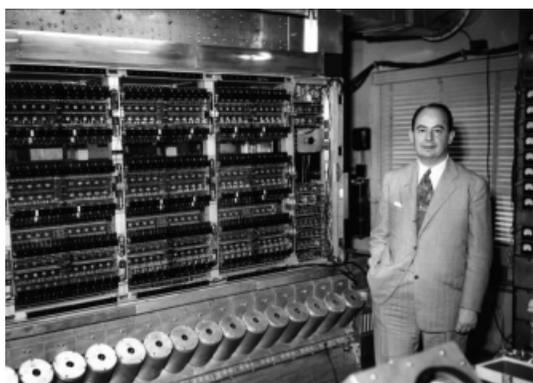


Mecánica Estadística. Clase 10. Estadística en sistemas cuánticos.

Prof. Juan Mauricio Matera

21/04/2025

Sistemas cuánticos



John von Neumann
1903 - 1957

Para discutir el formalismo de la mecánica estadística en el contexto de la mecánica cuántica, vamos a comenzar por revisar algunas cuestiones fundamentales sobre cómo se modelan distribuciones de probabilidades a partir de modelos definidos en el marco de la mecánica cuántica. Buena parte de este marco teórico fue desarrollado por John von Neumann a fines de la década de 1920, y condensado en el trabajo *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica* publicado en 1932.

Estados y medidas

En mecánica clásica, la distribución de probabilidad $f_O(w)$ de cualquier observable O se expresa en términos de la distribución de probabilidades acumulada $F_O(w)$ sobre el espacio de fases:

$$F_W(w) = \int \Theta(w - W(\xi)) f(\xi) d^{3N} \xi$$

con $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ la *función escalón*, $W(\xi)$ el valor del observable W en el entorno del punto ξ del espacio de fases, y $f(\xi)$ la distribución de probabilidades para el sistema.

Recordemos que dada la distribución acumulada $F_O(w)$, la distribución de probabilidades se expresa como

$$f_O(w) = \frac{\partial}{\partial w} F_O(w)$$

donde la derivada se evalúa como *distribución*¹.

¹La derivada de una distribución $F(w)$ es una distribución $f(w) = \frac{\partial}{\partial w} F(w)$ tal que

$$\int f(w) \varphi(w) dw = \int -F(w) \frac{\partial}{\partial w} \varphi(w) dw =$$

para cualquier función suave $\varphi(w)$, integrable en el dominio.

En mecánica cuántica, para dar cuenta del principio de incerteza, y de los efectos de *interferencia estadística*, es necesario modificar esta prescripción para describir las distribuciones de probabilidad para las cantidades observables.

En primer lugar, los estados del sistema ya no están representados por puntos en el espacio de fases, sino por vectores normalizados en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Dados dos estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$, existen también otros estados

$$\frac{a|\psi\rangle + b|\phi\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2\Re a^* b \langle \phi | \psi \rangle}}$$

con a y b números complejos. Dos estados del sistema $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son distintos si $|\psi\rangle \neq \alpha|\phi\rangle$ para alguna constante compleja α .

Notemos que el espacio de Hilbert \mathcal{H} es mucho más *grande* que el espacio de fases. Si el espacio de configuraciones de un sistema mecánico tiene dimensión d , su espacio de fases tiene dimensión $2d$, mientras que el espacio de Hilbert asociado corresponde al espacio de funciones complejas sobre el espacio de configuraciones $\mathcal{H} = \{\psi/\psi : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{C}, \int \psi^*(\xi)\psi(\xi)d^d\xi = 1\}$ que es un espacio de dimensión infinita.

Dado un cierto experimento, la distribución de probabilidades para sus resultados queda definida por un conjunto de operadores no negativos $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_\alpha\}$ tales que

$$\sum_{\alpha} \mathbf{M}_\alpha = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$$

el *operador identidad* asociado a \mathcal{H} . De esta manera, si el sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$, el resultado α tiene asociada una probabilidad

$$p_\alpha = \langle \psi | \mathbf{M}_\alpha | \psi \rangle$$

Decimos entonces que $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_\alpha\}$ define una Medida Valuada en Operadores Positivos (Positive Operator-Valued Measure, POVM)²

Decimos que una POVM es una *medida proyectiva* si $\mathbf{M}_a \mathbf{M}_b = \delta_{ab} \mathbf{M}_a$ de manera que $\{\mathbf{M}_a\}$ representa un conjunto de *proyectores ortogonales*. Cuando esto ocurre, podemos definir una medida $\{\mathbf{C}_{ab}\}$ definida por

$$\mathbf{C}_{ab} = \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b = \mathbf{C}_{ab}^\dagger$$

cuya distribución de probabilidades resulta

$$p_{a,b} = \langle \psi | \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b | \psi \rangle = p_a \delta_{ab}$$

Ejemplo 1: sistema de dos estados

Supongamos que el espacio de Hilbert de un sistema es *bidimensional*

$$\mathcal{H} = \{|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle / \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

con $\langle 0|1\rangle = 0$ y $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$, de manera que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Podemos definir una medida básica como

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0 = |0\rangle\langle 0|, \mathbf{M}_1 = |1\rangle\langle 1|\}$$

que es una *medida proyectiva*.

Si el estado del sistema es $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, la probabilidad de obtener el resultado asociado a \mathbf{M}_0 es

$$\langle \psi | \mathbf{M}_0 | \psi \rangle = \alpha^2$$

²

Recordemos que un operador $\mathbf{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es *positivo* si

$$\langle \psi | \mathbf{P} | \psi \rangle > 0$$

para cualquier vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, y *no negativo* si la desigualdad no es estricta. Esto implica que la cantidad $\langle \psi | \mathbf{P} | \psi \rangle$ debe ser *real* para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ y por lo tanto,

$$\langle \psi | \mathbf{P} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \mathbf{P}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{P} | \psi \rangle$$

de manera que $\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}$ es un *operador autoadjunto*.

En particular, si $\beta = 0$, obtendremos ese resultado con certeza. Por otro lado, si $|\alpha|^2 = 1/2$, el resultado que obtengamos será completamente al azar.

Podemos considerar por otro lado una medida de la forma

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_1 = s|1\rangle\langle 1|, \mathbf{M}_2 = s \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2}, \mathbf{M}_3 = \mathbf{1} - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\}$$

con $\frac{1}{1+1/\sqrt{2}} \leq s > 0$, de manera que $\mathbf{M}_i \geq 0$.

Esta medida está optimizada para discriminar el estado $|0\rangle$ del $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$). Para un estado genérico obtenemos las probabilidades

$$\begin{aligned} p_1 &= s|\beta|^2 \\ p_2 &= s \frac{|\alpha - \beta|^2}{2} \\ p_3 &= 1 - s \left(\frac{|\alpha - \beta|^2 + |\beta|^2}{2} \right) \end{aligned}$$

En particular, para el estado $|0\rangle$ obtenemos $p_1 = 0$, $p_2 = s/2$ y $p_3 = (1-s)/2$, mientras que para el estado $|+\rangle$, $p_1 = s/2$, $p_2 = 0$ y $p_3 = (1-s)/2$. De esta manera, estableciendo la *política* de asumir que cuando el resultado es \mathbf{M}_1 el estado debe ser $|+\rangle$, cuando el resultado es \mathbf{M}_2 el estado debe ser $|0\rangle$, y eligiendo al azar en el caso \mathbf{M}_3 , tengo una probabilidad de equivocarme de $p_{error} = \frac{1-s}{4} > \frac{1-1/(1+\sqrt{2})}{4} \approx 0.103$ (suponiendo que ambos estados se produzcan con la misma probabilidad *a priori*). Ejercicio: probarlo.

Ejemplo 2: distribuciones en el espacio de coordenadas

Consideremos un sistema con una coordenada espacial *continua* x . El espacio de Hilbert de sistema se puede asociar al de las funciones de cuadrado integrable en \mathcal{R} a valores complejos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2 = \{\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int |\psi(x)|^2 dx < \infty\}$$

Una posible POVM consistiría entonces en

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_{dentro} = \Theta((L/2)^2 - x^2), \mathbf{M}_{fuera} = \Theta(x^2 - (L/2)^2)\}$$

con $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ la *función escalón*. Los operadores \mathbf{M}_i son *multiplicativos* ya que actúan multiplicando la función de onda por una función de su argumento.

Esta medida representa el experimento de determinar si el sistema se encuentra dentro o fuera de la región $|x| < L$. Dada una función $\psi(x) \in \mathcal{H}$, la probabilidad de que la partícula se encuentre *dentro* viene dada por

$$p_{dentro} = \int \psi^*(x) \mathbf{M}_{dentro} \psi(x) dx = \int_{-L/2}^{L/2} |\psi(x)|^2 dx$$

Observamos que esta es una *medida proyectiva*, ya que $\mathbf{M}_i^2 \psi(x) = \mathbf{M}_i \psi(x)$ (ya que la función escalón sólo toma los valores 1 y 0) y $\mathbf{M}_{dentro} \mathbf{M}_{fuera} \psi(x)$ se anula para todo x .

Otro ejemplo de medida viene dada por $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1\}$ con

$$\mathbf{M}_0 \psi(x) = \int \frac{\sin(k_0(x-x')/2)}{\pi(x-x')} \psi(x') dx'$$

y $\mathbf{M}_1 = \mathbf{1} - \mathbf{M}_0$.

En este caso \mathbf{M}_i son operadores *convolucionales*, porque actúan sobre una función como la *convolución* con una *función núcleo*. La probabilidad de obtener el resultado asociado a \mathbf{M}_0 viene dada por

$$p_0 = \iint \frac{\sin(k_0(x-x')/2)}{\pi(x-x')} \psi^*(x) \psi(x') dx dx'$$

Como el núcleo puede expresarse como

$$\frac{2 \sin(k_0(x-x')/2)}{x-x'} = \int_{-k_0/2}^{k_0/2} \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi} dk$$

la probabilidad se expresa como

$$p_0 = \int_{-k_0/2}^{k_0/2} \tilde{\psi}^*(k) \tilde{\psi}(k) dk$$

con $\tilde{\psi}(k) = \int e^{-ikx} \psi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ la *transformada de Fourier* de la función de onda original.

Observables

Si asignamos números reales λ_α a cada resultado, el *valor medio* de los resultados se expresa como

$$\langle \lambda_\alpha \rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha = \langle \psi | \mathbf{Q} | \psi \rangle$$

con $\mathbf{Q} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{M}_\alpha = \Lambda^\dagger$ un *operador hermítico*.

Notamos que para cada operador autoadjunto $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\dagger$, su descomposición espectral

$$\mathbf{Q} = \sum_\alpha \mu_\alpha \Pi_\alpha$$

define una medida proyectiva $\{\Pi_\alpha\}$, con Π_α el proyector sobre el espacio propio asociado al autovalor μ_α .

Probabilidades conjuntas y medidas compatibles

Dada una POVM $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_{ab}\}$, podemos definir sus marginales $\mathcal{M}^{(A)} = \{\mathbf{M}_a^{(A)}\}$ y $\mathcal{M}^{(B)} = \{\mathbf{M}_b^{(B)}\}$ como

$$\mathbf{M}_a^{(A)} = \sum_b \mathbf{M}_{ab}$$

$$\mathbf{M}_b^{(B)} = \sum_a \mathbf{M}_{ab}$$

que son naturalmente operadores positivos que satisfacen

$$\sum_a \mathbf{M}_a^{(A)} = \sum_b \mathbf{M}_b^{(B)} = \sum_{ab} \mathbf{M}_{ab} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$$

de manera que para cualquier estado, $p_a = \langle \psi | \mathbf{M}_a^{(A)} | \psi \rangle = \sum_{ab} p_{ab}$ representa la probabilidad marginal asociada a p_{ab} .

Supongamos ahora que tenemos dos POVM $\mathcal{M}^{(A)} = \{M_a^{(A)}\}$ y $\mathcal{M}^{(B)} = \{M_b^{(B)}\}$. Decimos que ambas medidas $\mathcal{M}^{(A)}$ y $\mathcal{M}^{(B)}$ son *compatibles* si $[\mathbf{M}_a^{(A)}, \mathbf{M}_b^{(B)}] = 0$ para todo a, b . En tal caso, los operadores

$$\mathbf{M}_{ab} = \mathbf{M}_a^{(A)} \mathbf{M}_b^{(B)}$$

resultan también ser no-negativos, y

$$\sum_{ab} \mathbf{M}_{ab} = \sum_a \mathbf{M}_a^{(A)} \sum_b \mathbf{M}_b^{(B)} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$$

también es una resolución de la identidad, por lo que $\mathcal{M}^{(AB)} = \{\mathbf{M}_{ab}\}$ es una POVM, cuyos marginales son $\mathcal{M}^{(A)}$ y $\mathcal{M}^{(B)}$.

En particular, toda medida proyectiva es compatible consigo misma, de manera que $\{\Pi_{ab} = \Pi_a \Pi_b\}$ satisface para cualquier estado

$$p_{ab} = \langle \psi | \Pi_{ab} | \psi \rangle = \langle \psi | \Pi_a | \psi \rangle \delta_{ab}$$

con lo que los resultados a, b se encuentran perfectamente correlacionados.

Esta propiedad está relacionada con el llamado *postulado de la medida*:

El resultado de medir una cantidad observable \mathbf{Q} es siempre uno de sus autovalores μ_α e, inmediatamente luego de la medida, el estado del sistema resulta ser el estado inicial, proyectado al espacio propio de ese autovalor.

Desde el punto de vista de las distribuciones de probabilidad, podemos entender este enunciado en el sentido de que la distribución de probabilidades para el observable \mathbf{Q} correspondiente a la medida proyectiva definida por su *descomposición espectral* está perfectamente correlacionada consigo misma, y por lo tanto, una vez que obtenemos un valor μ_α , observaciones repetidas volverán a dar exactamente el mismo resultado.

Decimos que una medida $\{\mathbf{M}_{ab\dots}\}$ es *completa* si está perfectamente correlacionada consigo misma, y toda otra medida compatible $\{C\}_{rs\dots}$ puede expresarse como un *marginal* de la primera. En tal caso, $\{\mathbf{M}_{ab\dots}\}$ es una *medida proyectiva*, y sus proyectores son todos de *rango* 1, esto es, $\mathbf{M}_{ab\dots}$ puede expresarse como

$$\mathbf{M}_{ab\dots} = |ab\dots\rangle\langle ab\dots|$$

con $|ab\dots\rangle$ su único autovector con autovalor no nulo. De esta manera, cualquier base ortonormal de \mathcal{H} define una medida completa.

Notamos que si el sistema se encuentra en uno de dos estados ortogonales $|1\rangle, |2\rangle/\langle 1|2\rangle = 0$, entonces existe una medida que permite distinguirlos en forma determinista en una única medida. En particular, $\mathbf{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{1} - \mathbf{M}_1$ es una medida proyectiva que discrimina ambos estados con certeza:

$$p_{1|1} = \langle 1|\mathbf{M}_1|1\rangle = p_{2|2} = 1$$

$$p_{2|1} = \langle 1|\mathbf{M}_2|1\rangle = p_{1|2} = 0$$

Por otro lado, dos estados no ortogonales no pueden distinguirse con certeza mediante ninguna medida: Por ejemplo $|\psi\rangle = \frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}$ no puede distinguirse con certeza del estado $|1\rangle$. Lo mejor que podemos hacer es construir una POVM tal que los discrimine con cierta probabilidad. Por ejemplo, usando la medida anterior,

$$p_{1|1} = \langle 1|\mathbf{M}_1|1\rangle = 1 \quad p_{1|\psi} = \langle \psi|\mathbf{M}_1|\psi\rangle = \frac{1}{2}$$

$$p_{2|1} = \langle 1|\mathbf{M}_2|1\rangle = 0 \quad p_{2|\psi} = \langle \psi|\mathbf{M}_2|\psi\rangle = \frac{1}{2}$$

De esta manera, obtener como resultado “2” nos permite saber con certeza que se trata del estado $|\psi\rangle$, pero sólo obtendremos este resultado la mitad de las veces, mientras que el resultado “1” sólo nos dice que es *más probable* que el estado sea $|1\rangle$, pero hay ciertas chances de equivocarnos.

Estados mezcla y Operador Densidad

Supongamos ahora que el estado del sistema se extrae de un ensamble de sistemas igualmente preparados $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_i\rangle, \dots\}$, cada uno con una probabilidad q_i . La distribución de probabilidades para una POVM $\{\mathbf{M}_a\}$ resulta entonces la *mezcla estadística* de las distribuciones para cada elección del estado:

$$p_a = \sum_i q_i \langle \psi_i|\mathbf{M}_a|\psi_i\rangle$$

Podemos reescribir esta expresión escribiendo $\langle \psi_i|\mathbf{M}_a|\psi_i\rangle$ en términos de las componentes de $\langle \psi_i|$ y $|ai\rangle = \mathbf{M}_a|\psi_i\rangle$ en una base ortonormal $|\varphi_j\rangle$ de \mathcal{H} :

$$p_a = \sum_i q_i \sum_j \langle \psi_i|\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|\mathbf{M}_a|\psi_i\rangle$$

Intercambiando el orden de las sumas y productos,

$$p_a = \sum_j \sum_i q_i \langle \varphi_j|\mathbf{M}_a|\psi_i\rangle \langle \psi_i|\varphi_j\rangle = \sum_j \langle \varphi_j|\mathbf{M}_a \left(\sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) |\varphi_j\rangle$$

Finalmente, introduciendo la noción de *traza* de un operador

$$\text{Tr} \mathbf{A} = \sum_j \langle \varphi_j | \mathbf{A} | \varphi_j \rangle$$

podemos expresar las probabilidades p_a como

$$p_a = \text{Tr} \mathbf{M}_a \rho$$

con

$$\rho = \sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

el *operador densidad* asociado al (ensamble al que pertenece el) sistema. El *operador densidad* es por construcción un operador no negativo, y por lo tanto, autoadjunto, por lo que admite una descomposición espectral

$$\rho = \sum_k \lambda_k |\xi_k\rangle \langle \xi_k|$$

con $\{|\xi_k\rangle\}$ otra base ortonormal de \mathcal{H} y $0 \leq \lambda_k \leq 1$. Por construcción,

$$\text{Tr} \rho = \sum_k \langle \xi_k | \rho | \xi_k \rangle = \sum_k \lambda_k = 1$$

Observamos que la distribución de probabilidad asociada a cualquier experimento depende del operador densidad del sistema, de manera semejante a como lo hacía de la distribución de probabilidades para las coordenadas en el espacio de fases.

Dado el operador densidad expresado en una base $\{|a\rangle\}$ podemos interpretar los elementos diagonales $p_a = \langle a | \rho | a \rangle$ como la distribución de probabilidades para la *medida proyectiva* asociada a esa base ($\Pi_a = |a\rangle \langle a|$). Llamamos a los elementos fuera de la diagonal $\langle a | \rho | a' \rangle$ las *coherencias* del operador densidad respecto a esa base.

| Característica | Estado puro ($ \rangle$) | Operador densidad (ρ) |
|----------------|----------------------------|---------------------------------|
| Es | un vector | un operador positivo |
| Pertenece a | \mathcal{H} | $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ |
| Describe | estados definidos | mezclas estadísticas(ensambles) |
| Análogo en | ξ | $p(\xi)$ |
| Mec. clásica | | |
| comb. lineales | interferencia | mezclas estadísticas |

Entropía de una medida y entropía de un estado

Dada una *POVM* \mathcal{M} y un estado ρ , podemos construir la entropía de la correspondiente distribución de probabilidades como

$$S(\{p_a\}) = S(\mathcal{M}, \rho) = - \sum_a p_a \ln p_a$$

pero las probabilidades p_i se expresan en términos de la descomposición espectral de ρ como

$$p_a = \sum_k q_k w_{ka}$$

con $w_{ka} = \langle \xi_k | \mathbf{M}_a | \xi_k \rangle$ la probabilidad del resultado a respecto al autoestado k . Si \mathcal{M} es una medida *completa*, entonces $\mathbf{M}_a = |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a|$ para una base ortonormal $|\varphi_a\rangle$. En tal caso, podemos probar que $S(\{p_a\})$ es al menos la entropía de la distribución q_α asociada a los autoestados de ρ :

$$S(\{p_a\}) \geq S(\{q_k\})$$

Pero $S(\{q_k\}) = \text{Tr} - \rho \ln \rho$, cantidad a la que se denomina *entropía de von Neumann*.

Prueba: La entropía $S(\{p_a\})$ puede escribirse como

$$S(\{p_a\}) = \sum_a \eta(p_a)$$

con $\eta(x) = -x \ln x$, que es una función *cóncava*. Luego, introduciendo las normalizaciones $w_a = \sum_k w_{ka}$, y usando la concavidad de η ,

$$S(\{p_a\}) = \sum_a \eta\left(\sum_k q_k w_a \frac{w_{ka}}{w_a}\right) \quad (1)$$

$$\geq \sum_a \sum_k \frac{w_{ka}}{w_a} \eta(q_k w_a) \quad (2)$$

$$= \sum_k \sum_a w_{ka} \eta(q_k) + \sum_a \eta(w_a) \sum_k \frac{w_{ka}}{w_a} q_k \quad (3)$$

$$= \sum_k \eta(q_k) + \sum_a \eta(w_a) \sum_k \frac{w_{ka}}{w_a} q_k \quad (4)$$

$$\geq S(\{q_k\}) \quad (5)$$

donde en la segunda línea usamos la concavidad de $\eta(x)$, en la tercera la propiedad $\eta(ab) = a\eta(b) + b\eta(a)$, en la cuarta la relación de completitud $\sum_a w_{ka} = \langle k | \sum_a \mathbf{M}_a | k \rangle = \langle k | k \rangle = 1$ y que para una medida completa $0 \leq w_{ka} = |\langle k | \varphi_a \rangle|^2 \leq 1$, de manera que $\eta(w_a) > 0$.

Sistemas compuestos

Supongamos ahora que tenemos varios sistemas cuánticos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$. Definimos el espacio producto $\mathcal{H}^{\otimes} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots$ al espacio generado por los vectores

$$|\psi_1, \psi_2, \dots\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots$$

Sobre este espacio se definen los operadores producto tensorial $\mathbf{O} = \mathbf{o}_1 \otimes \mathbf{o}_2 \dots$

$$\mathbf{O} = \mathbf{o}_1 \otimes \mathbf{o}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{o}_i \otimes \dots$$

de manera que

$$\mathbf{O}|\psi_1 \psi_2 \dots\rangle = (\mathbf{o}_1|\psi_1\rangle) \otimes (\mathbf{o}_2|\psi_2\rangle) \otimes \dots \otimes (\mathbf{o}_i|\psi_i\rangle) \otimes \dots$$

En particular, decimos que un observable es local en el sitio i si actúa sólo sobre ese sitio $\mathbf{O}_i = \mathbf{1}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{o}_i \otimes \dots$. Estos operadores generan el *álgebra de observables* del sistema completo, ya que todo observable puede escribirse como suma de productos de operadores locales. Llamamos *subsistema* a cualquier subconjunto de los sistemas que componen al sistema global. Dos operadores que actúan sobre subsistemas disjuntos siempre conmutan:

$$\mathbf{O}_i \mathbf{O}_j = (\mathbf{1}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{o}_i \otimes \dots)(\mathbf{1}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{o}_j \otimes \dots)(\mathbf{1}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{o}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{o}_j \otimes \dots) = \mathbf{O}_j \mathbf{O}_i$$

Una *POVM local* consiste en una POVM definida por operadores locales. Dos *POVM locales* actuando sobre sub-sistemas distintos resultan ser siempre compatibles, ya que necesariamente cualquier par de operadores conmutan.

La distribución de probabilidades de toda POVM local asociada a un subsistema A , y por lo tanto, el valor medio de cualquier observable \mathbf{Q}_A , queda determinado por el *estado reducido* ρ_A del sistema local. Este estado puede describirse en términos de la *traza parcial*:

$$\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}} \rho = \sum_{klm} |\varphi_k^A\rangle \langle \varphi_l^A| \langle \varphi_k^A \varphi_m^{\bar{A}} | \rho | \varphi_l^A \varphi_m^{\bar{A}} \rangle$$

con $|\varphi_k^A \varphi_m^{\bar{A}}\rangle = |\varphi_k^A\rangle \otimes |\varphi_m^{\bar{A}}\rangle$ una *base producto* de bases ortonormales $\{|\varphi_k^A\rangle\}$ de A y $\{|\varphi_m^{\bar{A}}\rangle\}$ de \bar{A} .

Luego, si $\mathbf{Q}_A = \mathbf{q}_A \otimes \mathbf{1}_{\bar{A}}$,

$$\langle \mathbf{Q}_A \rangle_\rho = \text{Tr} \mathbf{Q}_A \rho = \text{Tr} \mathbf{q}_A \text{Tr}_A \rho = \text{Tr} \mathbf{q}_A \rho_A = \langle \mathbf{q}_A \rangle_{\rho_A}$$

Correlaciones clásicas, cuánticas y estados producto.

Dados dos observables \mathbf{Q}_A y \mathbf{Q}_B , decimos que se encuentran correlacionados si

$$\langle \{\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B\} \rangle_\rho \neq \langle \mathbf{Q}_A \rangle_\rho \langle \mathbf{Q}_B \rangle_\rho$$

con

$$\{\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B\} = \mathbf{Q}_A \mathbf{Q}_B + \mathbf{Q}_B \mathbf{Q}_A$$

el *anticommutador* de los operadores \mathbf{Q}_A y \mathbf{Q}_B .

En general, todo operador se encuentra correlacionado consigo mismo ya que

$$\langle \mathbf{Q}^2 \rangle - \langle \mathbf{Q} \rangle^2 \geq 0$$

con la igualdad alcanzándose sólo si \mathbf{Q} tiene un *valor definido* para el estado ρ .

En general, decimos que dos subsistemas \mathbf{A} y \mathbf{B} están descorrelacionados si la distribución de probabilidad conjunta asociada a cualquier medida $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A \mathcal{M}_B$ lo está:

$$p_{ab} = \text{Tr} \mathbf{M}_a^{(A)} \mathbf{M}_b^{(B)} \rho_{AB} = (\text{Tr} \mathbf{M}_a^{(A)} \rho_A) (\text{Tr} \mathbf{M}_b^{(B)} \rho_B) = p_a p_b$$

esto ocurre sólo si ρ es un *estado producto*:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

Por otro lado, si ρ_{AB} admite descomponerse como $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i$ con ρ_i *estados producto* $\rho_i = \rho_{iA} \otimes \rho_{iB}$, decimos que ρ_{AB} es un *estado separable*. Si no lo hace, decimos que es un *estado entrelazado*.

En el otro extremo, si $[\rho_i, \rho_j] = 0$, esto es, si ρ_{AB} es una mezcla estadística de estados producto que conmutan, decimos que ρ está *clásicamente correlacionado*.

Para el caso de un estado puro, $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ es la única descomposición posible para el estado. En este caso, si el estado no es producto, entonces sólo puede ser un estado entrelazado, y puede escribirse en general como

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{\chi_i} |\xi_i\rangle_A |\xi_i\rangle_{\bar{A}}$$

con χ_i los autovalores de la matriz densidad reducida $\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}} \rho_{AB}$ y $|\xi_i\rangle_A$ sus correspondientes autovectores. Esta descomposición se conoce como *descomposición de Schmidt*. Para un estado producto, ρ_A es un estado puro, y por lo tanto su entropía se anula. En general, la entropía del estado local es una medida del entrelazamiento entre dos partes complementarias para un sistema en un estado puro.