Análisis de Señales Curso 2024

Trabajo Práctico Nº5
Transformada de Laplace

Ejemplo 1
Calculamos la Transformada de Laplace y dibujamos la ROC de la función:

$$x(t) = u(t)$$

Aplico la definición de TL:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\,dt = \frac{e^{(-s)t}}{-s}\Big]_{0}^{\infty}$$

Para que tenga convergencia, la parte real del exponente cumplir:

$$-\sigma < 0 \quad \rightarrow \quad \sigma > 0$$

De este modo el primer término tiende a cero para t → ∞ , obteniendo:

$$X(s) = \frac{1}{s}\ cuya\ (ROC)\ es\ \sigma > 0$$

Actividad 1
Calcule la transformada de Laplace por definición y dibuje la ROC de las siguientes funciones:

a. $x(t) = t \cdot u(t)$
b. $x(t) = t \cdot e^{t} \cdot u(t)$
c. $x(t) = e^{-8 \cdot t} \cdot u(t)$
d. $x(t) = e^{3 \cdot t}\cos\,(20 \cdot \pi \cdot t) \cdot u(-t)$
e. $x(t) = e^{2 \cdot t} \cdot \mathrm{u}(-\mathrm{t}) - e^{-5 \cdot t} \cdot u(t)$
f. $x(t) = \sin(\omega_o \cdot t) \cdot u(t)$

Actividad 2
Mediante tabla de pares transformados y las propiedades en el tiempo, determine la transformada de Laplace de las siguientes señales:

a. $x(t) = u(t) - u(t-1)$
b. $x(t) = 3e^{-3 \cdot (t-2)} \cdot u(t-2)$
c. $x(t) = 5 \cdot sen(\pi \cdot (t-1)) \cdot u(t-1)$
d. $x(t) = \frac{d(e^{-10 \cdot t} \cdot u(t))}{dt}$
e. $x(t) = \frac{d(4 \cdot sen(10 \cdot \pi \cdot t) \cdot u(t))}{dt}$

Actividad 3
Determine la Transformada de Laplace Inversa de las siguientes funciones:

a. $X(s) = \frac{24}{s \cdot (s+8)}$

b. $X(s) = \frac{20}{s^2 + 4 \cdot s + 3}$

Actividad 4
Use la Transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales para t > 0:

a. $x'(t) + 10 \cdot x(t) = u(t) \qquad x(0) = 1$

b. $x'(t) + 2 \cdot x(t) = sen(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot u(t) \qquad x(0) = -4$

Actividad 5
Determine las respuestas y(t) de los sistemas h(t) ante las excitaciones x(t) correspondientes:

a. $h(t) = e^{-5 \cdot t} \cdot u(t) \quad con \quad x(t) = 3 \cdot e^{-7 \cdot t} \cdot u(t) - 12 \cdot e^{4 \cdot t} \cdot u(-t)$

b. $h(t) = tri(t) \quad con \quad x(t) = e^{-\cdot t} \cdot u(t)$

Análisis de Señales Curso 2024

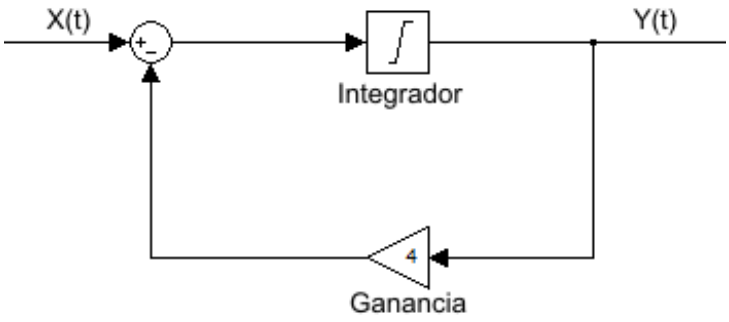
Trabajo Práctico Nº5

Transformada de Laplace – con Octave aplicado

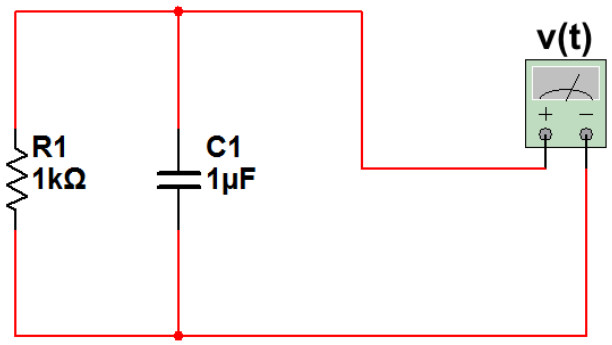
Actividad 6

Escriba las ecuaciones diferenciales que describen a los siguientes sistemas, además encuentre y dibuje las respuestas indicadas:

a. x (t)=u(t), y(t) es la respuesta, y(0)=0.



b. v(t) es la respuesta, v(0)=10 V.



Actividad 7

Un sistema LTI continuo está descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

a. Encuentre la función de transferencia H(s). Ubique los polos y ceros de H(s) en el plano S.
b. Determine h(t) para cada uno de los siguientes casos:
    1. El sistema es estable.
    2. El sistema es causal.
    3. El sistema no es ni causal ni estable.

Trabajo Práctico Nº5
Transformada de Laplace – con Octave aplicado

Ejemplo 2

Se puede utilizar la función *laplace* en el entorno Octave/Matlab. Por ejemplo, para la actividad 1c podemos escribir en el editor del software:

```
syms t;
x= exp(-8*t).*heaviside(t);
expresion=laplace(x);
disp(expresion);
```

La cual retorna la transformada de Laplace de la función temporal. Cabe indicar que dicha función no determina la región de convergencia en el plano complejo S. Además, como es una función simbólica y opera por tablas, no posee confiabilidad cuando se solicitan funciones donde se aplican muchas propiedades como desplazamientos, escalamientos, etc.

Ejemplo 3

En las actividades donde se necesita antitransformar mediante la descomposición en fraccione parciales simples tenemos la función *residue.* En este caso expandimos en fracciones parciales la actividad 3a, donde los valores de las variables a y b que son los residuos de sus respectivos polos se obtienen mediante la función *residue*:

```
%Num y Den son los coeficientes del numerador y del denominador en potencias
descendentes de s.
Num = [24];
Den = [1 8 0];
[r,p,k] = residue(Num,Den)
%Los residuos son devueltos en la columna r y los polos en la columna p.
```

El residuo del polo cero (a) vale 3 y el residuo del polo -8 (b) val -3. Reemplazando en la expresión anterior se obtiene:

$$X(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+8)} = \frac{3}{s} - \frac{3}{(s+8)}$$

Por tabla podemos determinar la función temporal que representa a cada término. El primer término corresponde a una función temporal causal:

$$\frac{3}{s} \quad \rightarrow \quad 3u(t)$$

El segundo término corresponde a una función temporal unilateral (causal):

$$\frac{3}{(s+8)} \quad \rightarrow \quad 3e^{-8t}u(t)$$

Entonces la expresión temporal unilateral (causal) es:

$$x(t) = 3u(t) - 3e^{-8t}u(t)$$

También donde se necesite la antitransformada de Laplace de forma directa, Octave/Matlab poseen la función *ilaplace*. En este caso aplicamos directamente la expresión X(s) a dicha función:

```
syms s
F = 24/(s^2+8*s);
functemp=ilaplace(F);
disp(functemp);
```

Y obtenemos la función temporal 3 - 3exp(-8t) la cual se considera unilateral (causal), por lo tanto, se multiplica por escalón y coincide con:

$$x(t) = 3u(t) - 3e^{-8t}u(t)$$