F.- Aproximación de Stirling.

La fórmula de Stirling nos permite calcular el valor aproximado de ln$N$!, cuando N es muy grande, mediante la expresión:

$$\ln N! \approx N \ln N - N \qquad \text{[F.1]}$$

Para demostrar la fórmula de Stirling, comenzaremos desarrollado la función ln$N$! del modo siguiente:

$$\ln N! = \ln \prod_{i=1}^{N} (N - i + 1) = \sum_{i=1}^{N} \ln (N - i + 1) = \ln N + \ln (N - 1) + \ldots + \ln 2 \qquad \text{[F.2]}$$

La suma de los términos del último miembro de esta expresión corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos indicados en la Figura F.1, todos ellos de base unitaria, cuyas alturas respectivas son ln2, ln3, ln4,... ln$N$. En el caso de que N sea muy grande, este área es aproximadamente igual a la comprendidad entre la la curva y=ln$x$ y las ordenadas extremas en los puntos x=1 y x=N+1, ya que en estas condiciones el área no

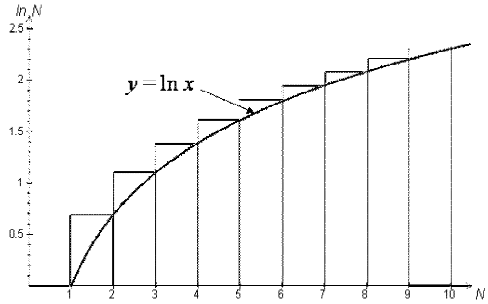

Figura F.1

considerada (sombreada) es despreciable en comparación con el área delimitada debajo de la curva. Así pues, tenemos

$$\ln N! \approx \int_1^N \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{[F.3]}$$

que integrada "por partes" nos conduce a

$$\ln N! \approx N \ln N - N + 1 \qquad \text{[F.4]}$$

y, puesto que estamos considerando valores de N»1, puede despreciarse 1 frente a N en la expresión anterior, resultando:

$$\ln N! \approx N \ln N - N \qquad \text{[F.5]}$$

que es la fórmula correspondiente a la aproximación de Stirling.