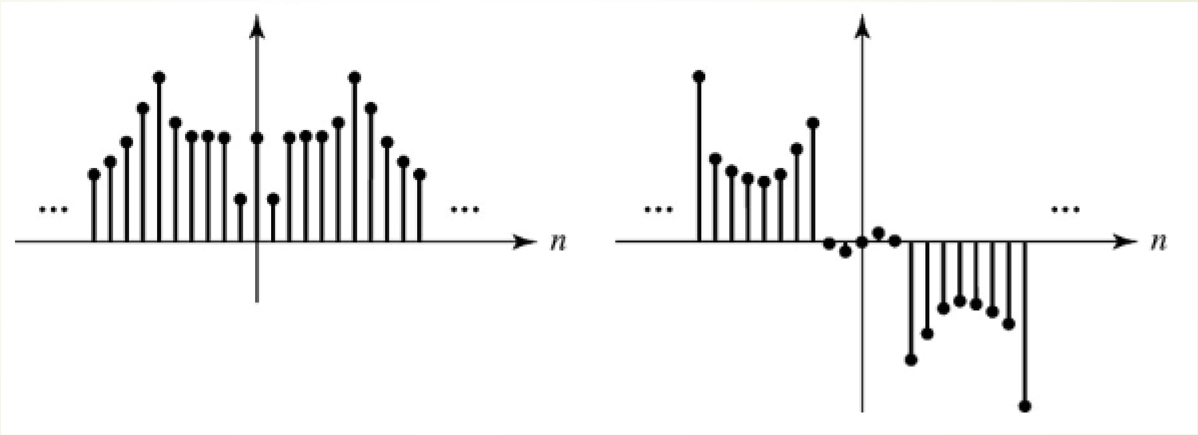
- Es par si ➡ g[n]=g[-n]
- Es impar si ➡ g[n]=-g[-n]
- Igual que en TC, definimos:

$$g_e[n] = \frac{g[n] + g[-n]}{2} \qquad g_o[n] = \frac{g[n] - g[-n]}{2}$$

Ejemplos

Par

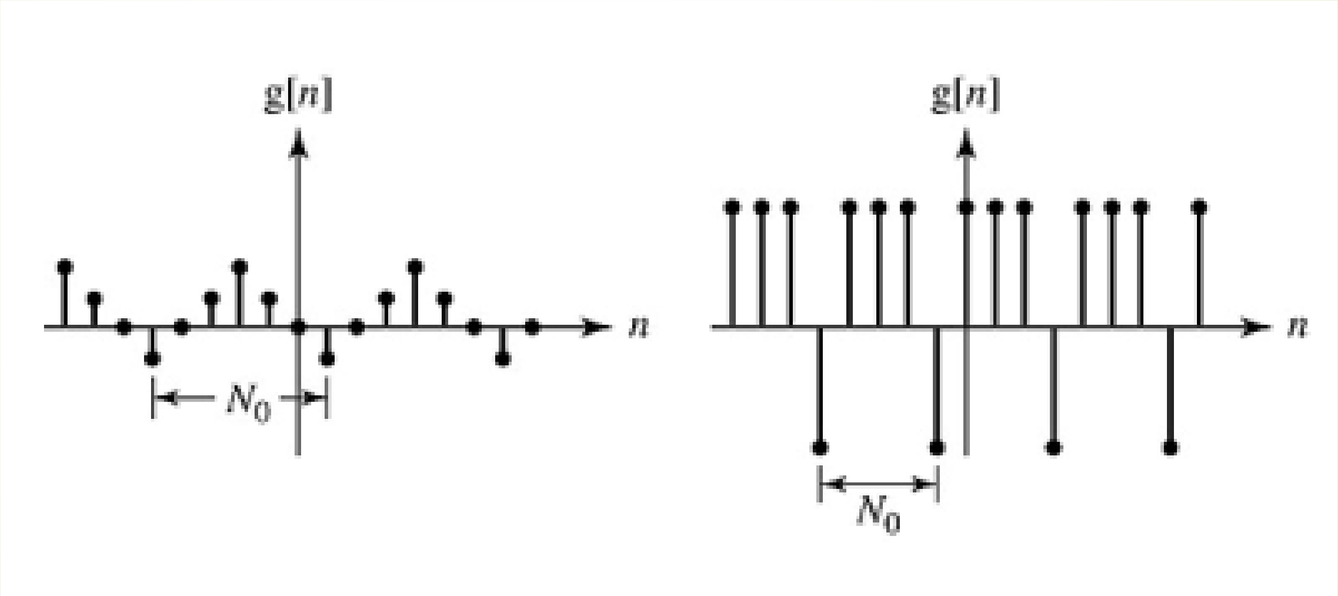
Impar



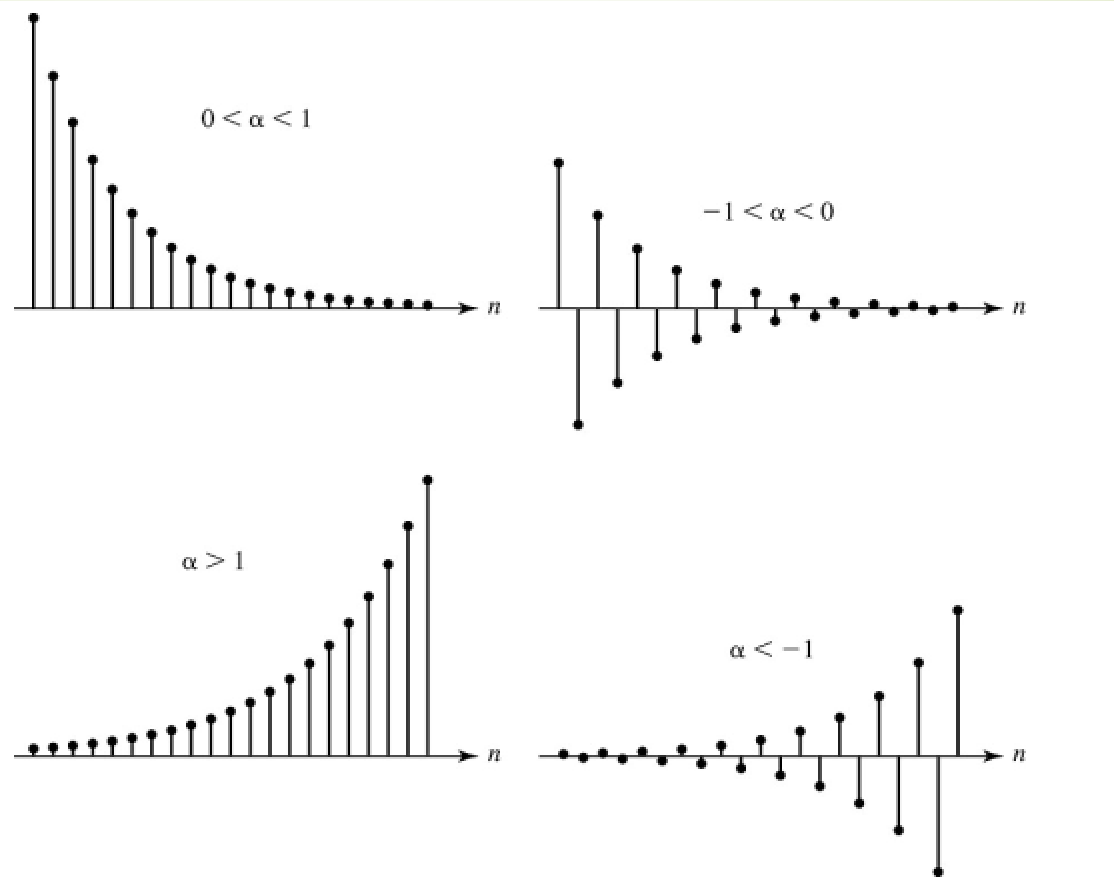
Funciones periódicas en TD

- Una función $g[n]$ es periódica si
- $g[n]=g[n+mN]$
- Para cualquier valor entero de m donde N es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental N_o.
- La frecuencia fundamental $f_o=1/N_o$ ciclos/muestra
- La frecuencia fundamental en radianes por muestra $\omega_o=2\pi f_o$.

Funciones periódicas en TD



Exponencial real en TD



$$x[n] = C\,\alpha^n$$

Periodicidad de exponenciales discretas

- Para tiempo continuo vimos dos propiedades de:

$$e^{j\omega_0 t}$$

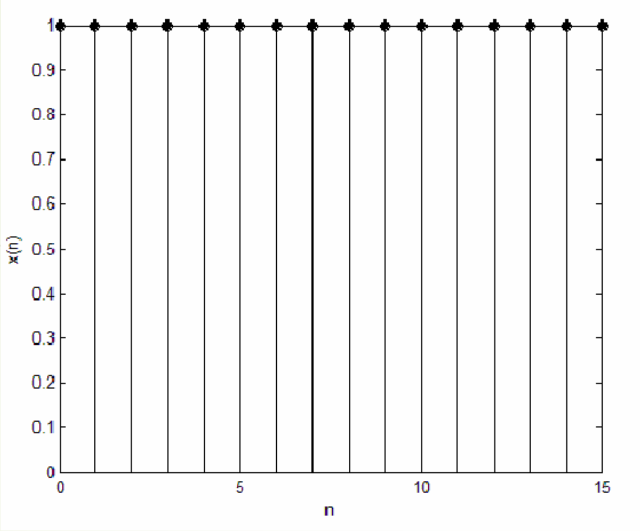
- Mientras más grande la magnitud de ω_0 mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
- Es periódica para cualquier valor de ω_0.
- Veamos estas propiedades en TD

Periodicidad de exponenciales discretas

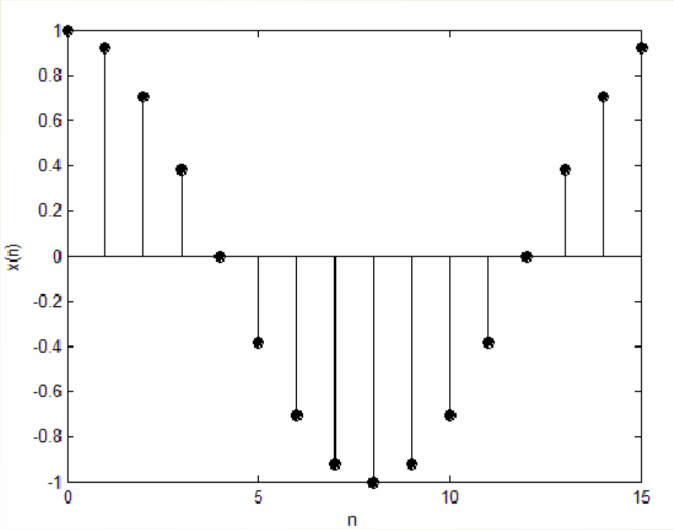
$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

Vemos que la exponencial $\omega_0+2\pi$ es la misma con frecuencia ω_0. Diferente al caso contínuo, donde las señales son distintas para distintas ω_0. Por lo tanto al considerar exponenciales complejas, necesitamos solamente tomar el intervalo de frecuencia de longitud 2π dentro del cual se escoge ω_0. Conforme ω_0 se incrementa desde 0, la señal oscila más rápido hasta π. Seguimos aumentando ω_0 hasta 2π y la señal oscila más lento hasta producir la misma secuencia que en $\omega=0$.

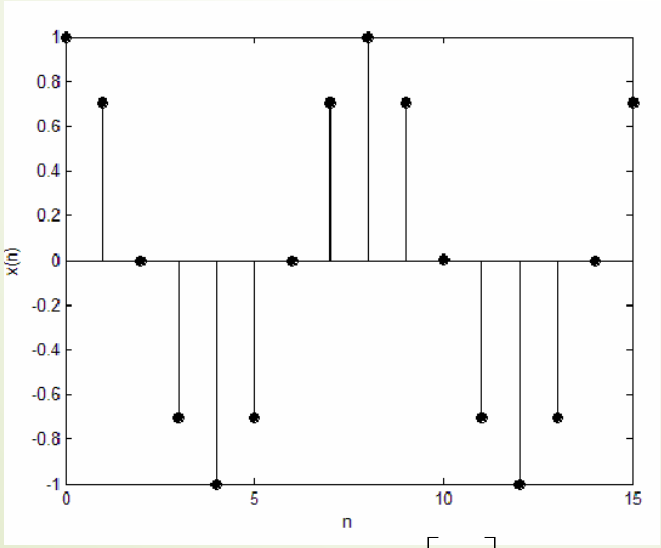
$$y[n] = cos[\omega n]$$



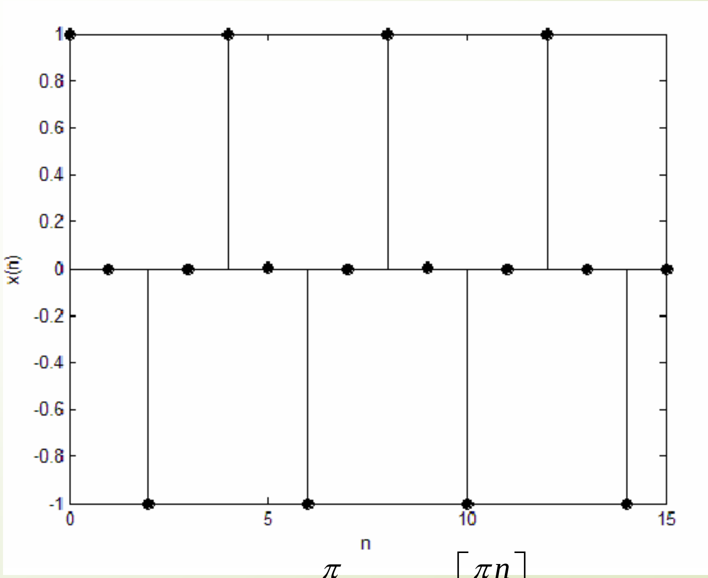
$\omega = 0 \Rightarrow \quad cos[0n]$



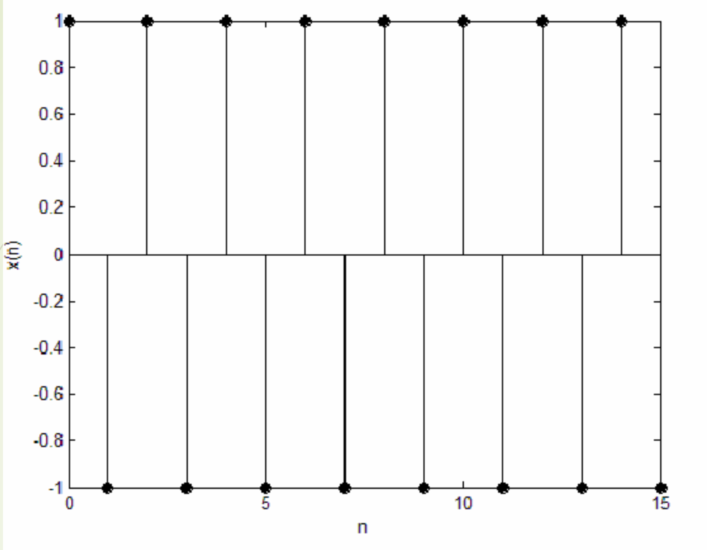
$$\omega = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{\pi n}{8}\right]$$



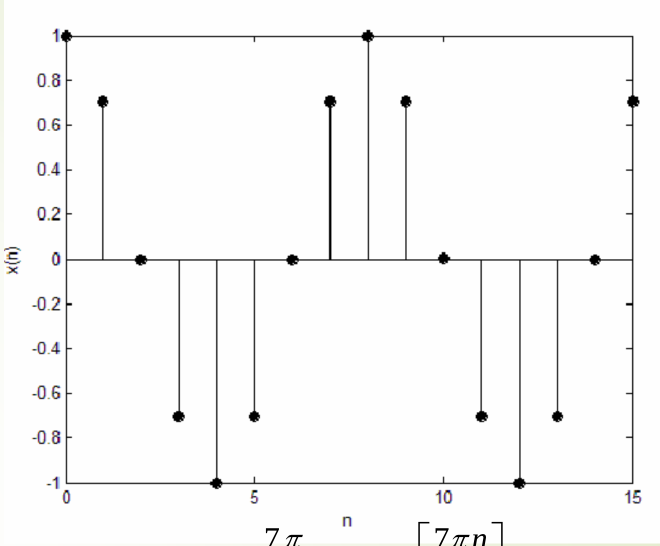
$$\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{\pi n}{4}\right]$$



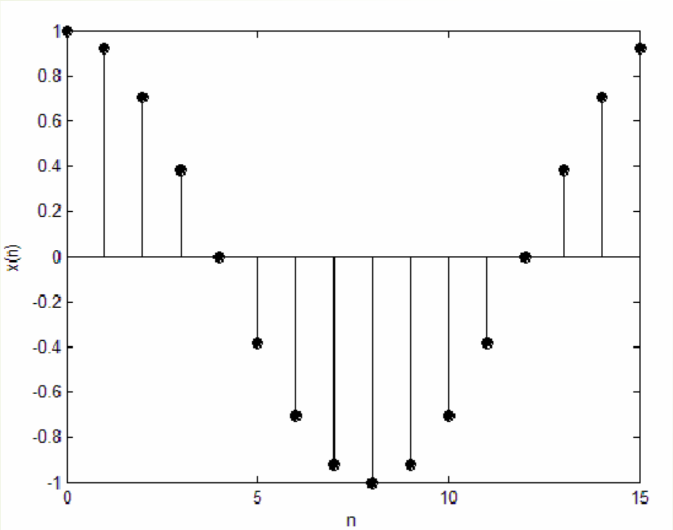
$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{\pi n}{2}\right]$$



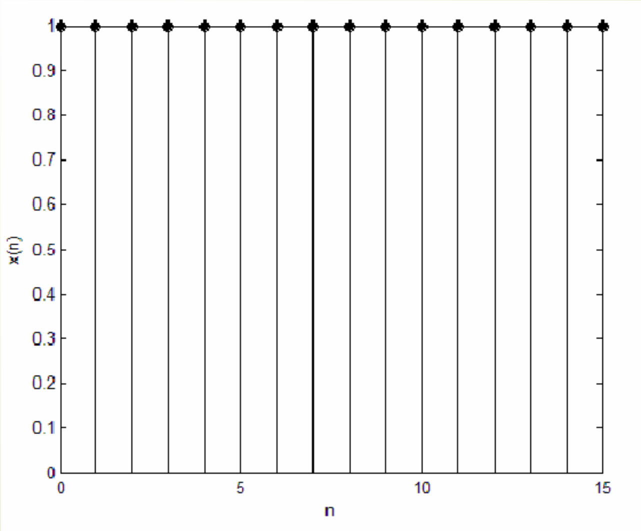
$$\omega = \pi \Rightarrow \quad cos[\pi n]$$



$$\omega = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{7\pi n}{4}\right]$$



$$\omega = \frac{15\pi}{8} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{15\pi n}{8}\right]$$



$$\omega = 2\pi \Rightarrow \quad cos[2\pi n]$$

Periodicidad de exponenciales discretas

- La segunda propiedad respecto de la periodicidad de la exponencial compleja discreta. Para ser periódica :

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \qquad e^{j\omega_0 N} = 1$$

- Debe haber un entero m tal que
- $\omega_0 N = 2\pi m \quad \omega_0 / 2\pi = m/N$

Periodicidad de exponenciales discretas

- De acuerdo con lo anterior, la exponencial es periódica si $\omega_0/2\pi$ es un número racional y es no periódica en otras circunstancias.

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de ω_0	Señales idénticas para valores de ω_0 separados 2π
Periódica para cualquier ω_0	Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi\, m/N$ con m y N enteros
Frecuencia fundamental ω_0	Frecuencia fundamental ω_0/m
Período fundamental $2\pi/\omega_0$	Período fundamental $2\pi m/\omega_0$