Ley de decaimiento radiactivo

ENR - 2024

Profesora: Laura Damonte

JTP: Javier Martínez

¿Cómo se mide la radiación?

La *Actividad* de una fuente radiactiva es el número medio de *procesos de decaimiento* que sufre por unidad de tiempo.

✓ Cantidad extrínseca
✓ Depende del esquema de desintegración nuclear específico (actividad ≠ cantidad de radiación emitida).

✓ Unidades:

1 Becquerel (Bq)= 1 desintegración/s

Antes,

1Curie (Ci)= 3,7 x 10^{10} desintegraciones/s

actividad de 1 g de ^{226}Ra

Ley de decaimiento radiactivo

✓ El *decaimiento radiactivo* es un proceso espontáneo, no puede predecirse el momento exacto en que un núcleo inestable sufra una transformación a otro núcleo más estable.

✓ El *decaimiento radiactivo* está, matemáticamente descripto en términos de probabilidades y velocidades de decaimiento promedio.

✓ Las leyes exponenciales que gobiernan el *decaimiento radiactivo* fueron formuladas por primera vez por *Rutherford y Soddy* en *1902*, para explicar sus experimentos en la serie del Th.

✓ Las generalizaciones matemáticas fueron desarrolladas en *1910* por *Bateman* siendo conocidas como las *ecuaciones de Bateman*.

Ley de decaimiento radiactivo

✓ Un sistema inestable (*núcleo radiactivo*) permanece en ese estado un cierto tiempo de *vida media* τ antes de decaer:

10^{-8} s - 10^{11} años

✓ Salvo que un estado nuclear tenga una vida media infinita, estará caracterizado por un nivel de energía de ancho Γ (principio de incerteza de Heisenberg):

$\Delta E = \Gamma = \hbar/\tau$, *$10^{-8}$ eV - 10^{-34} eV*

✓ La actividad de una muestra radioactiva constituye una medida de su tasa media de decaimiento, relacionada con la vida media nuclear.

✓ La probabilidad de que un núcleo se desintegre en la unidad de tiempo es λ (s^{-1}).

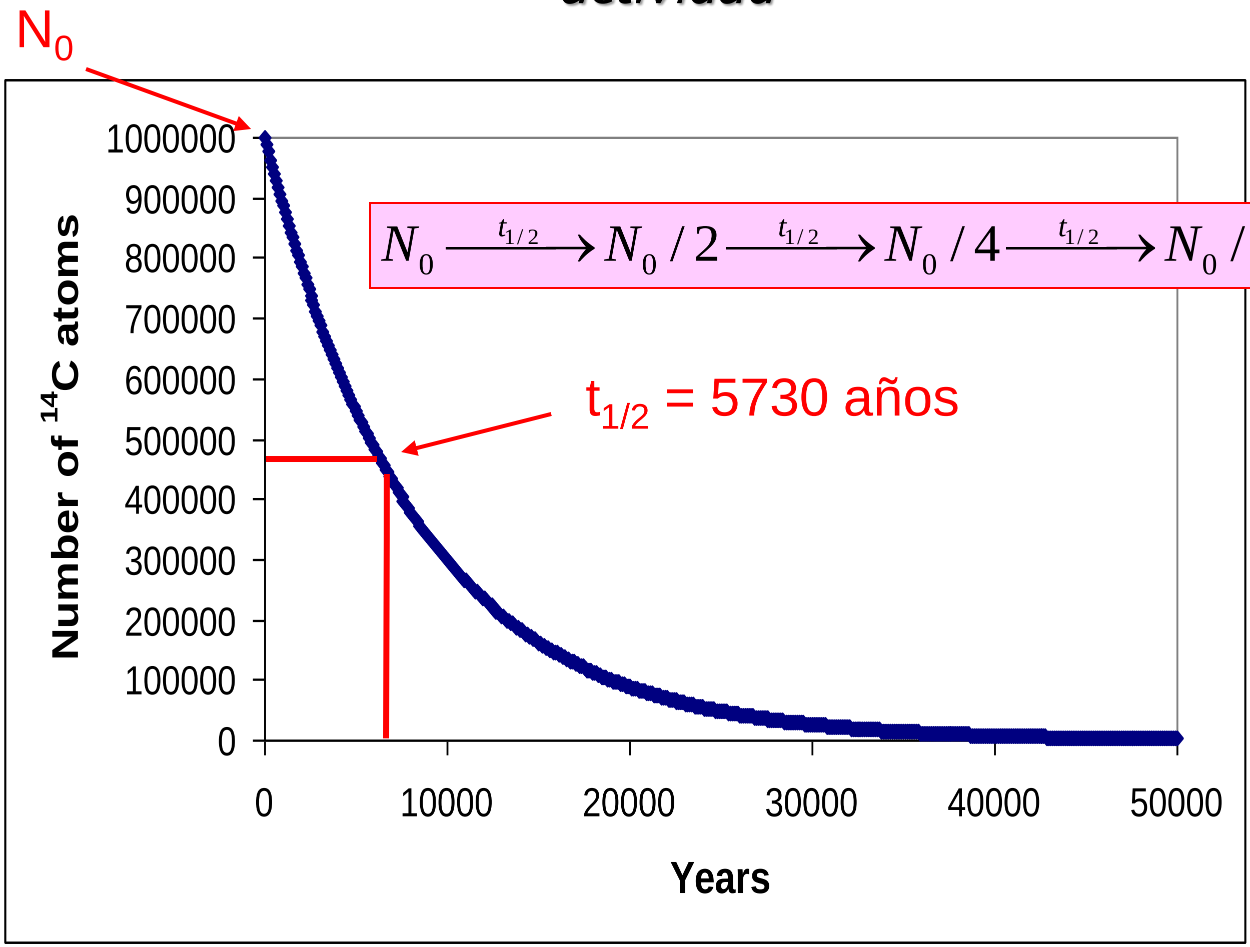
✓ La *constante de desintegración, λ,* NO depende del tiempo. Es una constante característica de la sustancia y NO depende del estado físico o químico de la misma (como presión, temperatura, edad o concentración).

✓ El tiempo de vida media es $\tau = 1/\lambda$

✓ Consideremos un conjunto de N núcleos radiactivos idénticos:

$\boldsymbol{\lambda N}$ número total de decaimientos por unidad de tiempo

actividad



$$N_0 \xrightarrow{t_{1/2}} N_0/2 \xrightarrow{t_{1/2}} N_0/4 \xrightarrow{t_{1/2}} N_0/8$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

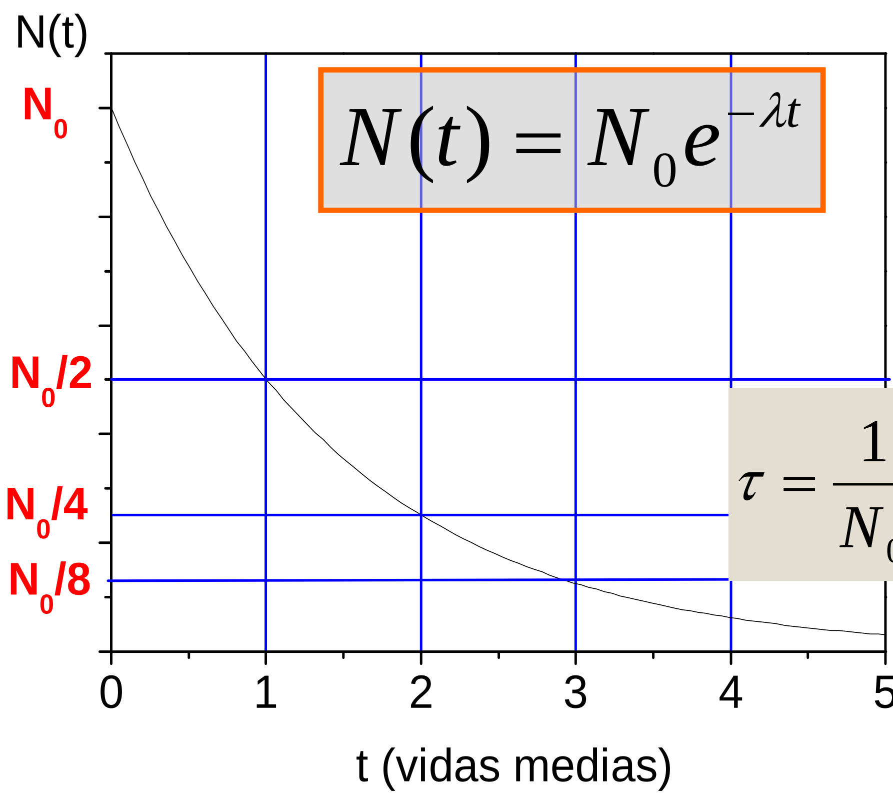
$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

Período de semi-desintegración (half-life)

Dado un conjunto de N núcleos radiactivos idénticos,
λN número total de decaimientos por unidad de tiempo

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \;\Rightarrow\; \lambda.dt = -\frac{dN}{N} \;\Rightarrow\; \int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN(t)}{N} = -\int_0^t \lambda dt$$

$$\boxed{A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}}$$



$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$$ Período de semi-desintegración (half-life)

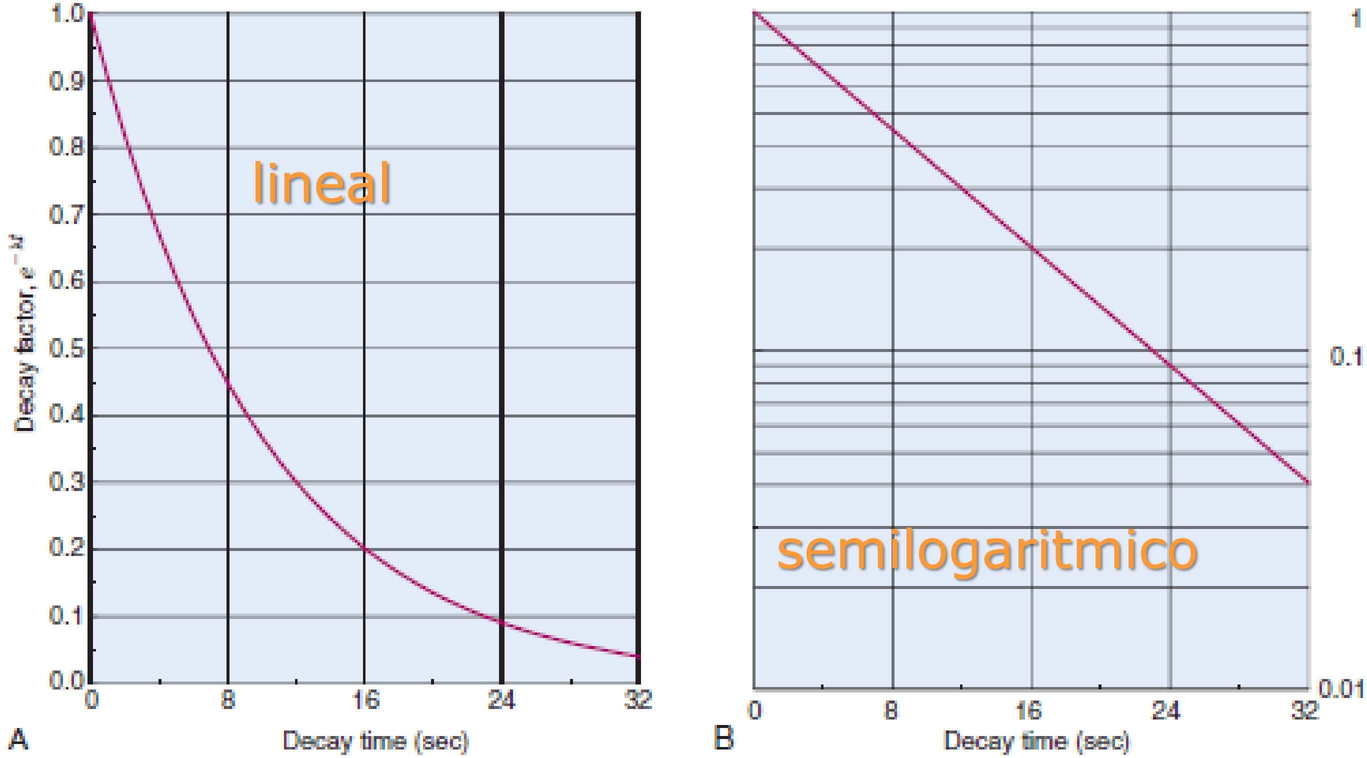
$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty \lambda t N(t) dt = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Asi que τ es el tiempo probable de desintegración de un núcleo:

τ es el tiempo vida de media (Mean lifetime) del nivel nuclear.

$$N_0 \xrightarrow{t_{1/2}} N_0/2 \xrightarrow{t_{1/2}} N_0/4 \xrightarrow{t_{1/2}} N_0/8$$

Factor de decaimiento y curva universal



λ=0.1 s

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

$$\ln\left[A(t)/A_0\right] = -\lambda t$$

$$DF = e^{-\lambda t} = \exp(-\ln 2t / T_{1/2})$$

El DF es una función exponencial del tiempo.

TABLE 4-1

DECAY FACTORS FOR ^{99m}Tc

	Minutes			
Hours	***0***	***15***	***30***	***45***
0	1.000	0.972	0.944	0.917
1	0.891	0.866	0.841	0.817
2	0.794	0.771	0.749	0.727
3	0.707	0.687	0.667	0.648
4	0.630	0.612	0.595	0.578
5	0.561	0.545	0.530	0.515
6	0.500	0.486	0.472	0.459
7	0.445	0.433	0.420	0.408
8	0.397	0.385	0.375	0.364
9	0.354	0.343	0.334	0.324
10	0.315	0.306	0.297	0.289
11	0.281	0.273	0.264	0.257
12	0.250	0.243	0.236	0.229

Ejemplo:

Un recipiente conteniendo ^{99m}Tc está rotulado “75 kBq/mL a las 8 am.” ¿Que volume se debe retirar a las 4 pm del miso día para preparar una inyección de 50 kBq para un paciente?

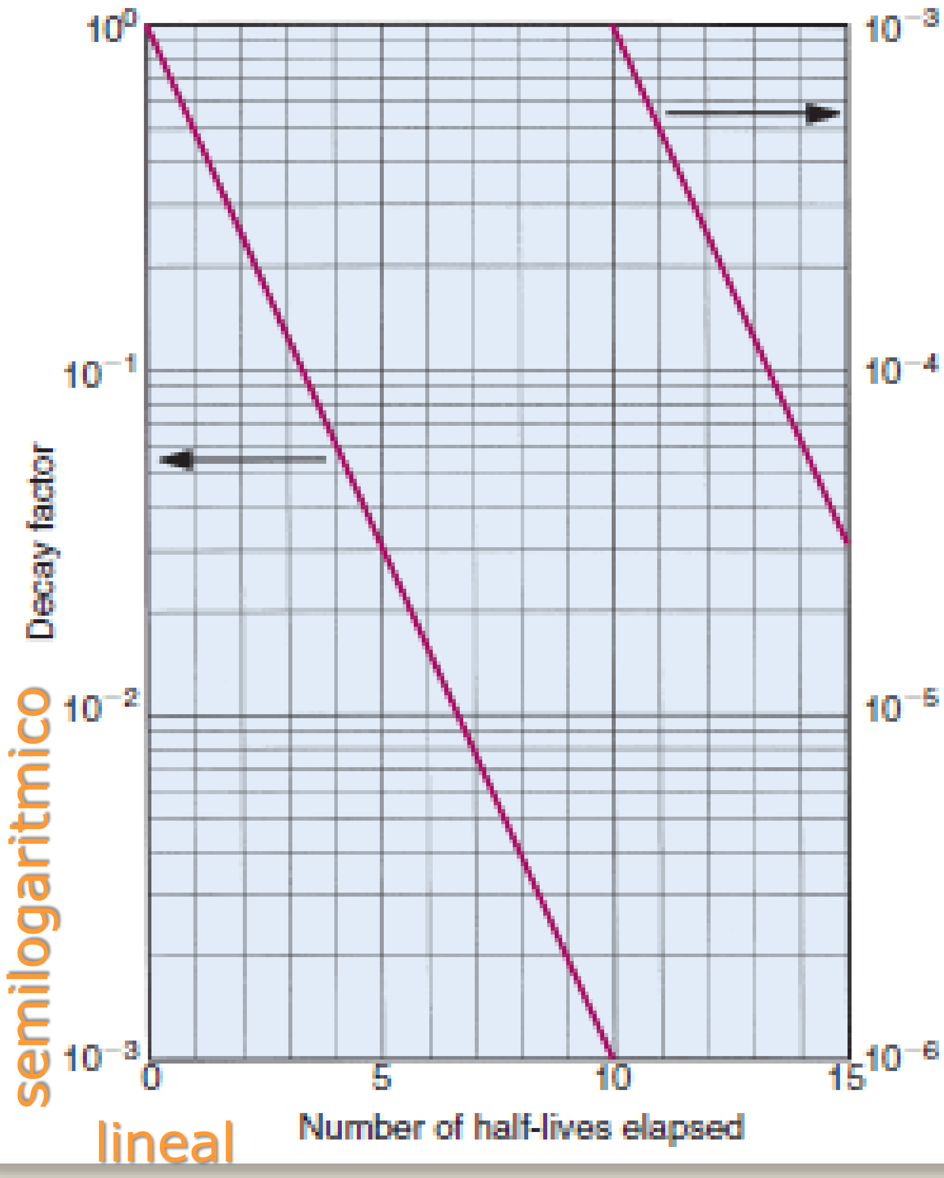
De la Tabla el DF para ^{99m}Tc luego de 8 hs es 0.397. Por tanto la concentracion de actividad en el recipiente será:

0.397 × 75 kBq/mL = 29.8 kBq/mL.

El volumen requerido para 50 kBq:

50 kBq /29.8 kBq/mL = 1.68 mL.

Curva universal



$$\boxed{DF = e^{-\lambda t}}$$

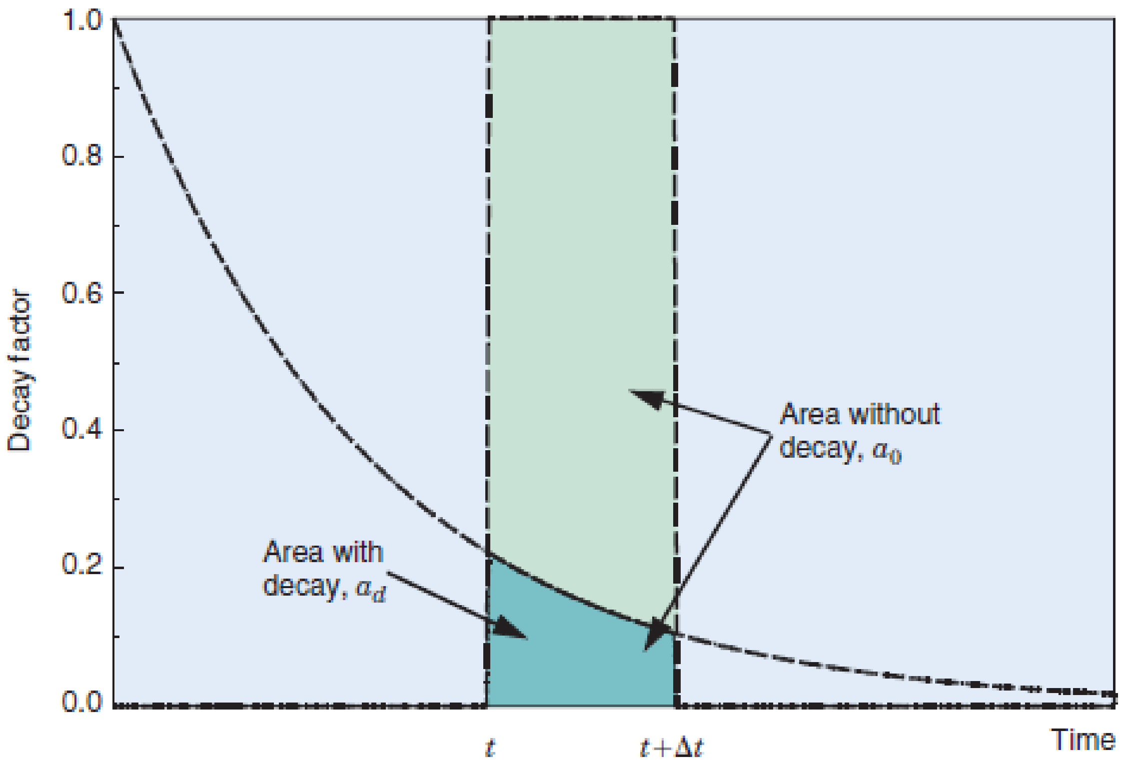
Elegimos dos puntos:

t=0, DF=1

t=$T_{1/2}$, DF=0.5

La curva universal puede utilizarse para cualquier radionucleido.

Correción de imágenes por desintegración: $DF_{eff}(t, \Delta t)$



Aplicaciones de la MN requieren tiempos de medida no cortos respecto del período del nucleído que se inyecta (por ejemplo ^{18}F de 110 min). Es necesario entonces corregir la actividad que se registra en cada intervalo de medida (image frames) debido al decaimiento radioactivo. Surge así un factor de decaimiento efectivo (DF_{eff}).

$DF_{eff} = a_d/a_0 = DF(1 - e^{-x}) / x$ con $x = \lambda \Delta t = \ln 2 (\Delta t/T_{1/2})$.

Para corregir por decaimiento se divide el número de cuentas registradas por el factor DFeff.

Cálculo de la actividad y masa de una fuente

Conociendo la constante de decaimiento y la actividad de un radionucleido podemos calcular el número total de átomos o la masa del radionucleido presente.

$$N = \frac{masa\ \ nucleido\ activo \times n^{o}\, de\ \ Avogadro}{atomo\ \ gramo\ \ nucleido}$$

Y dado que $A(t) = \lambda N$ $\lambda = \ln 2 / T$

$$A = \frac{masa\ \ nucleido\ activo \times 6{,}02 \times 10^{23} \times \ln 2}{atomo\ \ gramo\ \ nucleido\ T}$$

Ejemplo: A? 1 mg de ^{51}Cr, $T_{1/2}$=27,8 dias, m=50,96 uma
(A= 2,04x10^{14} des/min = 92Ci)

Actividad específica

Es la actividad por unidad de masa del radionucleido o compuesto específico.

$$\boxed{A_{esp} = \frac{A}{masa \quad nucleido}(Bq/g)}$$

Ejemplo: Una muestra de $Na^{125}I$ con un actividad total de 1mCi, cuales serán sus actividades especificas referidas a la masa de I y a la masa de NaI.

$$A_{esp1} = \frac{A}{masa \quad Iodo} = 37MBq/127{,}6g = 0{,}29Mbq/gIodo$$

$$A_{esp2} = \frac{A}{masa \quad NaI} = 37MBq/(127{,}6+23)gNaI = 0{,}245Mbq/gNaI$$

Actividad específica

- Una muestra de radionucleido puede contener isotopos estables del mismo elemento, los que se denominan *portadores (carriers).*

- Una muestra que contiene otros isotopos se dice *con portadores* y si no los tiene, *libre de portadores*

- La máxima actividad específica se obtnedra cuando la muestra esta libre de portadores *CFSA.*

$$\Delta N/\Delta t \text{ (dps)} = \lambda N = 0.693\ N/T_{1/2}$$

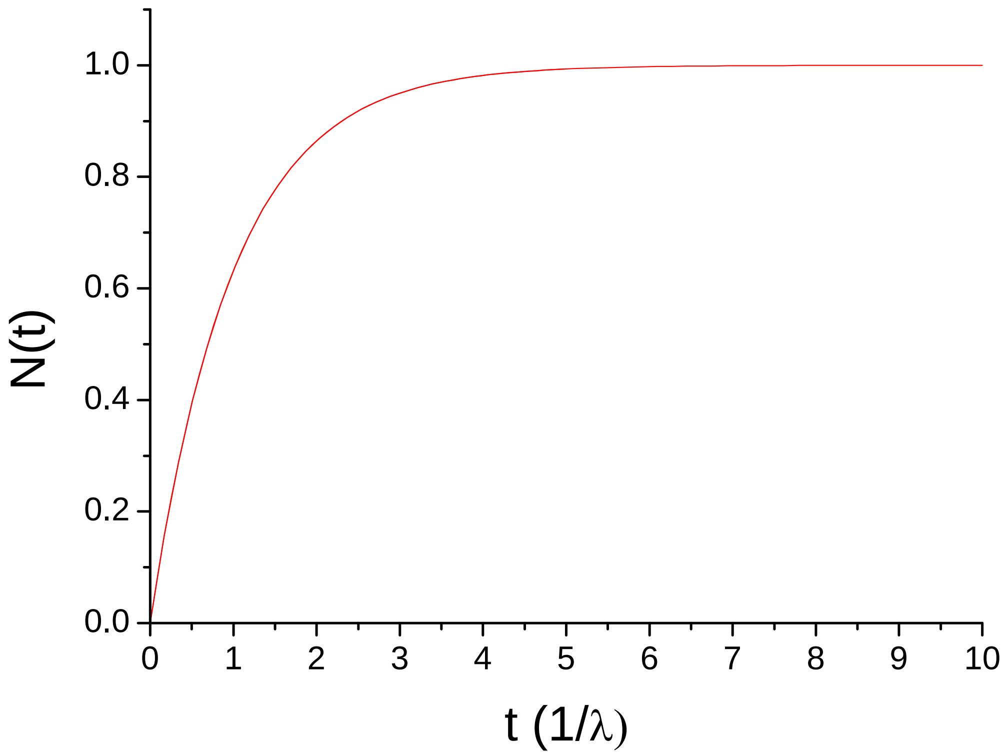
$$\text{CFSA(Bq/g)} = \ln 2 \times 6.023 \times 10^{23}/(\text{masa del nucleido} \times T_{1/2})$$

Cadenas de decaimiento radioactivo

i) $A \xrightarrow{\lambda_A} B$ *B* es producido a *velocidad constante*, *B es estable*

$$\mathbf{dN_B(t)/dt = \lambda_A N_A} \Longrightarrow \mathbf{dN_B(t) = \lambda_A N_{A0}\, e^{-\lambda_A t}\, dt}$$

Si $N_B(t=0) = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{N_B(t) = N_A(1-e^{-\lambda_A t})}$

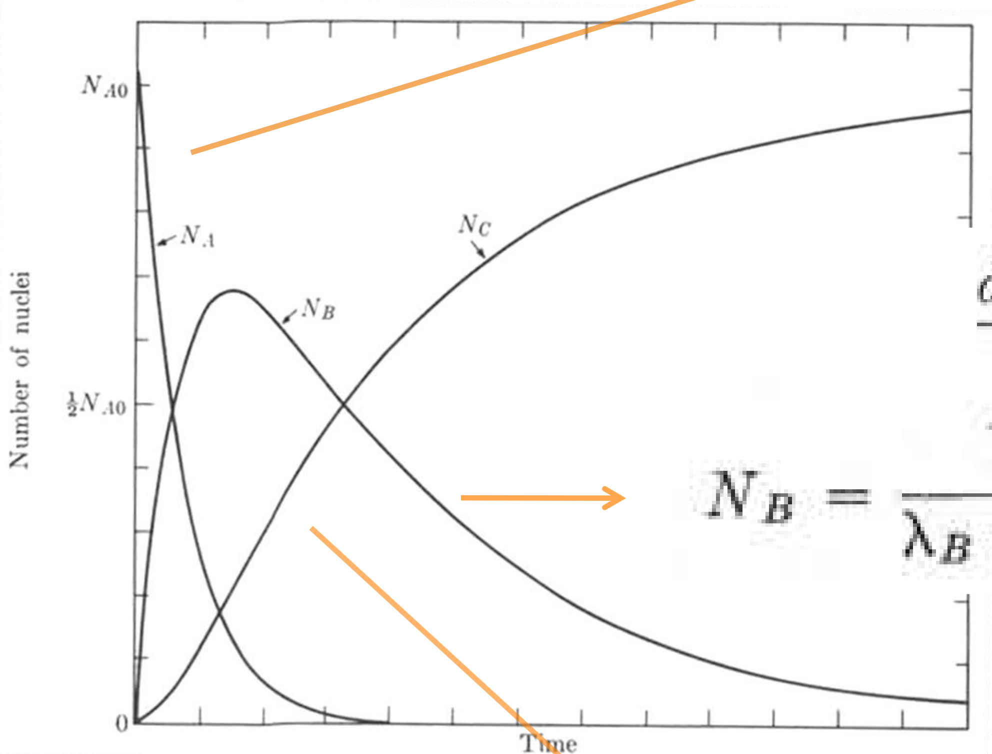


$\mathbf{N_A(t)+N_b(t)=cte=N_{A0}}$

Cadenas de decaimiento radioactivo

ii) *B* es inestable y decae a *C* (estable)

$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C$$



$$dN_A/dt = -\lambda_A N_A,$$

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B$$

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t} - \lambda_B N_B.$$

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0}(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}).$$

$$\frac{dN_c}{dt} = \lambda_b N_b$$

$$N_c(t) = N_a(0)\left\{1 + \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a}\left[\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t}\right]\right\}$$

N_B alcanza un máximo, cuando $dN_B/dt=0$,

$$\lambda_A N_A(t_{max})=\lambda_B N_B(t_{max}) \quad \text{con} \quad t_{max}= \ln(\lambda_B/\lambda_A)/\lambda_B-\lambda_A$$

Equilibrio ideal

Cadenas de decaimiento radioactivo

✓ Un núcleo padre decae (λ_p) a un hijo, que a su vez decae (λ_d)

$$\frac{dN_d}{dt} = \lambda_p N_p - \lambda_d N_d$$

$$(A_d)_t = \lambda_d N_d = \frac{\lambda_d (A_p)_0}{\lambda_d - \lambda_p}\left(e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}\right)$$

$$(A_d)_t = \lambda_d N_d = \frac{\lambda_d (A_p)_0}{\lambda_d - \lambda_p}\left(e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}\right) + (A_d)_0 e^{-\lambda_d t}$$

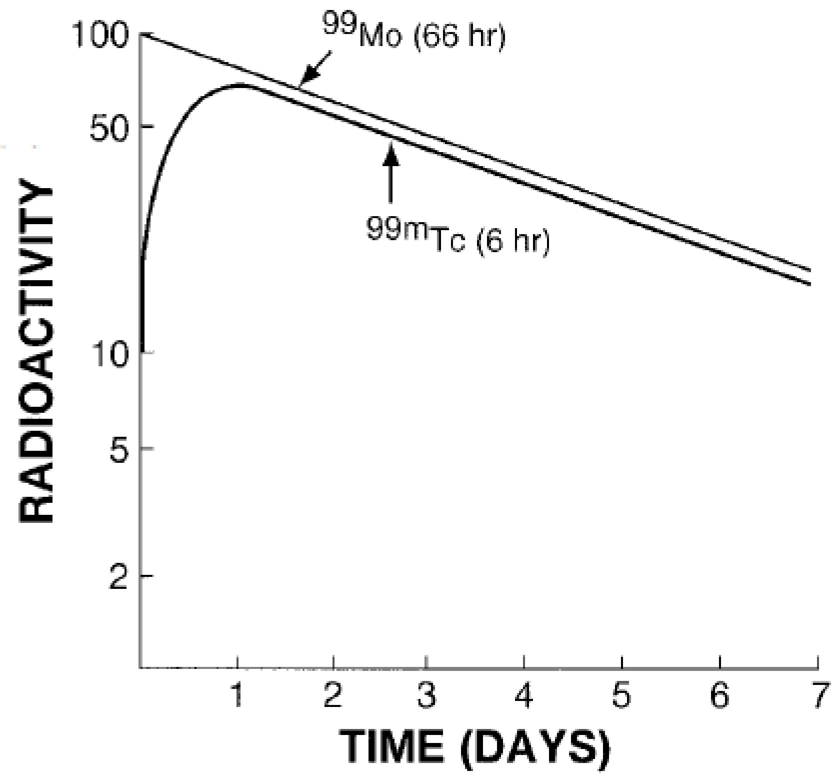
Equilibrio transiente

$\lambda_p < \lambda_d$

$$(A_d)_t = \lambda_d N_d = \frac{\lambda_d (A_p)_0}{\lambda_d - \lambda_p}(e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}) + (A_d)_0 e^{-\lambda_d t}$$

$$(A_d)_t = \frac{\lambda_d (A_p)_0}{\lambda_d - \lambda_p} e^{-\lambda_p t} = \frac{\lambda_d (A_p)_t}{\lambda_d - \lambda_p}$$

87% de los átomos de Mo decaen al ^{99m}Tc,



- ✓ Siempre la actividad del hijo es mayor que la del padre
- ✓ N_B alcanza un máximo y luego decae con la vida del padre.
- ✓ El tiempo para el cual alcanza el máximo:

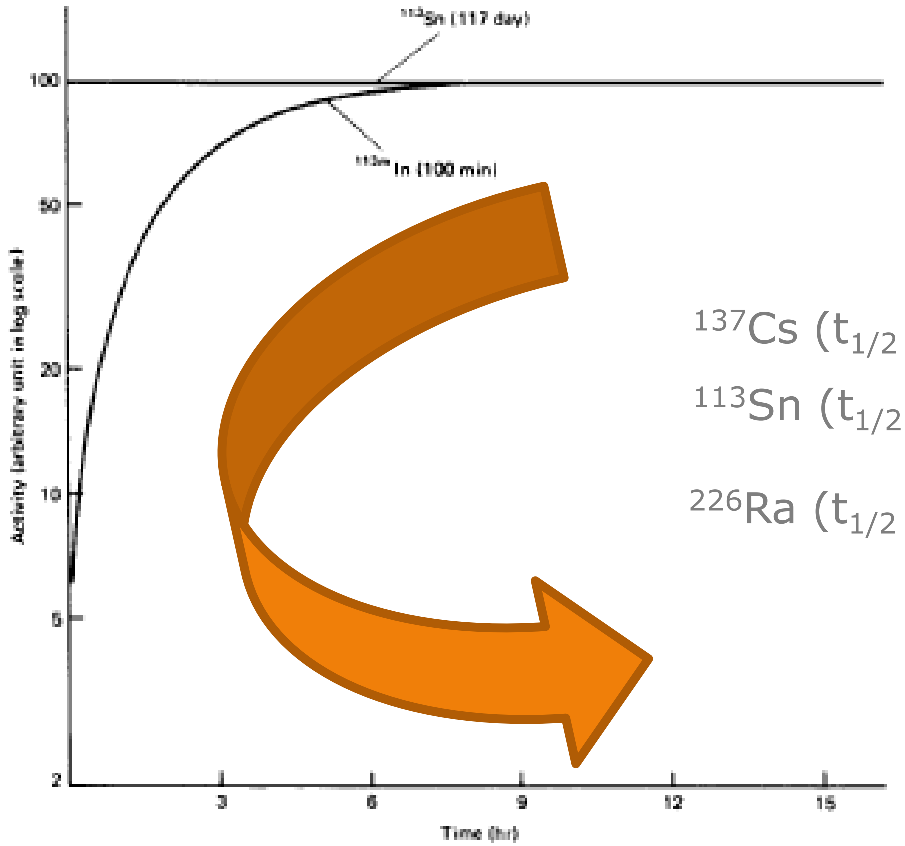
$$t_{max} = \frac{1.44 \times (t_{1/2})_p \times (t_{1/2})_d \times \ln[(t_{1/2})_p/(t_{1/2})_d]}{[(t_{1/2})_p - (t_{1/2})_d]}$$

En el ejemplo, t_{max} del ^{99m}Tc es 23 hs.

Equilibrio secular

$\lambda_d \gg \lambda_p$

$$(A_d)_t = \lambda_d N_d = \frac{\lambda_d (A_p)_0}{\lambda_d - \lambda_p}(e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}) + (A_d)_0 e^{-\lambda_d t}$$



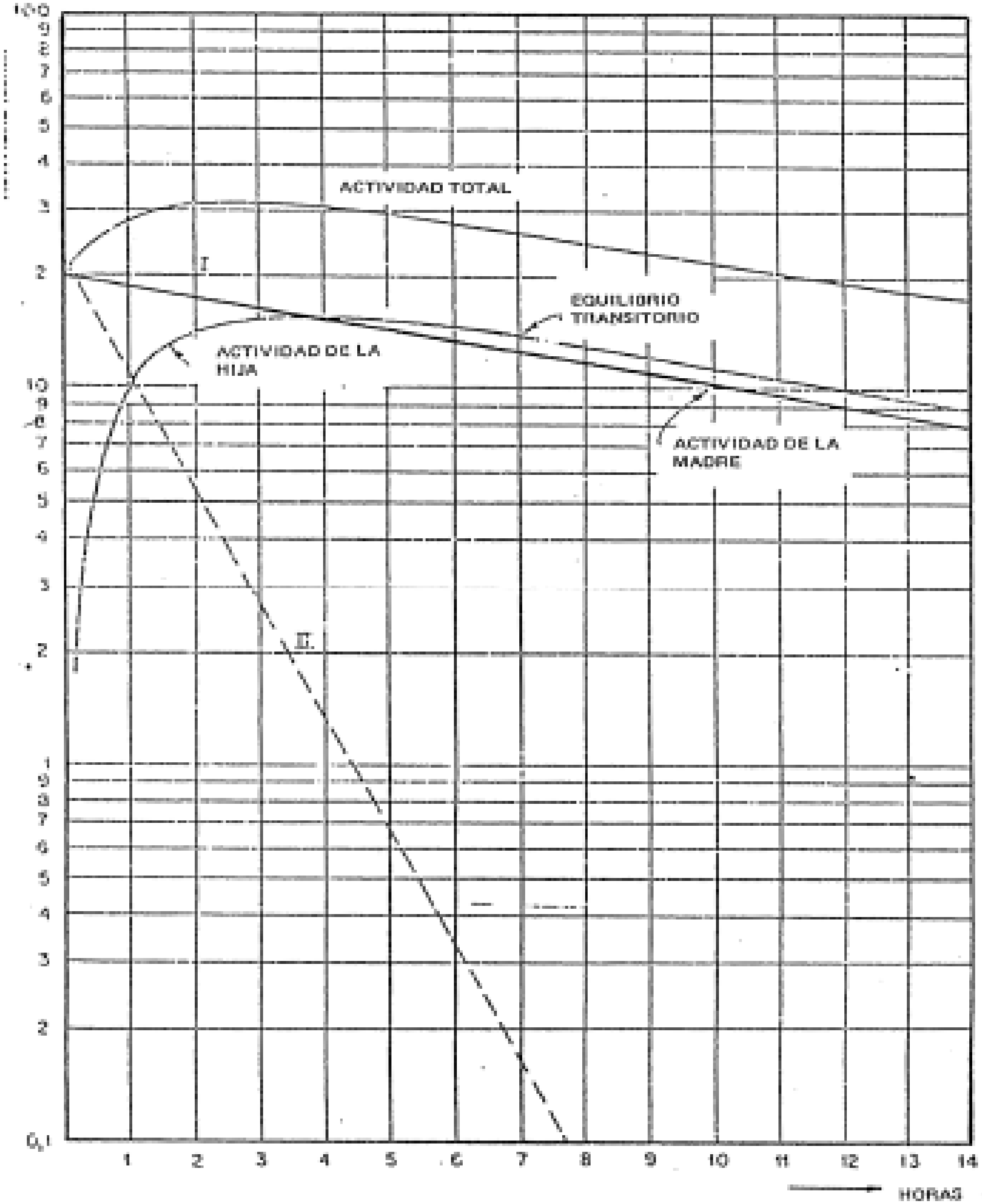
$$(A_d)_t = (A_p)_t$$

^{137}Cs ($t_{1/2}$ 30años) ^{137m}Ba($t_{1/2}$ 2.6min)

^{113}Sn ($t_{1/2}$ 117dias) ^{113m}In($t_{1/2}$ 100min)

^{226}Ra ($t_{1/2}$ 1620 a) ^{222}Rn ($t_{1/2}$ 3.83 a) ^{218}Po

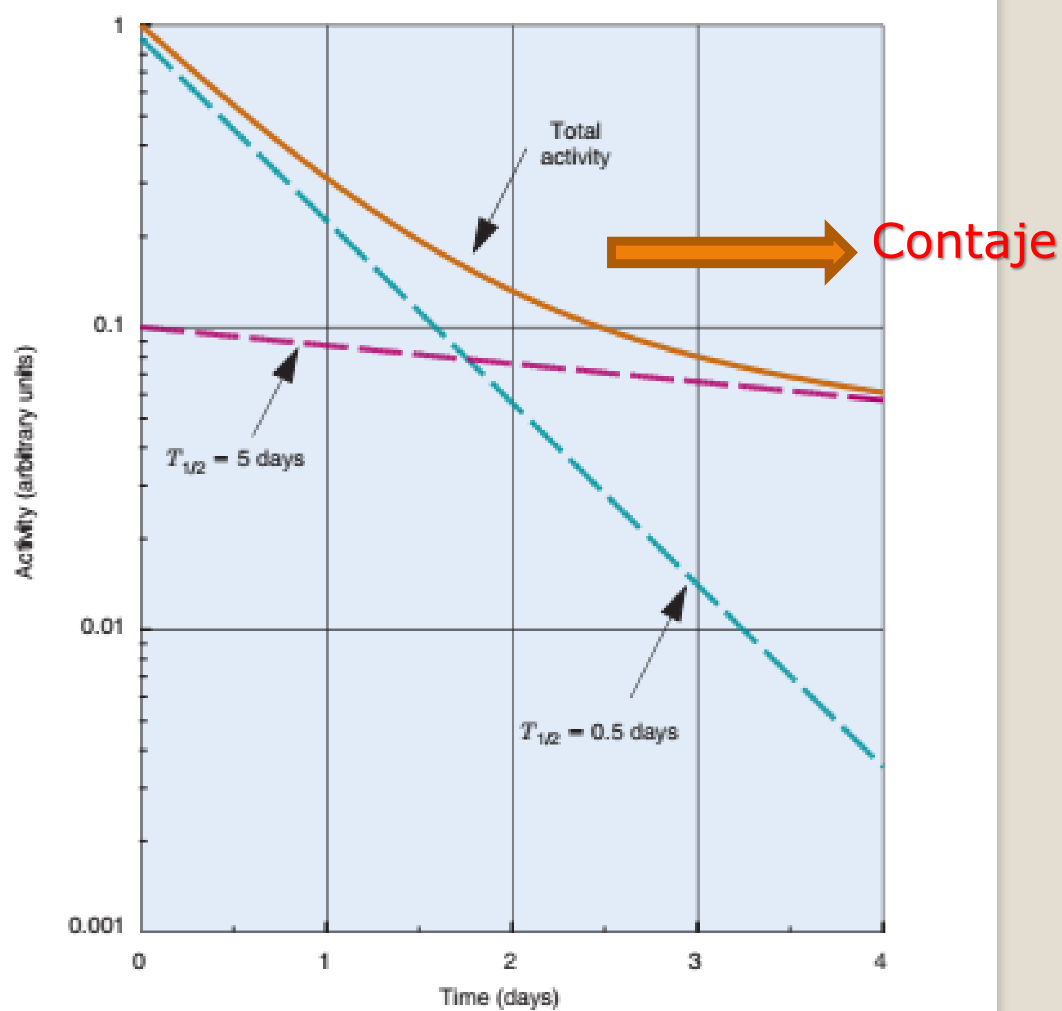
Equilibrio secular



Mezcla de nucleidos

Si en una muestra hay presentes dos o más nucleidos las cuentas medidas incluyen el contaje de nucleido individual:

$$A_{total}(t) = A_1(t) + A_2(t)$$



Generalización

Algunas veces es necesario considerar toda una serie de decaimientos. El correspondiente análisis puede ser tratado en forma analítica resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, llamadas usualmente *ecuaciones de Bateman*.

Si consideramos la serie de *k* decaimientos:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \ldots \rightarrow k$$

la variación con el tiempo del nucleido *i* está dada por,

$$dN_i/dt = \lambda_{i-1} N_{i-1}(t) - \lambda_i N_i(t)$$

que es la i-ésima ecuación del conjunto acoplado de ecuaciones. Suponiendo que para t = 0 sólo $N_1(0) \neq 0$,
la integración de las ecuaciones da por resultado:

$$A_n = N_0 \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i} t; \quad c_m = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{m \neq i=1}^{n} (\lambda_m - \lambda_n)}$$

$$A_n = \lambda_n N_n(t)$$