Análisis de Señales Curso 2024

Trabajo Práctico Nº9
Introducción a las señales aleatorias

1. Determine cuál de las siguientes funciones tiene las propiedades de una función de autocorrelación:

   a. $R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| < 1 \\ 0 & |\tau| > 1 \end{cases}$

   b. $R_{xx}(\tau) = \delta(\tau) + sen(\omega_0 \cdot \tau)$

   c. $R_{xx}(\tau) = e^{-|\tau|}$

   d. $R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & |\tau| < 1 \\ 0 & |\tau| > 1 \end{cases}$

2. Determine cuál de las siguientes funciones tiene las propiedades de una densidad espectral de potencia:

   a. $S_{xx}(\omega) = \delta(\omega) + \cos^2(\omega)$

   b. $S_{xx}(\omega) = 10 + \delta(\omega - 20 \cdot \pi)$

   c. $S_{xx}(\omega) = e^{-\omega - 20 \cdot \pi}$

   d. $S_{xx}(\omega) = e^{-(\omega - 20 \cdot \pi)^2}$

3. La densidad espectral de potencia de un proceso estocástico x(t) viene dada por:

$$S_{xx}(\omega) = 10^{-6} \cdot \omega^2$$

   a. Determine la potencia de x(t) contenida en la banda de frecuencias de 0 a 5.10^3 rad/seg.
   b. Determine la potencia de x(t) contenida en la banda de frecuencias de 5.10^3 a 6.10^3 rad/seg.

4. Determine la función de autocorrelación de un proceso estocástico cuya densidad espectral de potencia viene dada por la expresión:

$$S_{xx}(\omega) = e^{-2|w|} + 0.7 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) + 1.2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + 1.2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$

5. Un proceso estocástico tiene una densidad espectral de potencia $S_{xx}(\omega)$. Hallar la densidad espectral de potencia de otro proceso estocástico:

$$y(t) = x(t) - x(t - T).$$

6. Un ruido blanco con densidad espectral de potencia No/2 entra a un filtro pasa bajos ideal con frecuencia de corte B (Hz).

   a. Calcule la potencia a la salida del filtro.
   b. Calcule la función de autocorrelación del ruido a la salida del filtro.

Análisis de Señales — Curso 2024

Trabajo Práctico Nº9
Introducción a las señales aleatorias

7. Un proceso estocástico estacionario tiene una función de autocorrelación dada por:

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T} & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

   a. Calcule y dibuje la densidad espectral de potencia de x(t)
   b. Calcule la función de autocorrelación de:

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

   ¿Es y(t) estacionario?

8. Un ruido blanco N(t), de media nula y densidad espectral de potencia No/2 es filtrado por un sistema lineal invariante en el tiempo de respuesta al impulso h(t). Calcule la potencia del ruido a la salida cuando:

   a. $h(t) = \frac{sen(2 \cdot \pi \cdot B \cdot t)}{\pi \cdot t}$

   b. $h(t) = \frac{2 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot B \cdot t)}{\pi \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

9. Un ruido blanco de media nula y densidad espectral de potencia:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

   Entra a un sistema lineal invariante en el tiempo de respuesta al impulso:

$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

   Para producir una salida y(t).

   a. Calcule $S_{yy}(\omega)$, la densidad espectral de potencia de y(t).
   b. Calcule $R_{yy}(\tau)$, la función de autocorrelación de y(t).

10. Sea el proceso aleatorio:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta)$$

    Estacionario en sentido amplio. Supongamos que A y ω_0 son constantes y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0; 2\pi)$.
    Calcular:
    a. El valor medio.
    b. La función de autocorrelación.

11. Dada la función de autocorrelación:

$$R_{xx}(\tau) = 25 + \frac{4}{1 + 6 \cdot \tau^2}$$

    Encontrar el valor medio y la varianza de x (t).

Análisis de Señales — Curso 2024

Trabajo Práctico Nº9
Introducción a las señales aleatorias

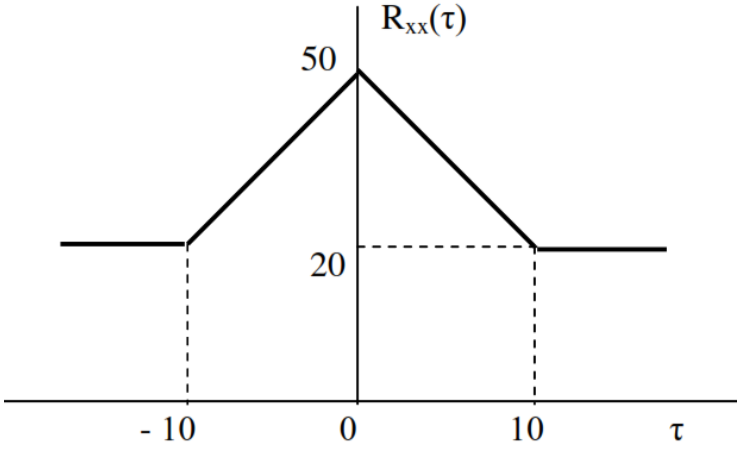
12. Sean dos procesos aleatorios X(t) y Y(t) definidos por:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot sen(\omega_0 \cdot t)$$

$$y(t) = B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - A \cdot sen(\omega_0 \cdot t)$$

Donde A y B son variables aleatorias y ω_o es una constante. Además, X(t) e Y(t) son estacionarios en sentido amplio, A y B son no correlacionados y de valor medio nulo. Calcular R_{xy}. Conclusiones.

13. Para el proceso aleatorio que tiene como función de autocorrelación la mostrada en la figura inferior, encontrar: E[x(t)]; E[x^2(t)] y σ^2_x



14. Un proceso aleatorio Y(t) = X(t) – X(t+τ) es definido en términos del proceso X(t) que es estacionario en sentido amplio.

    a. Muestre que el valor medio de Y(t) es nulo aún si X(t) tiene valor medio no nulo.
    b. Muestre que $\sigma_y^2 = 2\,[\,R_{xx}(0) - R_{xx}(\tau)\,]$

15. Correlación estadística en Octave/Matlab
La autocorrelación de una secuencia aleatoria ESA X[n] involucra el cálculo de la esperanza:

$$R_{xx}[m] = E\{X[n+m]\,X[n]\}$$

Esto implica que se promedia sobre todas las realizaciones posibles de la secuencia aleatoria. Sin embargo, es posible obtener una estimación de la función de autocorrelación a partir de un número finito de realizaciones.

a) Sea la secuencia aleatoria X[n] independiente e idénticamente distribuida (iid) con distribución U [-1/2;1/2]. Los siguientes comandos de Octave/Matlab permiten estimar la función de autocorrelación R_{XX}[m]:

Trabajo Práctico Nº9
Introducción a las señales aleatorias

```
nro_de_realizaciones=500;
largo_secuencia=150;
X=rand(nro_de_realizaciones, largo_secuencia)-.5;
% Cada fila de la matriz X contendra una realizacion del proceso y
% y cada columna corresponde a la variable aleatoria de indice n de
% X[n].
m_max=30;
Rxx=zeros(1,2*m_max+1);

for m=-m_max:m_max      % Para cada m:
    % Determinar el rango de valores de n donde se puede evaluar
    %X[n+m].
    n=(1+m_max):(largo_secuencia-m_max);
    % Calcular el argumento de la esperanza en Rxx[m]=E{X[n+m]X[n]}
    px=X(:,n+m).*X(:,n);      % Para todas las realizaciones juntas.
    % En primer lugar, se promedian las diferentes realizaciones.
    rx=mean(px,1);
    % Por ser X[n] estacionaria se promedia para diferentes n.
    Rxx(1+m_max+m)=mean(rx,2);
end
figure; stem(-m_max:m_max, Rxx); title('Rxx[m]'); grid;
```

b) Supongamos ahora que X[n] ingresa a un sistema cuya salida es:

$$Y[n] = \sum_{i=0}^{11} X[n-i]$$

Para obtener varias realizaciones de Y[n] podemos usar los siguientes comandos:

```
Y=zeros(nro_de_realizaciones, largo_secuencia);
muestras_sumadas=12;
for n=muestras_sumadas:largo_secuencia     % Para cada n
    Y(:,n)=sum(X(:,n+1-muestras_sumadas:n), 2);
end
% Las primeras muestras de Y deben descartarse ya que contienen un
% transitorio producido al utilizar una X de largo finito.
Y=Y(:,muestras_sumadas:largo_secuencia);
largo_secuencia_Y=size(Y,2);
figure;hist(Y(:,50)); title('Distribucion de Y[n]');
```

Los siguientes comandos de Octave/Matlab permiten graficar la función de autocorrelación $R_{YY}[m]$.

```
Ryy=zeros(1,2*m_max+1);
for m=-m_max:m_max              % Para cada m:
    % Determinar el rango de valores de n donde se puede evaluar
Y[n+m].
    n=(1+m_max):(largo_secuencia_Y-m_max);
    % Calcular el argumento de la esperanza en Ryy[m]=E{Y[n+m]Y[n]}
    py=Y(:,n+m).*Y(:,n);      % Para todas las realizaciones juntas.
    % En primer lugar, se promedian las diferentes realizaciones.
    ry=mean(py,1);
    %Por ser Y[n] estacionaria se promedia para diferentes n.
    Ryy(1+m_max+m)=mean(ry,2);
end
figure; stem(-m_max:m_max, Ryy); title('Ryy[m]'); grid;
```

Trabajo Práctico Nº9

Introducción a las señales aleatorias

c) Ahora se genera una secuencia i.i.d (una realización) con distribución U [-1/2;1/2] en Octave/Matlab, pero de largo 1000 (si bien con una realización alcanza, eso no quita que necesitemos muchas muestras para que la estimación de la correlación sea satisfactoria). Considerando su autocorrelación de -30 a 30 como antes, vea que aproximadamente coincide con los resultados previamente obtenidos promediando varias realizaciones.

```
largo_secuencia=1000;
X=rand(1, largo_secuencia)-.5;
% El vector X contendra una realizacion del proceso X[n]).
m_max=30;
Rxx=zeros(1,2*m_max+1);
% Determinar el rango de valores de n donde se puede evaluar X[n+m].
n=(1+m_max):(largo_secuencia-m_max);
for m=-m_max:m_max              % Para cada m:
    % Calcular el argumento de la esperanza en Rxx[m]=E{X[n+m]X[n]}
    px=X(n+m).*X(n);
    % Se calcula el promedio aritmetico como estimador de la
    % esperanza
    rx=mean(px);
    Rxx(1+m_max+m)=rx;
end
figure; stem(-m_max:m_max, Rxx); title('Rxx[m]'); grid;

Y=zeros(1, largo_secuencia);
muestras_sumadas=12;
for n=muestras_sumadas:largo_secuencia     % Para cada n
    Y(n)=sum(X(n+1-muestras_sumadas:n), 2);
end
% Las primeras muestras de Y deben descartarse ya que contienen un
% transitorio producido al utilizar una X de largo finito.
Y=Y(muestras_sumadas:largo_secuencia);
largo_secuencia_Y=size(Y,2);

Ryy=zeros(1,2*m_max+1);
for m=-m_max:m_max              % Para cada m:
    % Determinar el rango de valores de n donde se puede evaluar
    % Y[n+m].
    n=(1+m_max):(largo_secuencia_Y-m_max);
    % Calcular el argumento de la esperanza en Ryy[m]=E{Y[n+m]Y[n]}
    py=Y(n+m).*Y(n);       % Para todas las realizaciones juntas.
    % En primer lugar, se promedian las diferentes realizaciones.
    ry=mean(py,1);
    % Por ser Y[n] estacionaria se promedia para diferentes n.
    Ryy(1+m_max+m)=mean(ry,2);
end
figure; stem(-m_max:m_max, Ryy); title('Ryy[m]'); grid;
```