Taller de Matemáticas 2019

Estos apuntes fueron confeccionados específicamente para el Taller de Matemáticas a dictarse en el año 2019 y su contenido está basado en notas de distintos cursos de ingreso de esta casa de estudios. Agradecemos a Adriana Galli por habernos facilitado dicho material.

Índice general

Palabras Iniciales

Pensamos este taller como una forma de prepararte para las materias del primer año de la carrera. Una suerte de entrenamiento que te ayudará a comenzar las cursadas con las habilidades necesarias para que puedas enfocarte en los contenidos nuevos e importantes de cada una de las asignaturas que curses.

Nuestro principal objetivo será recordar, repasar y aprender nociones básicas de matemáticas, cuyo manejo te va a resultar imprescindible durante el resto de tu formación. La manera de lograrlo es simple, aunque pueda requerir cierto esfuerzo: ¡Sólo hay que practicar, practicar y practicar! La ejercitación es la manera de incorporar las operaciones y métodos que luego te resultarán simples y evidentes.

Es por esto que en este material vas a encontrar muchos ejercicios, de distinta complejidad, que te ayudarán en esta "puesta a punto". Pero como tampoco es cuestión de ponerse a hacer cuentas sin entender qué es lo que se busca en cada caso, cada tema comienza con una introducción teórica que te servirá de guía durante el transcurso de este taller.

Si bien todos los ejercicios presentes en estas notas son importantes, al final de cada capítulo se presentará una lista con una selección parcial de ejercicios, los cuales (bajo un criterio subjetivo) hemos considerado más relevantes para un primer abordaje al tema. El resto de la ejercitación queda por tanto como opcional.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

El objetivo de este capítulo es recordar algunos conceptos básicos de las operaciones que se realizan con **números naturales, enteros, racionales y reales**. Para ello los ejercicios propuestos NO deben realizarse con calculadora. Se deben escribir todos los pasos necesarios para su realización. Terminado este capítulo, el alumno debería ser capaz de realizar las operaciones algebraicas, que aparecen en la resolución de problemas de los cursos del primer año, con total fluidez y confianza.

1.1. Números Naturales

Los números son la base de la Matemática actual. Ahora bien, ¿qué es un número? Creados por la mente humana para contar objetos agrupados de diversos modos, los números no tienen referencia alguna a las características de los objetos contados. El número 10, por ejemplo, es una abstracción obtenida a partir de todas las colecciones que contienen 10 cosas, no dependen de las cualidades de dichas cosas, ni de los símbolos utilizados para representarlas.
Para los niños los números están ligados a objetos tangibles, en etapas más avanzadas del desarrollo intelectual se percibe el carácter abstracto de la idea de número. La Matemática no se ocupa del aspecto filosófico de la transición que da el paso de las colecciones de objetos concretos al concepto de número.

Consideremos como dados los **números naturales** 0,1,2,3,....... , al conjunto de todos ellos lo designaremos por $\mathbb{N}$.

También consideramos como definidas las operaciones fundamentales de suma y producto. <u>Recordemos</u> algunas propiedades importantes de estas operaciones:

1. **La suma de dos números naturales es un número natural**.

   También podemos formularla como sigue:

Si a y b son números naturales entonces $a+b$ es un número natural.

   Esta propiedad se llama **ley de cierre** o **de clausura para la suma de números naturales**.

2. **El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica**.

   Esto lo podemos expresar:

El 0 es un número natural tal que si a es un número natural cualquiera entonces $a + 0 = a$.

   Por eso al 0 se le dice **neutro de la suma**.

3. **Si se consideran tres números naturales, la suma de los dos primeros más el tercero resulta igual a que si al primero se suma la suma de los otros dos**.

   Se puede formular:

Si a, b y c son números naturales cualesquiera entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   A esta propiedad se le da el nombre de **asociativa para la suma**.

4. **La suma de números naturales es conmutativa**.

   Es decir:

Si a y b son números naturales cualesquiera entonces $a + b = b + a$.

Ejercicios

1. Verificar las propiedades 1, 2, 3 y 4. Siendo $a = 3$, $b = 90$, $c = 40$

2. *a*) Enuncie la propiedad similar a la 1) para el producto de los números naturales. Sol: **El producto de dos números naturales es un número natural.**

   b) ¿Hay elemento neutro para el producto de números naturales? ¿Cuál es? Ejemplifique.

   c) Formule la propiedad asociativa del producto de números naturales.

   d) ¿Es cierto que el orden de los factores no altera el producto? ¿Cómo se llama esa propiedad?

3. Verifique las propiedades del producto para $a = 5$, $b = 7$, $c = 13$.

   Otra propiedad que debemos recordar es la **distributiva del producto en la suma de números naturales**, es decir:

Si a, b, c son números naturales cualesquiera entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

4. Verifique la propiedad distributiva del producto en la suma de números naturales para $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$.

   Dados dos números naturales a y b puede suceder que $a \leq b$, lo que significa que a “aparece” antes que b en la sucesión de todos los números naturales, o es igual. En caso contrario $b < a$.

Recordemos que:

si a, b son números naturales y $a \leq b$ entonces **existe un número natural** c, llamado **resta** o **diferencia de** b **y** a, que se anota $c = b - a$ el cual verifica $b = a + c$.

Es importante que recordemos las **leyes de monotonía de la suma y del producto de números naturales:**

Dados los números naturales a**,** b**,** c **cualesquiera si se verifica que** $a \leq b$ entonces:

$$a + c \leq b + c$$

$$a \cdot c \leq b \cdot c$$

5. *a*) Verifique la propiedad de monotonía de la suma para cuatro casos.

   b) Verifique la propiedad de monotonía del producto para cuatro casos

Recordemos que se dice que :

el número natural b **divide a un número natural** a si **existe un número natural** c tal que $b \cdot c = a$ en ese caso también se dice que el número a **es múltiplo de** b o que a **es divisible por** b. El número c es el **cociente**.

Por ejemplo: 4 divide a 12, pues existe 3 tal que $12 = 4 \cdot 3$. En este caso 3 es el cociente.

6. *a*) Justifique las siguientes afirmaciones:
   3 divide a 9, pues..................................
   25 divide a 100, pues ....
   18 es múltiplo de 2, pues........................
   42 es múltiplo de 7, pues.............
   1 divide a 10,pues............
   5 divide a 0, pues............
   18 es divisible por 9, pues.........

   b) ¿Hay algún número natural que no sea divisible por 1?

   c) Dé al menos 5 números naturales que sean múltiplo de 7.

   d) Dé al menos 5 números naturales que sean divisibles por 2.

¿Qué pasa cuando un número natural no es divisible por otro?

El número 7 no es divisible por 3 ya que:

$$3 \cdot 0 = 0\,, \quad 3 \cdot 1 = 3\,, \quad 3 \cdot 2 = 6\,, \quad 3 \cdot 3 = 9$$

y como vale la propiedad de monotonía del producto $3 \cdot 4$, $3 \cdot 5$, etc., serán más grandes que 9.

Luego para cualquier natural a, $3 \cdot a$ no será 7.

Lo que si vale es que $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

Tampoco 8 es divisible por 3; si se verifica $8 = 3 \cdot 2 + 2$.

En general, si a y b son números naturales y $b \neq 0$ siempre existen un número natural c y un número natural r que verifican que:

$$a = b \cdot c + r \quad \text{con} \;\; 0 \leq r < b$$

Al número c se lo llama **cociente** y a r se lo llama **resto**. Ellos son únicos en esas condiciones.

Ejemplo 1. El 10 de mayo de 2015 las hermanas María y Juana comenzaron a ahorrar. María comenzó con \$12 y Juana con \$18. María se propuso ahorrar \$4 todos los 1° de mes, por su parte Juana \$3 los 1° de mes. Ellas registraron sus ahorros en la tabla siguiente:

FECHA (MES)	Total ahorrado por María	Total ahorrado por Juana
Mayo	12	18
Junio	16	21
Julio	20	24
Agosto	24	27
Septiembre	28	30
Octubre	32	33
Noviembre	36	36
Diciembre	40	39

Observando la tabla se pueden establecer las siguientes conclusiones: en agosto de 2015 María ha duplicado su ahorro inicial ($TOT = 2 \cdot 12 = 24 = 12 + 3 \cdot 4$), en noviembre de 2015 Juana duplicó su ahorro inicial ($TOT = 36 = 2 \cdot 18 = 18 + 3 \cdot 6$); también en noviembre ambas hermanas han ahorrado igual cantidad.

$$36 = 12 + 6 \cdot 4 = 18 + 6 \cdot 3$$

total cantidad inicial n° de meses cantidad ahorrada por mes

Si siguieran ahorrando de igual manera durante el 2016, el 3 de mayo de 2016, ¿cuánto será lo ahorrado por cada una?

total ahorrado por María en n meses $= 12 + n \cdot 4$, por lo tanto en 12 meses será: $12 + 12 \cdot 4$

total ahorrado por Juana en n meses $= 18 + n \cdot 3$, por lo tanto en 12 meses será: $18 + 12 \cdot 3$

7. Con referencia al *ejemplo 1*

   a) halle la cantidad de dinero que tendrá María el 5 de agosto de 2016

   b) ¿cuál será el total de lo ahorrado por Juana el 10 de noviembre de 2016?

   c) ¿cuánto será lo ahorrado por María luego de 3 años y 7 meses si continua ahorrando como hasta ahora?

8. *a*) Construya una tabla para la tarifa de una playa de estacionamiento que ha estipulado: \$2: la primer hora ó fracción de ella. \$1,5: cada hora adicional o fracción de ella. \$8: 5 horas ó más.

   b) ¿Cuánto tendría que pagar un automovilista que deje su auto en esa playa de de estacionamiento por 3 hs. y 25 minutos?

9. La fórmula para convertir la temperatura Fahrenheit, F, en temperatura Celsius, C es:

$$C = \Big(5(F-32)\Big) : 9$$

   a) Halle la temperatura Celsius correspondiente a las siguientes temperaturas Fahrenheit: F=59°; F =50°; F=32°; F=212°

   b) Cuál es en F la temperatura del punto de ebullición del agua

1.2. Números Enteros

Hemos definido la resta o diferencia de números naturales como operación inversa a la suma. Calcular $7-3$ es hallar el número que sumado con 3 de como resultado 7. Entonces $7-3=4$ puesto que $3+4=7$. En cambio la diferencia $3-7$ no puede efectivizarse en $\mathbb{N}$ pues no hay ningún número natural que sumado con 7 de cómo resultado 3. Luego la operación de resta no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{N}$.

Esta dificultad conduce a ampliar el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ para que la resta sea siempre posible. Para ello se introduce para cada natural a, el negativo $-a$, llamado opuesto de a, ampliando a la vez la definición de suma mediante convención:

Propiedad del número opuesto: $(-a) + a = a + (-a) = 0$ para todo natural a.

Por ejemplo -3 es, por definición, el número que sumado a 3 da 0. El $-0 = 0$, pues $0 + 0 = 0$ A los números naturales y a sus opuestos se los llama NÚMEROS ENTEROS, ellos son

$$\dots, -3, -2, -1, 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots$$

Al conjunto de todos ellos se lo designa por $\mathbb{Z}$.

Se consideran en $\mathbb{Z}$ definidas las operaciones de suma y producto. Además que ellas verifican las propiedades que cumplen dentro de $\mathbb{N}$.

Los **números negativos** se consideran menores que 0 en el orden usual de los números enteros, a los naturales también se los llama enteros positivos siendo mayores o iguales que 0.

Además se tiene el concepto de **número opuesto en** $\mathbb{Z}$. Dado un **número entero** a, el **opuesto** se anota $-a$ y es tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Por ejemplo: el opuesto de -4 que se anota $-(-4)$, es 4 pues $-4 + 4 = 0$; el número $-(-7)$ (el opuesto de -7) es 7 pues $7 + (-7) = 0$.

IMPORTANTE: Cuando números se simbolizan con letras, por ej. b, la presencia de un signo "$-$" ante los mismos no significa que el número $-b$ sea negativo, está significando el opuesto de b.

La diferencia $3 - 7$ es ahora calculable, y se tiene $3 - 7 = -4$, pues $3 - 7$ sumado a 4 da como resultado 0,

$$4 + (3 - 7) = (4 + 3) - 7 = 7 - 7 = 0$$

Por asociatividad de la suma $\mathbb{Z}$.

Ejercicios

10. *a*) Enuncie para los elementos de $\mathbb{Z}$ las siguientes **propiedades de la suma**:
    - I) **Ley de cierre.**
    - II) **Asociativa.**
    - III) **Conmutativa.**

    b) ¿Sigue siendo el 0 el **elemento neutro para la suma** en $\mathbb{Z}$? ¿por qué?

    c) Enuncie para los elementos de $\mathbb{Z}$ las siguientes **propiedades del producto**:
    - I) **Ley de cierre.**
    - II) **Asociativa.**
    - III) **Conmutativa.**

    d) Formule en $\mathbb{Z}$ la propiedad que establece que **1** es el **elemento neutro para el producto**.

    e) Enuncie la **propiedad distributiva del producto en la suma de números enteros**.

    Solución:

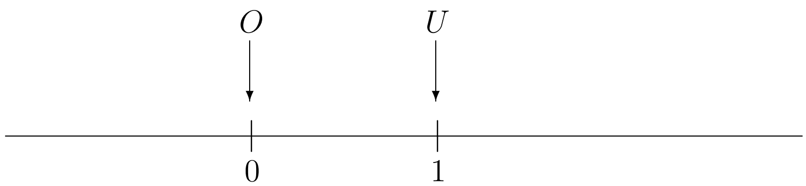
    a) I) **El producto de dos enteros cualesquiera es un número entero**.

    Es decir, si a y b son números enteros cualesquiera entonces $a \cdot b$ es un número entero.

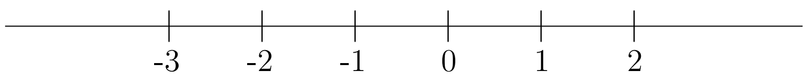
    Los otros items por parte del alumno.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

Los números enteros, pueden representarse por ciertos puntos de una recta, en la cual se han elegido dos puntos cualesquiera distintos O y U, para representar los números 0 y 1 respectivamente. La longitud del segmento OU, se considera la unidad de una escala métrica para $\mathbb{Z}$



Transportando la unidad mediante una construcción geométrica de paralelogramos, por ej. hacia la derecha de U se van determinando puntos sobre la recta que representan sucesivamente los enteros positivos (> 0), hacia la izquierda del O se determinan puntos que representan sucesivamente los enteros negativos (< 0).



Recordar que para multiplicar números enteros se utiliza la regla de los signos:

$$\boxed{\begin{array}{c} + \cdot + = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \\ - \cdot - = + \end{array}}$$

Es decir:

el producto de dos enteros positivos es un número entero positivo, también resulta positivo el producto de dos números negativos; el producto de un positivo por un negativo (en cualquier orden) resulta negativo.

También es oportuno recordar las Leyes de monotonía en $\mathbb{Z}$:

Para la suma es análoga a la propiedad en los números naturales:

Si a, b, c son enteros y $a \leq b$,entonces $a + c \leq b + c$

Veamos la siguiente situación:

$$\begin{array}{rcl} 6 & \leq & 8 \\ (-2) \cdot 6 & = & -12 \\ (-2) \cdot 8 & = & -16 \end{array}$$

Luego $(-2) \cdot 6 \geq (-2) \cdot 8$

En general, dados a, b enteros tales que: $a \leq b$ si c es un entero, $c \geq 0$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$ si c es un entero, $c \leq 0$ entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$

Ejercicios

11. *a*) Escriba la Ley de monotonía para la suma de números enteros.

    b) Ejemplifique la propiedad de monotonía del producto de números enteros.

Los números enteros son útiles para describir situaciones prácticas.

Ejemplo 2.
Los números positivos como 8, 15, 20 indican temperaturas más cálidas que 0 grado. Por su parte los números negativos -1,-20,-25 indican temperaturas más frías que 0.

Ejemplo 3.
Se puede describir de acuerdo a una dirección el desplazamiento de un móvil

a) Si un móvil se desplaza 5 km hacia el norte, se describe por 5. Si un móvil se desplaza 5 km hacia el sur, se describe por -5.

b) Si un móvil se desplaza 7 km hacia el este, se describe por 7. Si un móvil se desplaza 7 km hacia el oeste, se describe por -7.

El hecho de considerar en *a*) que el desplazamiento hacia el norte es positivo y hacia el sur es negativo es sólo una convención. Análogo para *b*).

Ejemplo 4.
Se pueden describir situaciones que son opuestas:

a) Ganar 13 kg= 13
Perder 13 kg =-13

b) Recibir \$100= 100
Gastar \$100= -100

Ejemplo 5.
Los números enteros pueden denotar cambios:

a) DE TEMPERATURA

En la tabla se consigna la temperatura en grados centígrados de una ciudad durante diferentes horas del día:

HORA	TEMPERATURA	CAMBIO
3	-5	
5	-6	-1
7	-6	0
9	-4	2
11	0	4
13	5	5
15	8	3
17	6	-2
19	3	-3

b) DE POBLACIÓN

CIUDAD	1970	1980	CAMBIO
Prolífica	530.000	580.000	50.000
Fantasma	40.000	3.000	-37.000

12. *a*) En cada uno de los siguientes casos, describa la situación opuesta y asígnele un número entero:
    - I) El precio aumenta \$49.
    - II) La temperatura desciende 25 grados.
    - III) La pérdida de un metro.
    - IV) La reducción de \$40 en el salario.
    - V) 43 personas más.

    b) Describa cada situación con un número entero:
    - I) Volando a una altitud de 10.000 m.
    - II) Bucear a una profundidad de 25 pies.
    - III) La temperatura durante el día en la Luna es de 127°C sobre 0. La temperatura nocturna en la Luna es de 173°C bajo cero
    - IV) El mercurio se solidifica a 39°C bajo cero y entra en ebullición a 357°C sobre cero.

13. Siendo $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Efectuar en cada caso las operaciones indicadas y decir si el resultado pertenece a $\mathbb{N}$ o si pertenece a $\mathbb{Z}$. Además en cada caso representarlo en la recta numérica.

    a) $-(-4)$

    b) $4 - 4$

    c) $6 - 5 \cdot (-1)$

    d) $3 - 4 - [-5 + 2 - (7 - 4) + 5]$

e) $-\{8-[3-7+5+(-3-2)]\}$

Dado un número entero a se define el valor absoluto por:

$$|a| = \begin{cases} a\,, & \text{if } a \geq 0\,; \\ -a\,, & \text{if } a < 0\,. \end{cases}$$

POR EJEMPLO: Si $a = 3$ $|a| = |3| = 3$ pues $3 \geq 0$. Si $a = -3$ $|a| = |-3| = 3$ pues $-3 < 0$

Observar que cualquiera sea el número entero (positivo o negativo) a, el $|a| \geq 0$.

El concepto de divisibilidad para números naturales se extiende al conjunto de los números enteros.

Dados dos enteros a y b, b divide a a si existe el número entero c tal que $b \cdot c = a$

Con similar significado que en $\mathbb{N}$ se utilizarán en $\mathbb{Z}$ las expresiones *es múltiplo de ... , es divisor de ... , es divisible por ...* . Resulta que -5 divide a 5 pues $-5 \cdot (-1) = 5$.

50 es múltiplo de 25 pues $2 \cdot 25 = 50$.

En la teoría de los números enteros se puede demostrar el siguiente teorema, llamado Teorema del Algoritmo de la División.

Dados dos enteros a y b, siendo b no nulo existen dos números enteros c (cociente) y r (resto) que verifican $a = b \cdot c + r$ con $0 \leq r < |b|$

El cociente y el resto son únicos en estas condiciones

14. Analice si son números naturales o enteros:

a) $[12-(7-3)] : 8$

b) $-[-3+1-(-3+1)] : 20$

c) $-[2 \cdot (3-7) - 6 \cdot (11-4)] : (2-7)$

Un número entero se dice **primo** si tiene exactamente cuatro divisores.

Por ejemplo:
3 es primo pues los únicos divisores son $3, -3, 1, -1$.
1 no es primo pues sus únicos divisores son 1 y -1.
0 no es primo pues todo entero divide a 0 (compruébelo)
-120 no es primo pues algunos de sus divisores son 2, -2, 3, -3, 1, -1, 5, -5.

15. *a*) Factorear los siguientes números como producto de números primos: 284, -325, 121, -1000, 20.
¿Puede hallar otra factorización similar de cada uno de ellos?
b) Calcular el Máximo Común Divisor entre: 24 y 16, 49 y 21, 126 y 248, 45 y 21.
c) Para los mismos pares de *b*) calcular el Mínimo Común Múltiplo.

1.3. Números Racionales

Se ha definido la división de números enteros como la operación inversa de la multiplicación de enteros. Calcular 12 : 4 es hallar un número entero que multiplicado por 4 de como resultado 12. Entonces $12 : 4 = 3$ puesto que $4 \cdot 3 = 12$.

En cambio la división 4:12 no puede efectuarse en $\mathbb{Z}$, pues no hay un número entero que multiplicado por 12 de cómo resultado 4 (cualquier negativo multiplicado por 12 dará por resultado un número negativo; $0 \cdot 12 = 0$; $1 \cdot 12 = 12$ y cualquier otro número natural al multiplicarlo por 12 da como resultado un número mayor que 12).

Tampoco es resoluble en $\mathbb{Z}$ (-3):7. ¿Por qué? Explíquelo.

Por lo tanto la operación de dividir no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Esta imposibilidad conduce a ampliar el conjunto $\mathbb{Z}$, definiendo un conjunto en que la división sea realizable en el conjunto.

Por ello se introduce **para cada número entero no nulo** a un número llamado **inverso de** a. Ampliando a la vez la definición de producto y estableciendo la **propiedad del inverso**:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

para todo a no nulo.

Se considera que

$$4 : 12 = 4 \cdot \frac{1}{12}\,; \quad 3 : 7 = 3 \cdot \frac{1}{7}$$

Que se anotaran $\frac{4}{12}$ y $\frac{3}{7}$ respectivamente.

Sean a y b números enteros, $b \neq 0$. Un número racional es un número de la forma $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ o sea es $a : b$

$\frac{a}{b}$ es una fracción con numerador a y denominador b.

Llamaremos $\mathbb{Q}$ al conjunto de todos los números racionales es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a \ y \ b \ elementos \ de \ \mathbb{Z} \ y \ b \neq 0 \right\} .$$

Resulta que la operación 4:12 es realizable en $\mathbb{Q}$ pues $4{:}12 = 4/12$.

Analogamente, $3 : 7 = \dfrac{3}{7}$ pues $\dfrac{3}{7} \cdot 7 = \cdots = 3$

En forma similar $3 : (-2) = 3 \cdot \dfrac{1}{-2} = \dfrac{3}{-2}$ pues
$\dfrac{3}{-2} \cdot (-2) = 3 \cdot \dfrac{1}{-2} \cdot (-2) = 3 \cdot 1 = 3.$

Recuerde que $0{:}3 = 0$, luego $0/3 = 0$. ¿Si a 3 lo reemplaza por cualquier otro número no nulo qué pasa?

COMENTARIO:
Los números enteros son abstracciones del proceso de contar colecciones finitas de objetos. Pero en la vida diaria no es suficiente poder contar objetos individuales, sino que también es preciso medir magnitudes tales como longitudes, áreas, pesos, tiempo, etc. Las medidas de estas magnitudes llevan muchas veces a subdivisiones pequeñas que llevan a la aritmética más allá de los números enteros.

Ejercicios

16. *a*) Justificar que los números obtenidos en los ej. 13 y 14 son números racionales.

    b) ¿Es cada número natural un número entero? ¿Es cada número entero un número racional?

En $\mathbb{Q}$ se definen las operaciones de suma y producto, con la pretensión de que las propiedades de estas operaciones en $\mathbb{Z}$ se conserven.

Recordemos que dados los números racionales

$$\frac{a}{b} \ y \ \frac{c}{d}$$

(observar que esto significa que a, b, c y d son números enteros con b y d ambos no nulos)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \qquad (A)$$

Y que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad (B)$$

Por ser (A) y (B) razones de números enteros con denominador no nulo (¿por qué?), resultan la suma y el producto cerrados en $\mathbb{Q}$.

Así:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 3}{15} = \frac{13}{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{6}+\frac{1}{3} &= \frac{-1\cdot 3+6\cdot 1}{6\cdot 3}=\frac{-3+6}{18}=\frac{3}{18}\\
\frac{5}{(-2)}+\frac{1}{2} &= \frac{5\cdot 2+(-2)\cdot 1}{(-2)\cdot 2}=\frac{10-2}{-4}=\frac{8}{-4}\\
\frac{-2}{3}+\frac{2}{3} &= \frac{-2\cdot 3+3\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{-6+6}{9}=\frac{0}{9}=0\\
\frac{2}{-3}+\frac{2}{3} &= ?
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Se dice que los números racionales } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ son equivalentes si y sólo si } a\cdot d=b\cdot c}$$

Así por ejemplo:

$\frac{8}{-4}$ es equivalente a - 2

$\frac{2}{6}$ es a $\frac{1}{3}$ y a $\frac{-3}{-9}$

Haciendo abuso de notación escribimos que

$\frac{8}{-4}=\frac{2}{-1}=\frac{-2}{1}=-2;$

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}$

Aceptaremos que el resultado de una operación entre números racionales no se modifica si reemplazamos uno de ellos por otro que le sea equivalente. (la demostración de esta afirmación no la haremos acá)

Por lo dicho: $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$ para a y b enteros, $b\neq 0$

Además $\frac{a}{-b}+\frac{a}{b}=\frac{a\cdot b+(-b)\cdot a}{-b\cdot b}=\frac{0}{-b^2}=0 \qquad \frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a\cdot b+b\cdot(-a)}{b\cdot b}=\frac{0}{b^2}=0$

Luego $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$ es el opuesto de $\frac{a}{b}$ y lo podemos denotar como $-\frac{a}{b}$

Así por ejemplo el opuesto de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{-5}$ que además es igual a $-\frac{3}{5}$.

NOTACIÓN: número mixto

Es útil en algunas situaciones anotar 3 como $\frac{3}{1}$, esto significa

$$3 + \frac{1}{5} = \frac{3}{1} + \frac{1}{5} = \frac{15+1}{5} = \frac{16}{5}$$

Si realizamos $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1$, resulta entonces que si $a \neq 0$ el inverso de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, pues $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$

17. *a*) Halle el inverso de los siguientes números: -2, 2, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{a-b}$, con $a \neq b$.

    b) Realizar las siguientes operaciones y decir si el resultado es un nº natural, entero y o racional:

    I) $\frac{1}{2} - \left[\frac{2}{7} - \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{19} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{3}{4}\right) + 2\right]$

    II) $\frac{2}{3} - \left[-\frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2}\right) - 2\right] - \frac{1}{4} - \left(-1 + \frac{2}{3}\right) - 2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$

18. *a*) ¿Cuál es el error en el siguiente ejercicio?

    $4 + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} + 6$ pues $\frac{12+18}{3} = \frac{12+18}{3}$

    Por lo tanto $4 - \frac{12}{3} = 6 - \frac{18}{3}$

    Por lo tanto $2 \cdot \left(2 - \frac{6}{3}\right) = 3 \cdot \left(2 - \frac{6}{3}\right)$

    $2 = 3$

    b) Verificar las siguiente desigualdades:

    1) $2 - \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{2}\right) \neq \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{2}\right)$

    2) $\frac{1}{3} - \frac{\frac{3}{7}}{2} \neq \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}$

    3) $5 \cdot \left(\frac{3}{2} - 8\right) \neq \frac{15}{10} - 40$

    4) $\frac{1}{8} : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \neq \left(-\frac{1}{8} : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}$

Orden en $\mathbb{Q}$

Dados dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b, d > 0$ diremos que $\frac{a}{b}$ es menor o igual que $\frac{c}{d}$ y se anotará
$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d \leq b \cdot c$

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ números racionales con $b, d > 0$, diremos que $\frac{a}{b}$ es mayor o igual que $\frac{c}{d}$, lo anotaremos $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ si y sólo si $a \cdot d \geq b \cdot c$

Así resulta $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$ pues $1 \cdot 4 \leq 2 \cdot 3$
$-\frac{5}{2} \leq -\frac{7}{3}$ pues $(-5) \cdot 3 \leq 2 \cdot (-7)$

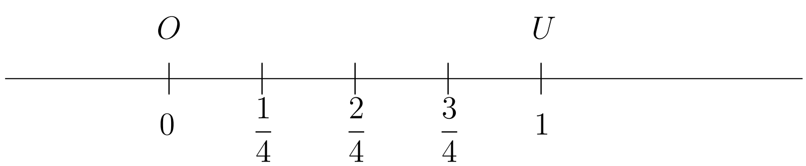
Los racionales positivos son los números racionales mayores o iguales que 0.
Los racionales negativos son los números racionales menores que 0.

Los números racionales son representables en una recta. Para ello se procede de manera similar que para la representación de los números enteros, considerando sobre una recta dos puntos arbitrarios O y U que representan a 1 y 0 respectivamente.

Hacia la derecha del punto 0 se representan los racionales positivos, hacia la izquierda de 0 los racionales negativos.

Si el número racional es negativo se considera el equivalente como denomiador positivo (por ejemplo $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$). La representación puede realizarse así: si $\frac{a}{b}$ es el número a representar, se considera la subdivisión de la unidad (longitud del segmento OU) en b partes iguales, luego cada una de esas partes equivale al número $\frac{1}{b}$.

Luego considerar a veces $\frac{1}{b}$ es decir $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ mediante la regla del paralelogramo.
Por ejemplo, si $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$



Ejercicios

19. Ordenar por la relación $\leq$ y representar.

$$-\frac{12}{6};\ 3;\ \frac{2}{5};\ -1;\ -\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{7};\ \frac{6}{4};\ 0$$

20. Dados -3 y 5

    a) Reemplazar m por números enteros de modo que sea verdadero $-3 < m < 5$ (por ejemplo si $m = 0\,,\quad -3 < 0 < 5$ es cierto).

    b) ¿Por cuántos valores enteros puede reemplazar m? Haga un gráfico de esa situación.

21. Dados los números -3 y 5

    a) Remplazar m por números racionales de modo que sea verdadero que $-3 < m < 5$
    (por ej. si $m = \frac{1}{2}$; $-3 < \frac{1}{2} < 5$ es cierto).

    b) Observar que $m = \frac{1}{2}$ ó $m = \frac{2}{3}$ son valores para los que resulta $-3 \leq m \leq 5$ verdadero. Representar la situación en la recta numérica.

    c) Halle algún otro valor racional entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ para el que también resulte verdadero. ¿cuántos puede hallar?

    d) ¿Hay una cantidad limitada de números racionales m entre -3 y 5?

22. Demostrar la propiedad: **entre dos números racionales distintos hay otro número racional**.

    Solución :Siendo p y q números racionales $p = \frac{a}{b}$ y $q = \frac{c}{d}$, siendo a, b, c y d números enteros con b y d no nulos. Se pueden considerar b y $d > 0$ (¿por qué?)

    El número $\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2\,b \cdot d}$ es un número racional (justifique) y lo llamaremos t. Además se cumple $p < t$: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ por hipótesis, es decir $a \cdot d < b \cdot c$ luego $a \cdot d + a \cdot d < a \cdot d + b \cdot c$ (por monotonía de la suma) es decir $2ad < a \cdot d + b \cdot c$, como el número $2bd > 0$
    $\frac{2\,a \cdot d}{2\,b \cdot d} < \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2\,b \cdot d}$ por monotonía del producto.
    Pero: $p = \frac{a}{b} < \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2\,b \cdot d} = t$ Como queríamos ver.
    Demuestre que también que $t < q$.

    Consecuencia de esta propiedad es que **entre dos números racionales distintos hay infinitos números racionales**. ¿Por qué?

    Intuitivamente: cualquiera sea el segmento que se considere en la recta representativa de $\mathbb{Q}$, por pequeño que sea, hay infinitos puntos que representan números racionales.

Los números racionales también se pueden expresar en forma decimal. Si el número es $\dfrac{a}{b}$ se realiza la división de a por b en el sistema decimal, y $\dfrac{a}{b}$ se expresa :

I) O bien como un **número decimal finito**, si se llega a un resto 0, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \;; \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375$$

II) O bien como una expresión decimal periódica. En efecto, si al dividir a por b no se obtiene resto 0, como los sucesivos restos son todos menores que b (b es un nº finito), llega un momento en que uno se repite y, a partir de él, se repiten las cifras del cociente. Por ejemplo:

$$\frac{5}{3} = 1{,}66\cdots = 1.\overline{6}$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857..... = 0.\overline{142857}$$

23. *a*) Pasar a la forma decimal:

$$\frac{3}{2}\;; \quad -\frac{4}{5}\;; \quad \frac{8}{4}; \quad -\frac{20}{6}$$

b) Verificar las siguientes desigualdades y representar:

$$a)\ \frac{4}{7} < \frac{5}{8}\;; \qquad b)\ \frac{1}{4} - \frac{3}{7} < 1 - \frac{8}{7}\;; \qquad c)\ 0{,}33 < \frac{1}{3}\;; \qquad d)\ \frac{1}{3} < 0{,}34$$

24. Observar que si $m = 0.\overline{a}$ (que es igual a $0.aaa\ldots$) entonces $10\,m - m = a$ o equivalente $m = \dfrac{a}{9}$

Observar que si $m = 0.\overline{ab}$ $(0.ababab\ldots)$ entonces $100m - m = \dfrac{ab}{99}$ o equivalente $m = \dfrac{a\,b}{99}$

Si $m = 0.\overline{abc}(0.abcabcabc\ldots)$ entonces $1000m - m = abc$ o equivalente $m = \dfrac{abc}{999}$

a) Piense qué ocurre si $m = 0.\overline{ab...n}$ con n digitos en el período.

b) Encontrar una expresión fraccionaria para $0.\overline{73}$.

25. I) Pasar a fracción:

$$2,13\;; \quad -3{,}125\;; \quad 0{,}0351$$

II) Resolver:

a) $0{,}5 - 0{,}2 + 1{,}3 - 0{,}429 \cdot (-999)$

b) $\dfrac{(0{,}25 + 0{,}34) \cdot 99}{(0{,}72 \cdot 90 - 6)}$

26. Compruebe que $0.\overline{9} = 1$

SOLUCIÓN : De acuerdo a lapropiedad demostrada en el ejercicio 1.29 si $0.\overline{9} < 1$ existe otro número racional $t = \dfrac{(0.\overline{9} + 1)}{2}$ entre ambos.

Pero $1.\overline{9} : 2 = 0.\overline{9}$.
Luego NO HAY UN NÚMERO RACIONAL ENTRE 0.9 Y 1 por lo tanto son iguales.

RECORDAR QUE : el 1 por ciento de una magnitud m se anota $1\,\%$ y es $\dfrac{1 \cdot m}{100}$ y r por ciento de una magnitud lo anotamos $r\,\%$ y es $\dfrac{r \cdot m}{100}$. Por ejemplo el $3\,\%$ de 25 es $\dfrac{3 \cdot 25}{100} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$; el $18\,\%$ de 284 es $\dfrac{18 \cdot 284}{100} = 51{,}12$

27. Se estima que a la edad de 18 años las personas alcanzan su altura máxima. La siguiente tabla permite estimar esa altura.

PORCENTAJE RESPECTO ALTURA TOTAL

EDAD	VARONES	NIÑAS
1 año	43	45
2 año	50	52
5 año	62	66
10 año	78	83
12 año	84	91
13 año	88	96
14 año	92	98
15 año	95	99

¿Cómo se interpreta la tabla? Un varón a los 5 años tendrá una altura de alrededor el $62\,\%$ de la que tendrá a los 18 años. A los 10 años una niña tiene aproximadamente una altura del $83\,\%$ de la que tendrá a los 18 años. Estimaremos la altura de Pedro a los 18 años. Si a los 14 años es de 168 cm.

Llamaremos h a la altura de Pedro a los 18 años, 168 cm. Es el $92\,\%$ de h, es decir

$$168 = \frac{92 \cdot h}{100}$$

$$= \frac{92}{100} \cdot h$$

luego $$h = \frac{\frac{168}{92}}{100} = \frac{168 \cdot 100}{92} \cong 182{,}61$$

La altura posible de Pedro a los 18 años será 182.61 (hemos aproximado con dos decimales).

28. Usar la tabla dada en 18

    a) Estimar la edad en que un varón alcanza:

    I) $\frac{2}{3}$ de su altura total

    II) el 80 % de su talla total

    b) Estimar el porcentaje, respecto a la altura que tendrá a los 18 años, para una mujer que tiene 6 años. ¿Cuál es para el varón?

    c) ¿Cuál es la expectativa de altura de un niño que a los 5 años mide 90 cm? ¿Cuál será la altura de Gloria a los 18 años si a los 12 mide 1,45 m?

En los números racionales se define la **potencia de exponente natural** como:

$$\begin{array}{lll} si\ \ p = a\,, & a \neq 0 & p^0 = 1 \\ & & p^n = p \cdot p^{n-1}\,,\ \ con\ n \geq 1 \\ si\ \ p = 0\,, & & p^n = 0\ \ para\ n \geq 1 \end{array}$$

OBSERVACION IMPORTANTE: resulta que si $p \neq 0$ $p^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ para n natural. Y NO se define 0^0 por ello se dirá que es una indeterminación.

Para el caso $p \neq 0$, se define la potencia de exponente entero negativo. Si $p = \dfrac{a}{b}$ con $a \neq 0$ y m es entero, $m < 0$ $p^m = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-m}$. Observar que $-m$ es natural.

<u>Analice que en caso de estar definidas las potencias que se mencionan a continuación se satisfacen las igualdades propuestas:</u>

$$(p \cdot q)^m = p^m \cdot q^m$$

$$p^m \cdot p^n = p^{m+n}$$

$$(p^m)^n = p^{m.n} \tag{1.3.1}$$

¿Cuáles restricciones debe hacer? ¿Cómo deben ser m y n?

29. Resolver

a)
$$\left[\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3}{13}+\frac{3}{5}\right]:\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{7}\right)\cdot(-0,2)$$

b)
$$\left[\frac{\left(\frac{11}{3}+\frac{3}{5}\right):1-\frac{7}{9}+0{,}8}{2\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{6}\right)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right):\left(-\frac{13}{7}\right)\right]^{3}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$$

c)
$$\frac{3^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}{\left[\left(\frac{11}{3}\right)^3\right]^{-2}:\left(\frac{7}{11}\right)^5-\frac{9}{11}}:\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}-\frac{8}{3}\right]$$

d)
$$\left\{1-1:\left[1-1:\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{-2}$$

e)
$$\left\{\left[\left(\frac{7}{8}\right)^5\right]^{-2}\right\}^0$$

f)
$$\left\{\left[(-1)^2\right]^{-5}\right\}^{-3}$$

g)
$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 2^{-1}\cdot 5^3}{(-1)^{-1}}\right]^2$$

30. Verificar las siguientes igualdades.

a)
$$2\cdot 3^2\left[(8-3)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 15\cdot 8^3\right]=\frac{1}{3}\cdot\left(5^2+2\right)\cdot\left[\left(2^3\right)^2\cdot 3^2\cdot 6\right]$$

b)
$$\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3}:\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{7}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\right]-2^{-1}$$

c)
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2:\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{2^{-1^2}+\frac{4^{-1}}{3}+\frac{3}{2}}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)}$$

31. Verificar las siguientes desigualdades:

   a)
$$\left(2+\frac{5}{2}\right)^2 \neq 4+\frac{25}{4}$$

   b)
$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^3 \neq 1-\frac{27}{8}$$

   c) ¿Qué se puede concluir a partir de *a*) y *b*)?

   d)
$$2^{5-2} \neq 2^5 - 2^2$$

   e)
$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 \neq \frac{1^{(2^3)}}{3}$$

   f)
$$\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]^2 \neq \left(-\frac{1}{4}\right)^5$$

32. Hallar el valor numérico de la siguiente expresión: $\dfrac{a^4}{4} - \dfrac{3a^2b}{6} + \dfrac{5b^2}{3a} - \dfrac{1}{b^3}$ para

   a) $a = 1,\ b = -1$

   b) $a = 1,\ b = 1$

   c) $a = \frac{1}{2},\ b = 3^2$

   d) $a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{5}{3}$

33. Idem el ejercicio anterior pero para la expresión: $3ab^{-2} + 2a^{-3}b + \dfrac{\frac{3}{2}}{a^{-2}b^{-3}}$ con los valores de a y b dados en cada caso

OBSERVAR que para algunos números racionales p tiene sentido (con esto significamos que es resoluble en $\mathbb{Q}$) preguntarse cuál es el número s tal que $s^2 = p$; o cuál es el número t que $t^5 = p$. De existir, al s lo llamaremos raíz cuadrada de p y al t lo llamaremos raíz quinta de p.

En general para cualquier número natural $n,\ n > 1$ llamaremos **raíz n-ésima de** p, si es que existe un número racional s tal que $s^n = p$.
Se anotará
$$\sqrt[n]{p} = s$$

EJEMPLOS

Como $(-2)^2 = 2^2 = 4$, entonces 2 y -2 son ambos raíces cuadradas de 4.

$\sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4$ pues $0{,}4^3 = 0{,}064$

$\sqrt[4]{1} = 1$ y también $\sqrt[4]{1} = -1$ pues $(-1)^4 = 1^4 = 1$. Anotaremos $\sqrt[4]{1} = \pm 1$ para indicar que vale 1 y también -1.

$\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$ pues $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.

La operación de radicación es una operación parcial en $\mathbb{Q}$ pues no está definida para todo número racional. Más adelante se justificará que $\sqrt{2}$ no tiene solución racional.

34. Distancia de frenado

   a) La distancia de frenada para un automóvil que transita sobre pavimento seco se estima por la fórmula $d = \dfrac{v^2}{25}$ donde d es la distancia medida en pie (1 pie = 0.30 m.) y v es la velocidad en millas por hora (1 milla = 1600 m). Mediante esta fórmula estime la distancia para:

$$v = 50km/h \ , \quad v = 70km/h \ , \quad v = 100km/h \ , \quad v = 150km/h$$

   b) La distancia de frenada en el caso que el automóvil circule sobre piso mojado se estima por la fórmula $d \leq \dfrac{v^2}{15}$, con d y v como en el caso *a*).
   Mediante esta fórmula estime la distancia de frenado para:

$$v = 50km/h \ , \quad v = 70km/h \ , \quad v = 100km/h \ , \quad v = 150km/h$$

   Cuidado con la lluvia!!!!

   c) Cuál es la velocidad v (en km/h) en que se desplaza un automóvil sobre pavimento seco si la distancia de frenado es:

$$d = 36{,}30m \ , \quad d = 1{,}20m \ , \quad d = 120m$$

   d) Análogo si considera que transita por piso mojado.

1.4. Números Reales

Ya se demostró que los puntos representativos de los números racionales están "muy próximos" sobre la recta (en todo segmento por pequeño que sea, hay infinitos puntos representativos de los números racionales), este hecho podría llevar a considerar que todos los puntos de la recta queden representados por los números racionales, pero no es así.

También se ha destacado que todo número racional a/b se expresa de manera única como número decimal con un n° finito de cifras periódicas. Es inmediato que se puede considerar un n° decimal con infinitas cifras no periódicas, este número así construido no resultará racional. A estos números se los llama IRRACIONALES (no son razón de n° enteros) y se los denota por la letra $\mathbb{I}$. Está claro que pueden construirse infinitos n° irracionales. Es demostrable que $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ es un n° irracional. De acuerdo al teorema de Pitágoras $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 de longitud. Luego hay segmentos cuya longitud está dada por n° irracionales, $\sqrt{2}$ es un ejemplo. Con regla y compás por ejemplo esas longitudes se pueden trasladar a la recta determinando sobre ellas puntos representativos de n° irracionales.

Si se quiere que exista una correspondencia mutua (1 a 1) entre n°, de una parte, y puntos de la recta, de otra, es necesario introducir los n° irracionales.

También es irracional $\pi = 3,141592\ldots$ (constante de proporcionalidad en cualquier circunferencia entre su perímetro y su respectivo diámetro), que se ha demostrado que no surge como raíz de ningún índice de ningún número racional.

COMENTARIO:
La existencia de un segmento inconmensurable (es decir que su longitud no es expresable como razón de números enteros), o lo que es equivalente la existencia de números irracionales, fue descubierta por los griegos, posiblemente en el siglo V A de C. Es un acontecimiento científico de gran trascendencia que dejó profunda huella en la Matemática y Filosofía desde entonces. En el siglo pasado Dedekind, Frege, Cantor y Weierstrass construyeron una teoría rigurosa de los números irracionales. Es tema de estudio del Análisis Matemático.

Todas las magnitudes medibles de que se hace uso en la práctica y en la ciencia aplicada pueden ser expresadas mediante números racionales con suficiente grado de aproximación. La precisión de los más perfectos instrumentos de medida no sale del campo de los números racionales.

Se llaman números reales aquellos números que son racionales o irracionales. El conjunto de todos ellos lo anotaremos $\mathbb{R}$. Intuitivamente se puede aceptar que son los números que representan las longitudes de los segmentos.

Se definen en $\mathbb{R}$ suma y producto, resultando tener iguales propiedades que las que esas operaciones satisfacen en $\mathbb{Q}$. La justificación rigurosa de estas definiciones se hace en un curso de Análisis Matemático con el concepto de límite.

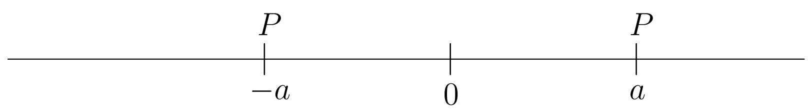
Es útil dar la definición de **valor absoluto** $\mathbb{R}$ (esta definición se hace de modo que coincida con la definición dada anteriormente para aquellos números reales que también sean enteros):

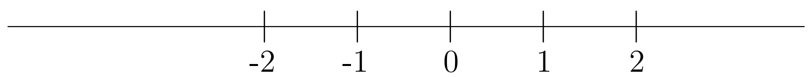
$$|a| = \begin{cases} a\,, & \text{if } a \geq 0\,; \\ -a\,, & \text{if } a < 0\,. \end{cases}$$

Así

$$|2| = |-2| = 2\ , \quad \left|\frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\ , \quad |-0,271\ldots| = 0,271\ldots$$

OBSERVACION: El $|a|$ se puede interpretar como la longitud del segmento $P0$ siendo P el punto que representa el número real a. Por ejemplo:





$$|2| = |-2| = 2$$

Ejercicios

35. *a*) Decir cuáles de estas afirmaciones son falsas y cuáles verdaderas:

$$|9| = 9\ ; \quad \left|-\frac{8}{3}\right| = \left|\frac{8}{3}\right| \ ; \quad |0,27| > 0,27\ ; \quad |-234,18| \geq 234,18\ ;$$

$$-\frac{2}{3} < \left|-\frac{2}{3}\right| \ ; \quad \left|-\frac{2}{3}\right| \leq \frac{2}{3}$$

b) Para cada número que sigue dar otro que tenga igual valor absoluto:

$$3,2\ ; \quad -2,85\ ; \quad \frac{1}{4}\ ; \quad -0,58$$

c) Evaluar las expresiones:

$$|-4| + |-8|\ ; \quad |-3| + |9|\ ; \quad 1 - \sqrt{3}\sqrt{|-3|}\ ; \quad |(-4) + (-8)|\ ; \quad |-3+1|$$

d) Si $a = 2,3$; $b = -16$; $c = -5 \cdot \frac{1}{2}$ $d = 3 \cdot \frac{2}{5}$ evaluar:

$$|a| + |b| + |c|\ ; \quad a + (-b) + |c|\ ; \quad a + d + |c|\ ; \quad -(a + |c|) + d\ ; \quad |a| \cdot |b| \cdot |c|\ ;$$

$$|a \cdot b \cdot c|\ ; \quad |b + c| + |d|$$

e) ¿Es $|a + b| = |a| + |b|$? Justifique *f*) Dé 5 números reales que verifiquen $|a| \leq 3,25$. ¿Cuántos hay?

Respecto de la radicación es importante destacar lo siguiente:

La radicación de **índice impar** n está definida para todo real r (es decir $\sqrt[n]{r}$ existe en $\mathbb{R}$).

Para el caso de **índice par** $n, \sqrt[n]{r}$ es un real sólo en el caso que r sea un número real ≥ 0.

Pues observe: Si a es real $a^2 = a \cdot a \geq 0$
(Si $a = 0 :\ a \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$
Si $a > 0 :\ a \cdot a > a \cdot 0$; por monotonía del producto, por consiguiente $a^2 > 0$.
Si $a < 0$; $a \cdot a > a \cdot 0$ por monotonía del producto, por consiguiente $a^2 > 0$)

36. Pruebe que si n es par ($n = 2k$, para k número entero) entonces $a^n \geq 0$ para todo número real. (sugerencia: use la observación anterior).

37. Pruebe que si n es par ($n = 2k$ para k número entero) entonces $a^n = (-a)^n$

Los dos ejercicios anteriores permiten afirmar:

Si n es par:
Si $r > 0$, $\sqrt[n]{r}$ y $-\sqrt[n]{r}$ son ambos raíces n-ésimas de r. Si $r = 0$, 0 es la única raíz n-ésima de r.
Si $r < 0$, r no tiene raíz n-ésima real.

Justifique plenamente lo inmediatamente anterior.

38. *a*) Compare cada uno de los números $\frac{1}{4}; 1; 25$ con sus respectivos cuadrados.

b) Compare esos mismos números con el valor absoluto de sus respectivas raíces cuadradas.

c) Compare $-\frac{1}{3}; -1; -3$ con su respectivo cuadrado.

Solución:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ entonces $\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{4}$

$1^2 = 1$

$(25)^2 = 625$ entonces $(25)^2 > 25$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$ entonces $\left|\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right| > \dfrac{1}{4}$

$\sqrt{1} = 1$ y -1 entonces $|\sqrt{1}| = 1$

$\sqrt{25} = 5$ y -5, $|\sqrt{25}| = 5$ entonces $|\sqrt{25}| < 25$

c) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ entonces $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 > -\dfrac{1}{3}$

$(-1)^2 = 1$ entonces $(-1)^2 > -1$

$(-3)^2 = 9$ entonces $(-3)^2 > -3$

En este ejemplo se comprueban las siguientes propiedades (si desea demuéstrelas):

a) Si
r es un número real positivo y $r < 1$ entonces $r^2 < r$
$r = 1$ entonces $r^2 = r$
$r > 1$ entonces $r^2 > r$

b) Si
r es un número real positivo y $r < 1$ entonces $\sqrt{r} > r$
$r = 1$ entonces $\sqrt{r} = r$
$r > 1$ entonces $\sqrt{r} < r$

c) Si r es un número real negativo entonces $r^2 > r$

39. Intercalar $>, =, <$ en $\square$ de modo que resulte verdadero:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} \,\square\, \frac{4}{9} \ , \qquad \sqrt{0} \,\square\, 0 \ , \quad -\sqrt{0} \,\square\, 0 \ , \qquad \sqrt{1} \,\square\, 1 \ ,$$

$$\sqrt{\frac{16}{9}} \,\square\, \frac{16}{9} \ , \quad -\sqrt{5} \,\square\, 0 \ , \quad \sqrt{5} \,\square\, 1 \ , \quad \sqrt{81} \,\square\, 81 \ .$$

40. Considerar la operación $r \cdot \sqrt{r+1}$ para los casos que siguen e indicar para cada caso si pertenece a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o a ninguno de ellos. De ser posible calcular el valor numérico:

$$r = -2 \ , \quad r = -1 \ , \quad r = 0 \ , \quad r = 3 \ , \quad r = \frac{16}{9} \ , \quad r = 2 \ .$$

OBSERVACIÓN: en los ejercicios de cálculo para las raíces de índice par considerar el valor positivo. Es decir se sabe que $\sqrt{4}$ es 2 y -2 pues $2^2 = (-2)^2 = 4$, pero para resolver $\sqrt{4} + 3$ se considerará $\sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$.

41. *a*) $\dfrac{\sqrt{6,25} - 0,03 \cdot \sqrt[3]{0,027}}{0,02 \cdot \sqrt[3]{0,001} + \sqrt{0,36}}$

b) $\dfrac{\sqrt{0,25} - 0,75 + 2^{-1}}{\left[\frac{1}{1-\sqrt{0,16}}\right]^{-3}}$

c) $\sqrt{1/7 \cdot 343} : \dfrac{\sqrt{2/7}}{\sqrt{7}/2}$

d) $\dfrac{\left(\sqrt{1225} - \sqrt{625}\right) \cdot \sqrt{1/10} \cdot \sqrt{4000}}{\frac{\sqrt{240}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}}$

e) $\left(\sqrt{\dfrac{36}{0,64}} \cdot (0,1)^{-1} \cdot \sqrt{\dfrac{4}{0,125}}\right) \cdot \left(-3 + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}}\right)$

42. Comprobar las siguientes desigualdades:

a) $\sqrt{36 + 64} \neq 6 + 8$ *b*) $\sqrt{144 + 25} \neq 12 + 5$

43. Hallar el error en las siguientes "demostraciones":

a) Sea a cualquier número racional entonces $a = -a$

Demostración: $a^2 = (-a)^2$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2}$$

pero $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{(-a)^2} = -a$, luego $a = -a$

b) Sea b un número racional cualquiera, entonces $b = 1$

Demostración:

$$b - 1 = -(1 - b)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
(b-1)^2 &= (1-b)^2 \\
b - 1 &= 1 - b \\
b + b - 1 &= b + 1 - b \\
2b - 1 &= 1 \\
2b - 1 + 1 &= 1 + 1 \\
2b &= 2 \\
\frac{1}{2} \cdot 2b &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\
b &= 1
\end{aligned}$$

44. Calcular:

   a) $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})$ y $(2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})$

$$(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3}) \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{distributiva del producto en la suma en } \mathbb{R}}}{=} 2\cdot 2+2(-\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot 2+\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})$$

$= 4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-3=1$ ¿por qué?

$(2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3}) = 2\cdot 2+2(-\sqrt{3})-\sqrt{3}\cdot 2+(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})$
$= 4-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-4\sqrt{3}+3 = 7-4\sqrt{3}$

   b) **Racionalizar denominadores** significa cambiar una fracción que tiene en su denominador números irracionales de la forma

$$\sqrt[n]{r} \quad ; \qquad s+\sqrt[n]{r}$$

por otra fracción equivalente con denominador racional. Racionalice las siguientes expresiones:

i) $\dfrac{\sqrt{28}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}\cdot 2+\sqrt{14}}{\sqrt{7}}\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\left(\sqrt{7}\cdot 2+(\sqrt{7}\cdot\sqrt{2})\right)\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2}$
$= \dfrac{(\sqrt{7})^2\cdot 2+((\sqrt{7})^2\cdot\sqrt{2})}{7} = \dfrac{7\cdot 2+(7\cdot\sqrt{2})}{7} = 2+\sqrt{2}$

ii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{5-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

Observar que a los efectos del cálculo se ha considerado $|\sqrt{r}|$.

Se pretende definir en $\mathbb{R}$ la potencia con exponente fraccionario m/n. Resultará una operación parcial, es decir no resultará definida para todo r real.

> Sea r un número real. Se establece que si m es un n° entero y n un n° natural mayor que 1:
> $$r^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{r^m}$$
> en el caso de existir la expresión del segundo miembro.

En el caso de $n=1$ es $\dfrac{m}{n}=m$ y ya se sabe calcular.
Además todo n° fraccionario m/n es equivalente a uno con denominador positivo.

¿Por qué resulta una operación parcial en $\mathbb{R}$? Explique cuando no está definida. Analice los siguientes ejemplos:

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{8} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)^{-3}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^{3}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^{2} \cdot \frac{25}{4}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^{2}}\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{125}{16}} \cdot \left(\pm\frac{5}{2}\right) = \pm\frac{125}{8} \quad \text{¿POR QUÉ?}$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^{4}} = \pm\left(\frac{1}{7}\right)^{2} = \pm\frac{1}{49} \quad \text{¿POR QUÉ?}$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^{3}} = \sqrt{-\frac{1}{343}} \ \text{¿NO TIENE SOLUCIÓN EN } \mathbb{R}.$$

45. Calcular

a) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)^{-2}\right] \cdot (-3)^3$

b) $\left[\frac{\frac{2}{3} + 0,4}{(0,2)^3} : \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{-1 + 0,784}}\right] \cdot \left[-3 - \left(\frac{-0,2}{5}\right)\right]$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{49^{\frac{1}{2}}} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{(1-3)^{-2}} \cdot (-4)^{\frac{1}{3}}$

d) $\left[\frac{1+\sqrt{9}}{2}\right]^{-1} + \left[\frac{1-\sqrt[3]{-8}}{6}\right]^{2} + \left[\frac{8 - 32^{\frac{1}{5}}}{3}\right]^{-1}$

e) $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}{-\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}}\right]^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$

46. Calcular y expresar con exponente fraccionario:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2}$ (llevar a común ídice)

b) $\sqrt[5]{\frac{3}{5}} : \sqrt[5]{\frac{5}{2}}$

c) $\sqrt[5]{\frac{a^6}{b}} : \sqrt[5]{\frac{a}{b^6}}$ $\qquad$ a, b son números reales no nulos fijos.

47. Teniendo en cuenta la propiedad: Si a y b son números reales positivos entonces $a \geq b$ si y sólo si $a^2 \geq b^2$

    a) ¿es verdadera o falsa la ecuación $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$?
    b) Ordenar $2\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$
    c) Idem $3 + 2\sqrt{2}$ y $3 + \sqrt{5}$
    d) Idem $\sqrt{3} \cdot (3 + 2\sqrt{2})$ y $\sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{5})$
    e) Idem $1/\sqrt{2}$ y $1\sqrt{3}$
    f) Idem $1\sqrt{2} + 1/\sqrt{3}$ y $1/\sqrt{6}$

48. Las letras a y b representan números reales cualesquiera fijos. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles falsas?. En la última situación dar un ejemplo que avale su respuesta.

    a) $(ab)^2 = a^2b^2$ *b*) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
    c) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ *d*) $(a/b)^2 = a^2/b^2$
    e)$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
    a y b son tales que las raíces están definidas
    f) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *g*) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $b \neq 0$ *h*) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

Lista de ejercicios sugeridos

Ejercicios 2-5, 10-11, 13-15, 17-18, 20-22, 29-31,32a),32.c), 39-40, 41.a)-41.c), 42-46

Capítulo 2

Ecuaciones

Este capítulo trata un asunto de central importancia. La resolución de ecuaciones, sistemas de ecuacione e inecuaciones, son un tema recurrente que aparecerá en todas las instancias de la carrera. El objetivo de este capítulo será que el alumno sea capaz de tomar un problema, reescribirlo en forma de ecuaciones y ser capaz de resolverlo, entendiendo en qué situaciones le problema tiene solución, y en particular si tiene una o varias soluciones. En este último caso ser capaz de seleccionar aquellas con una interpretación física.

La resolución de ecuaciones requiere tener un buen manejo de manipulaciones algebraicas: operaciones con fracciones, potencias y raices, por ejemplo, son elemento frecuente y por tal motivo esperamos que a esta altura haya sido capaz de haber transitado satisfactoriamente el capítulo anterior.

2.1. Resolución de Ecuaciones

2.1.1. Introducción

En muchas ocasiones tratamos con situaciones en las que se nos presentan cantidades, medidas, etc., relacionadas de cierto modo. Esto llevó, con el correr del tiempo, a que los matemáticos llegaran a la idea fundamental de las ecuaciones: *introducir cantidades desconocidas y considerarlas como números, a fin de averiguar sus posibles valores.* A este procedimiento de encontrar los posibles valores de una incógnita, lo llamamos **resolver** la ecuación.

Aclaremos un poco lo dicho anteriormente con un ejemplo:

"Un deportista arregla su pago anual de la siguiente forma: 20.000 pesos y un auto. Luego de siete meses, rescinde en contrato con el club, y recibe como pago total el auto y 4000 pesos. ¿Cuál es el valor del auto? "

La cantidad desconocida es el valor del auto; utilicemos para denotar esta cantidad desconocida, la letra "c". Este c es el número a encontrar.

$\dfrac{c+20000}{12}$ es el sueldo mensual prometido; $7 \cdot \dfrac{c+20000}{12}$ es el sueldo por los 7 meses trabajados; $c + 4000$ es lo pagado por esos 7 meses.

Por lo tanto, el precio c del auto debe verificar la siguiente ecuación:

$$7 \cdot \frac{c + 20000}{12} = c + 4000.$$

El problema queda entonces reducido a encontrar un número c que verifique la igualdad anterior. Es por esto que es interesante y necesario desarrollar métodos que permitan resolver las ecuaciones. A este estudio, que ha sido desarrollado durante muchos siglos, se lo llama **Álgebra**.

El propósito de este capítulo es el estudio de los métodos de resolución de cierto tipo de ecuaciones, así como su aplicación a la solución de problemas de muy diverso origen y motivación.

2.1.2. Ecuaciones Lineales

Comenzaremos, a modo de ejemplo, por averiguar cuánto valía el famoso auto. El procedimiento básico para tratar una ecuación está basado en la idea, ya mencionada, de tratar la incógnita como un número desconocido que se quiere identificar. Por esto es que trataremos las ecuaciones como igualdades entre números. En particular podremos utilizar las siguientes propiedades, que deberían ser evidentes:

- “Sumando (o restando, que es lo mismo que sumar un número negativo) un número a ambos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad”;
- “Multiplicando ambos miembros de una igualdad por un mismo número, se obtiene otra igualdad”;
- “Dividiendo ambos miembros de una igualdad por un mismo número (no nulo), se obtiene otra igualdad.”

La tercera propiedad y la segunda son en realidad la misma, porque dividir por un número es lo mismo que multiplicar por su inverso.

Utilizaremos estas reglas para *transformar* la ecuación en otra de resolución más sencilla. La idea es, por supuesto, dejar de un lado de la ecuación la “c” sola. Entonces, multiplicando ambos miembros por 12, tenemos:

$$12 \cdot (c + 4000) = 7 \cdot (c + 20000),$$

que tiene la misma solución que la ecuación original. Ahora distribuimos, en cada miembro, y nos queda

$$12c + 48000 = 7c + 140000.$$

Restando 48000 a ambos miembros,

$$12c = 7c + 92000.$$

Ahora restamos $7c$ a ambos miembros:

$$5c = 92000.$$

Finalmente, podemos dividir los dos miembros por 5, para obtener

$$c = 18400,$$

que es el precio del auto. En caso de duda, podemos verificar que el precio del auto de 18400 pesos satisface las condiciones que planteamos en el problema, o lo que es lo mismo, reemplazando c por 18400, vemos que los valores de los miembros derecho e izquierdo de la ecuación coinciden. Lo que hemos hecho, es aplicar a la ecuación las operaciones necesarias para "despejar" la incógnita. Aclaremos una vez más, que sólo es lícito operar con ambos miembros de la igualdad al mismo tiempo: en caso contrario no podemos saber que seguimos teniendo una igualdad. Llamaremos *ecuaciones equivalentes* a aquellas que poseen las mismas soluciones, como por ejemplo las que fuimos obteniendo en el ejemplo anterior.

Esta ecuación que surge del problema del auto, es lo que se llama una "ecuación lineal". Son las ecuaciones que se pueden resolver completamente con las reglas ya mencionadas. Tienen la forma

$$a\,x = b,$$

o una equivalente a ella, donde a, b son números conocidos y x es la incógnita. Se las llama "lineales", porque la gráfica correspondiente es una recta.

Ejercicios

49. Resolver las siguientse ecuaciones y verificar las soluciones obtenidas:

   a) $10 - 2x = x - 1$

   b) $8x + x - 1 = -2x + 1$

   c) $\frac{2}{3}x - x = \frac{1}{2}x + 1$

   d) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} = 1$

   e) $x + 2 = \frac{3x+1}{2}$

   f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x+1}{4}$

   g) $(2-x)(3-x) = (1-x)(5-x)$

   h) $2(x^2 - x + 1) - 2(x+1)^2 = 3(2-x)$ Resp.: $\frac{2}{3}$

   i) $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = \frac{x+2}{6} - \frac{7x-8}{9}$ Resp.: 5

50. Despejar x en las siguientes ecuaciones:

   a) $a - x = 3(x - a)$ Resp.: $x = a$

   b) $\dfrac{a}{2} + x = \dfrac{x+a}{3} + 1$ Resp.: $x = \dfrac{6-a}{4}$

   c) $\dfrac{a-x}{2} + \dfrac{x}{3} = a$ Resp.: $x = -3a$

51. Se sabe que la ecuación

$$(2a-1)(x+1) + x = a$$

   tiene por solución $x = 2$. ¿Cuál es el valor de a?

Las soluciones de una ecuación lineal

Si bien en todos los casos vistos hasta ahora siempre encontramos una única solución, esta no es la única alternativa, en general. Veamos algunos ejemplos.

1. Sea la ecuación lineal

$$\frac{1}{2}(9x+2) - 2x = x - 2\left(5 - \frac{3}{4}x\right). \tag{2.1.1}$$

   Operando en ambos miembros, obtenemos

$$\frac{5}{2}x + 1 = \frac{5}{2}x - 10,$$

   y restando $\frac{5}{2}x$ a ambos miembros obtenemos

$$1 = -10,$$

   que claramente es imposible ! Para explicar esto, recordemos lo que dijimos en la introducción: x se considera como un número a conocer; lo que hemos obtenido es que si un cierto número x verifica la ecuación original, tiene que ser $1 = -10$. La única interpretación que tiene esto, es que un número x que satisfaga la ecuación no puede existir.

   Es decir, que si la ecuación 2.1.1 proviene de un cierto problema, dicho problema no tiene solución.

2. Consideremos ahora la ecuación

$$x - 2(3x+1) = -5(x-1) - 7.$$

   Operando en ambos miembros:

$$-5x - 2 = -5x - 2,$$

que podemos llevar a $-2=-2$. El significado de que haya "desaparecido" la x y que tengamos una igualdad válida, es que la ecuación no era realmente una condición sobre x: todo número la verifica. Es lo que se llama una *identidad.*

Se puede verificar con bastante facilidad los tres casos que hemos visto son los únicos posibles para una ecuación lineal: *solución única, solución imposible, identidad.*

Ejercicios

52. Resolver las siguientes ecuaciones:

    a) $-x+3=-2x+x+7$

    b) $19x-4x=\frac{35}{2}-\frac{1}{2}(7x-2)$

    c) $3(2-x)+1=-x+\frac{5}{2}(1-x)+\frac{x+3}{2}$

    d) $x+3-\frac{2}{3}(x-1)=\frac{1}{3}(x+5)+2$

53. Clasificar las siguientes ecuaciones en x de acuerdo a los distintos valores de a, y resolverlas

    a) $1-ax=a+x$ Resp.: $\begin{cases} x=\dfrac{1-a}{1+a} \text{ si } a\neq -1 \\ \text{Imposible si } a=-1 \end{cases}$

    b) $a^2-ax=4-2x$ Resp.: $\begin{cases} x=a+2 \text{ si } a\neq 2 \\ \text{Identidad si } a=2 \end{cases}$

    c) $ax(a+1)=a(x+1)-x$ Resp.: $x=\dfrac{a}{a^2+1}$

2.1.3. Ecuaciones de Segundo Grado

La ecuación

$$x^2-4x+1=0$$

no es lineal: la incógnita aparece elevada al cuadrado, de una manera que no puede eliminarse. A este tipo de ecuaciones se las llama de *segundo grado*, o también *cuadráticas*.

La dificultad que presentan estas ecuaciones está en que las reglas mencionadas hasta ahora son insuficientes para despejar x, como podrá comprobar el lector si decide intentarlo. El nuevo recurso que se utilizará en este tipo de ecuaciones es una técnica conocida como *completación de cuadrados.* Para ayudar a entender este método, recordemos la "fórmula del binomio":

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Lo que haremos para tratar las ecuaciones de segundo grado será utilizar esta fórmula; veamos cómo.

1. La ecuación
$$x^2 - 4 = 0$$
es equivalente a
$$x^2 = 4,$$
cuyas soluciones son $x = \sqrt{4}$ y $x = -\sqrt{4}$, es decir $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

   Aprovechemos aquí para hacer notar que con frecuencia se utiliza la notación $x = \pm\sqrt{4}$. Es importante que el alumno entienda que esto **solamente** *significa que hay dos soluciones, $+\sqrt{4}$ y $-\sqrt{4}$, no una solución "con más menos"*

2. La ecuación
$$(x+1)^2 - 4 = 0 \tag{2.1.2}$$
es equivalente a
$$(x+1)^2 = 4,$$
que admite dos soluciones: $x + 1 = 2$ y $x + 1 = -2$, o sea $x = 1$ y $x = -3$.

3. Sea ahora la ecuación
$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$
Lo que mostraremos es que esta ecuación también puede llevarse a una forma similar a la de la ecuación 2.1.2. Efectivamente, $x^2 - 4x$ puede verse como los dos primeros términos del desarrollo de un binomio:
$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$
Tenemos, por tanto,
$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4.$$
Utilizando esto, podemos escribir
$$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3,$$
y obtenemos entonces una ecuación equivalente
$$(x-2)^2 - 3 = 0,$$
de donde vemos que tenemos dos soluciones,
$$x - 2 = \sqrt{3}, \text{ y } x - 2 = -\sqrt{3},$$
es decir que la ecuación original tiene dos soluciones, $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Notemos que si bien hemos dicho que describiríamos un método diferente al de sumar o restar un número de ambos miembros de la igualdad, al final esto es precisamente lo que hemos hecho; la "diferencia" de este método, es que es menos obvio cuál es el número que hay que sumar ! De *hecho, lo único "nuevo" que hemos hacho ha sido tomar raiz cuadrada en el momento adecuado. Para que esto quede más claro, volvamos a resolver la ecuación anterior,*

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Como $-4x$ *debe ser el "doble producto" en el desarrollo del binomio, y sabemos que el primer término será* x *(por el* x^2*), tenemos*

$$2\,x\,p = -4\,x,$$

de donde $p = -2$*. Entonces sumamos* $(-2)^2 = 4$ *a ambos miembros de la igualdad:*

$$x^2 - 4x + 4 + 1 = 4;$$

Por la fórmula del binomio,

$$(x-2)^2 + 1 = 4,$$

y ahora restando 1 *de ambos miembros,*

$$(x-2)^2 = 3.$$

Ejercicios

54. Utilizando el método de completación de cuadrados descripto, resolver las ecuaciones siguientes:

    a) $x^2 + 4x + 2 = 0$
    b) $x^2 - 16x + 39 = 0$
    c) $x^2 - 10x + 5 = 0$
    d) $x^2 + x = 1$
    e) $2x^2 - 4x + 2 = 4$
    f) $(x-1)(x-3) = 1$

Fórmula General

El método que hemos mostrado es general, en el sentido de que sirve para resolver cualquier ecuación de segundo grado. Consideremos una ecuación de segundo grado general:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sacando factor común a en los dos primeros términos,

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0. \tag{2.1.3}$$

Para que los términos entre paréntesis sean parte del cuadrado, necesitamos que $\frac{b}{a}x$ sea el doble producto:

$$\frac{b}{a}x = 2xp,$$

de manera que

$$p = \frac{b}{2a}.$$

Podemos escribir

$$0 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2},$$

que introducido dentro del paréntesis en la ecuación 2.1.3, nos da

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0$$

y, agrupando,

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = 0,$$

o sea

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c.$$

Ahora es fácil despejar x:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

y extrayendo raiz cuadrada en ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

o sea

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por la fórmula que hemos obtenido, tenemos en principio dos soluciones. Pero la presencia de la raiz cuadrada obliga a un análisis posterior.

Discusión de las soluciones de una ecuación cuadrática

El número $b^2 - 4ac$, se llama el *discriminante* de la ecuación, debido a que es quien "decide" cómo se comportan las soluciones:

– Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces hay dos soluciones distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

– Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces hay una única solución:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

– Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces ningún número real puede ser solución de la ecuación (porque todo número real elevado al cuadrado es positivo).

Ejemplos

1. La ecuación
$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$
tiene por discriminante $3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$, y tiene por tanto dos soluciones:
$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

2. El discriminante de la ecuación
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$
es $2^2 - 4{,}2 = -4 < 0$. Luego, la ecuación no tiene soluciones (reales).

3. La ecuación
$$9x^2 + 3x + \frac{1}{4} = 0$$
tiene discriminante $3^2 - 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} = 0$. Luego, tiene solución única:
$$x = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

Ejercicios

55. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - x - 2 = 0$.

b) $4x^2 + 4x = -5$.

c) $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

d) $x(x - 1) = 2(x + 1)$.

e) $(x - 1)(x + 2) = 2x^2 - 1$.

f) $(2x-1)^2-(x+1)=0$.

56. Utilizando el discriminante, decir cuántas soluciones tiene cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) x^2-6x+5.

   b) $x^2-\frac{2}{3}x+1=0$.

   c) $\left(\frac{x}{2}\right)^2-3x+1=0$.

   d) $-\frac{2}{3}x^2+\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$.

57. ¿Para qué valores de k admite una única solución la ecuación?

   a) $x^2-2kx+4=0$.

   b) $kx^2-kx+1=0$.

58. Resolver las siguientes ecuaciones en x:

   a) $4x^2-4ax+a^2=0$ Resp.: $\frac{a}{2}$ (única)

   b) $x^2-2x+1-a^2=0$ Resp.: $1+a$ y $1-a$

   c) $ax^2+(a^2-1)x-a=0$ Resp.: $-a$ y $\frac{1}{a}$

   d) $(a^2+1)x^2-ax+1=0$ Resp.: sin solución real

   e) $x^2-ax+ab=bx$ Resp.: a y b

2.1.4. Ecuaciones de Grado Superior

La resolución de ecuaciones de grado superior al dos, es bastante más dificultosa. Digamos solamente que existen fórmulas – complicadas – para la resolución de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grado, y que existe una **demostración** de que **NO** hay fórmulas para la solución de la ecuación general de grado mayor o igual a 5

Sin embargo, ciertas ecuaciones en particular sí pueden resolverse con métodos sencillos, y ellas son las que mencionaremos en esta sección.

Caso 1: Ecuación bicuadrada

Llamamos *bicuadrada* a una ecuación de grado 4 de la forma

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

La forma de resolverla es notar que es una ecuación de segundo grado en x^2.

Veamos un ejemplo:

$$x^4-5x^2+4=0.$$

Si escribimos $t = x^2$, tenemos
$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$
Las soluciones de esta ecuación son $t_1 = 1$ y $t_2 = 4$, es decir que las soluciones de
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
son $x^2 = 1$ y $x^2 = 4$, de manera que tenemos cuatro soluciones:
$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$$

Caso 2: Ecuaciones que se factorizan

En ciertos casos una ecuación de grado superior puede factorizarse como un producto de ecuaciones de menor grado. Veamos un ejemplo: la ecuación de tercer grado
$$x^3 - 3x^2 + x = 0$$
puede escribirse como
$$x \cdot (x^2 - 3x + 1) = 0.$$
Observemos que si el producto de dos números es cero, esto significa que al menos uno de los dos es cero. De manera que las soluciones de la ecuación serán $x = 0$ y además las soluciones de
$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$
que son $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, de modo que las soluciones de
$$x^3 - 3x^2 + x = 0$$
son
$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ejercicios

59. Resolver las siguientes ecuaciones:

    a) $4x^2 - x^2 - 2 = 0$

    b) $8x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

    c) $6x^4 + 5x^2 + 1 = 0$

    d) $x^4 - 3x^2 = 0$

    e) $x(3x+1)(5x-6) = 0$

    f) $6x^2(x-1) = 2(x-1)$

    g) $x^2 - 4 = x^3 - 2x^2$

2.1.5. Ecuaciones Fraccionarias

La ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = -\frac{2}{x^2} \tag{2.1.4}$$

no es ni lineal ni cuadrática, pues la incógnita x aparece en los denominadores (es decir, con potencias *negativas*). A este tipo de ecuaciones las llamaremos *fraccionarias*.

Siempre es posible, operando convenientemente, transformar una ecuación fraccionaria en otra no fraccionaria, *entre cuyas soluciones* estarán las soluciones de la ecuación original; esto es importante de destacar, puede haber soluciones de la ecuación no fraccionaria que no lo sean de la fraccionaria.

A modo de ejemplo, resolvamos la ecuación 2.1.4. En primer lugar, sumando $\frac{2}{x^2}$ en ambos miembros, tenemos la ecuación equivalente

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Ahora sumamos las fracciones del primer miembro, utilizando el *mínimo común múltiplo* de los denominadores:

$$\frac{x(x-1) + 2x^2 + 2(x-1)}{x^2(x-1)} = 0,$$

o sea

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^2(x-1)} = 0,$$

que es una ecuación que tiene entre sus soluciones las de la ecuación original. Tenemos que tener en cuenta que la división por cero no es posible, de manera que las soluciones que anulen alguno de los denominadores de la ecuación no deben ser tenidas en cuenta; en nuestro caso, x no puede ser ni 0 ni 1. Para que un cociente sea 0, deber ser nulo el numerador, de manera que ahora tenemos que resolver

$$3x^2 + x - 2 = 0,$$

y quedarnos sólo con las soluciones que no sean ni 0 ni 1.

Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, que son entonces las soluciones de la ecuación fraccionaria original. Puede ser útil para el alumno verificar que efectivamente las soluciones halladas satisfacen la ecuación. Para $x = 2/3$, el primer miembro es

$$\frac{1}{2/3} + \frac{2}{2/3 - 1} = \frac{3}{2} + \frac{2}{-1/3} = \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2},$$

y el segundo miembro

$$-\frac{2}{(2/3)^2} = -\frac{2}{4/9} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$

Dejamos al lector la verificación de que -1 también es solución.

Resumamos ahora los pasos necesarios para tratar una ecuación fraccionaria:

1. Efectuar los pasajes de términos necesarios para obtener una ecuación en la cual uno de los miembros es 0.
2. Realizar las operaciones y utilizar, al sumar, el *mínimo común múltiplo* de los denominadores.
3. Excluir como posibles soluciones los valores que anulan el denominador.
4. Resolver la ecuación que se obtiene igualando el numerador a 0.

Ejercicios

60. Resolver las siguientes ecuaciones y verificar las soluciones obtenidas:

    a) $1 + \dfrac{1}{x-1} = x$

    b) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x} = 1$

    c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{x-1}$

    d) $\dfrac{1}{3}x + 1 = -\dfrac{4}{x-4}$

Hagamos un nuevo ejemplo para clarificar los pasos del método. Sea la ecuación

$$\frac{4x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = -1$$

1. Sumando 1 a ambos miembros, tenemos

$$\frac{4x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} + 1 = 0.$$

2. Sumamos las fracciones utilizando el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es x^2-1. Al ser una diferencia de cuadrados, $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. La ecuación queda entonces

$$\frac{4x - 2(x+1) + x^2 - 1}{x^2-1} = 0,$$

es decir

$$\frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x+1)} = 0.$$

3. Debemos excluir de las soluciones a los números 1 y -1, que anulan el denominador.
4. La ecuación $x^2+2x-3=0$ tiene como soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$. Como el 1 hay que descartarlo, la única solución de la ecuación es $x = -3$.

Para terminar con el ejemplo veamos cuál es la ventaja de utilizar el *mínimo común múltiplo* para sumar las fracciones. Si hubiéramos tomado como denominador común $(x^2-1)(x-1)$, hubiéramos llegado a

$$\frac{x^3+x^2-5x+3}{(x^2-1)(x-1)}=0,$$

y tendríamos que resolver la ecuación

$$x^3+x^2-5x+3=0,$$

que no es tan sencilla !

Ejercicios

61. Resolver las siguientes ecuaciones y verificar las ecuaciones obtenidas:

a) $\dfrac{7}{x-1}-\dfrac{6}{x^2-1}=5$ Resp.: 2 y $-\dfrac{3}{5}$

b) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-2x}$ Resp.: -1

c) $\dfrac{1}{x-1}+x=\dfrac{x^2+1}{x}$ Resp.: sin solución

d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}=1$ Resp.: $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$

e) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x}{x-1}=2$ Resp.: $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

f) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{1}{x^2-1}$ Resp.: 0

g) $\dfrac{x}{x+1}+1=\dfrac{1}{x}$ Resp.: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

h) $\dfrac{7}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{1+4x^2}{x^3-x}$ Resp.: $-\dfrac{1}{10}$

i) $1+\dfrac{1}{x}=x\left(1-\dfrac{x+1}{x}\right)$ Resp.: $-\dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{x}$ Resp.: $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

k) $\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{5}{x^2}+4=0$ Resp.: $\pm 1,\ \pm\dfrac{1}{2}$

l) $\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{x+1}-1=\dfrac{1}{x}$ Resp.: $-2,\ 1$

m) $\dfrac{1}{x}\left(2+\dfrac{x^2}{x+1}\right)=1-\dfrac{1}{x}$ Resp.: $-\dfrac{3}{2}$

2.1.6. Sistemas de ecuaciones lineales

Hay problemas en que las cantidades desconocidas son varias, y las condiciones que verifican también son más de una. Consideremos el siguiente ejemplo:

"Hace un año, la edad del padre quintuplicaba la del hijo. El año que viene, la edad del padre será el cuádruple de la del hijo. ¿Cuáles son las edades?"

Las cantidades desconocidas en este problema son dos: la edad del padre y la del hijo. Llamemos p a la primera y h a la segunda. Entonces las condiciones que brinda el problema son: hace un año, la edad del hijo era $h-1$ y la padre $p-1$, y cumplían la relación

$$p - 1 = 5(h - 1).$$

De la misma manera, la segunda condición es

$$p + 1 = 4(h + 1).$$

Luego, p y h deben verificar dos ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} p - 1 = 5(h - 1) \\ p + 1 = 4(h + 1) \end{cases}$$

A continuación consideraremos algunos métodos que permiten resolver este tipo de ecuaciones con varias incógnitas. La idea básica es trabajar de modo de llegar a una ecuación con una sola incógnita. Veremos dos maneras de hacerlo.

1. *Método de sustitución.* Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones, y sustituir en la otra ecuación esa incógnita por la expresión obtenida. Averigüemos con este método las edades del padre y del hijo.

De la primera ecuación:

$$p = 1 + 5(h - 1).$$

Sustituyendo en la segunda:

$$1 + 5(h - 1) + 1 = 4(h + 1),$$

de donde, despejando, llegamos a que la edad del hijo es $h = 7$; con este valor, obtenemos la edad del padre de cualquiera de las dos ecuaciones, $p = 1 + 5(h - 1) = 31$.

2. *Método de eliminación (o de sumas y restas).* En este caso, la idea es sumarle a una ecuación un múltiplo de la otra, de manera que se cancele una de las incógnitas. Para esto debemos "ordenar" el sistema: esto significa poner todas las incógnitas a la izquierda del signo = en cada ecuación. En el caso de las edades del padre y del hijo, el sistema ordenado sería

$$\begin{cases} p - 5h = -4 \\ p - 4h = 3 \end{cases}$$

Para eliminar h, multiplicamos la primera ecuación por $-\dfrac{4}{5}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{5}p + 4h = \dfrac{16}{5} \\ p - 4h = 3 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$\left(1-\frac{4}{5}\right)p = 3+\frac{16}{5},$$

o sea

$$p = \frac{3+\frac{16}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{31}{5}}{\frac{1}{5}} = 31.$$

Ahora podemos obtener nuevamente la edad del hijo, a partir de la edad del padre ahora conocida, de cualquiera de las dos ecuaciones.

Con estos métodos que hemos comentado se puede resolver cualquier sistema lineal de dos – o más – ecuaciones, con dos – o más – incógnitas. Sin embargo, en la práctica, ya deja de ser una buena idea intentarlo cuando aumenta el número de variables y de ecuaciones. En su momento, en el curso de la carrera, se verán métodos más sofisticados, que permiten atacar de un modo más sistemático sistemas de muchas ecuaciones con muchas incógnitas.

Ejercicios

62. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y verificar las soluciones obtenidas:

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4x-y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=1 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=\frac{5}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y-3}{2}=\frac{1}{6} \\ \frac{3(y-2)}{2}-\frac{6x+3}{6}=-\frac{3x-7}{3} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x+\frac{3(3x-y)}{5}=2x-\frac{4y}{3}-5 \\ 3x+\frac{3}{2}=-\frac{11}{2}y \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x-\frac{4}{5}y-2x+3y=\frac{11}{5} \\ \frac{2}{3}+3y+4x-9y=-6+2x \end{cases}$

63. Resolver los siguientes sistemas lineales en x e y:

$a)$ $\begin{cases} x - ay = 5 \\ ax + y = 5 \end{cases}$ Resp.: $x = \dfrac{5(1+a)}{1+a^2}, y = \dfrac{5(1-a)}{1+a^2}$

$b)$ $\begin{cases} 2(x+a) - \dfrac{y}{b} = 2a \\ bx + y - 2b = -b \end{cases}$ Resp.: $x = \dfrac{1}{3}, y = \dfrac{2b}{3}$

$c)$ $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{a+1} = 2 \\ \dfrac{ax-y}{a-1} = 1 \end{cases}$ Resp.: $x = 2, y = a+1$

64. Resolver los siguientes sistemas lineales:

$a)$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \\ 2z - x = 1 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ y - 3x = 1 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} x + 3y + z = 14 \\ 3x + y + z = 20 \\ y - z = -1 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ x - 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

2.1.7. Sistemas de Ecuaciones Mixtos

Tanto el método de eliminación como el de sustitución, recién vistos, si bien son específicos para ecuaciones lineales, en ciertos casos particulares permiten resolver ciertos sistemas de dos ecuaciones en los cuales una o ambas ecuaciones son cuadráticas.

Ejemplo 1. En el sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 41 \\ x - y = 7 \end{cases} \tag{2.1.5}$$

una de las ecuaciones es lineal y la otra es cuadrática. Aquí podemos aplicar sustitución, porque de la ecuación lineal podemos despejar una de las incógnitas para reemplazar en la segunda. Veamos los pasos

1. Despejamos x de la ecuación lineal:
$$x = y + 7;$$
2. sustituímos x por $y + 7$ en la ecuación cuadrática:
$$2(y+7)^2 + y^2 = 41;$$
3. resolvemos la ecuación anterior, obteniendo dos valores:
$$y_1 = -3; y_2 = -\frac{19}{3};$$
4. como $x = y + 7$, tenemos
$$\begin{cases} \text{para } y_1 = -3 : & x_1 = -3 + 7 = 4; \\ \text{para } y_2 = -\dfrac{19}{3} : & x_2 = -\dfrac{19}{3} + 7 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Luego, el sistema tiene dos soluciones:
$$x_1 = 4,\ y_1 = -3$$
y
$$x_2 = \frac{2}{3},\ y_2 = -\frac{19}{3}.$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que ambas soluciones efectivamente satisfacen el sistema 2.1.5.

Ejemplo 2. En el sistema
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11 \\ 3y^2 + 2x = x^2 \end{cases} \tag{2.1.6}$$
ambas ecuaciones son cuadráticas; notemos, sin embargo, que si pensamos a y^2 como una variable, el sistema es en realidad muy similar al sistema 2.1.5.

1. Multiplicando por -3 la primera ecuación y por 2 la segunda, tenemos:
$$\begin{cases} -3x^2 - 6y^2 = -33 \\ 6y^2 + 4x = 2x^2 \end{cases}$$
2. sumando ambas ecuaciones:
$$-3x^2 + 4x = -33 + 2x^2;$$
3. resolviendo esta última, obtenemos
$$x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{11}{5}$$

4. de la primera ecuación:

$$x^2 + 2y^2 = 11, \text{ es decir } y^2 = \frac{11 - x^2}{2};$$

para $x_1 = 3$, debe ser $y^2 = \dfrac{11 - 3^2}{2} = 1$, o sea $y = 1$ ó $y = -1$; para $x_2 = -\dfrac{11}{5}$, debe ser $y^2 = \dfrac{11 - (-11/5)^2}{2} = \dfrac{77}{25}$, o sea $y = \dfrac{\sqrt{77}}{5}$ ó $y = -\dfrac{\sqrt{77}}{5}$.
Luego, el sistema tiene *cuatro* soluciones:

$$x_1 = 3,\ y_1 = 1;$$

$$x_1 = 3,\ y_2 = -1;$$

$$x_2 = -\frac{11}{5},\ y_3 = \frac{\sqrt{77}}{5};$$

$$x_2 = -\frac{11}{5},\ y_4 = -\frac{\sqrt{77}}{5}.$$

Ejercicios

65. Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y - x = 2 \\ x^2 - 6x + 8 = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 6xy \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 18 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 25 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases}$

$i)$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$

$j)$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 2 \\ 2x - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

$k)$ $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$

2.2. Problemas de aplicación

Cuando comenzamos a hablar de las ecuaciones, mencionamos que normalmente provienen de ciertos problemas. De hecho, si no fuera por eso, resolver ecuaciones cada vez más complicadas – como hicimos en la parte 2.1 – por "deporte", no parece demasiado interesante. La resolución de ecuaciones se convierte en una tarea valiosa cuando las respuestas obtenidas tienen una cierta aplicación. Ver algunas de estas aplicaciones – los problemas – será el tema de esta sección.

Recordemos una vez más la idea básica: las cantidades desconocidas aparecen en las ecuaciones como letras, que son tratadas como si fueran números; las relaciones a las que están sujetas dichas cantidades dan origen a las ecuaciones que permitirán resolver el problema.

A partir de aquí desarrollaremos esta idea a partir de ciertas ideas básicas y de ejemplos. El objetivo es que el alumno se familiarice paulatinamente con el ejercicio mental de plantear problemas en forma de ecuaciones, y de aplicar los métodos aprendidos en la sección 2.1 para resolver dichas ecuaciones (¡ y así resolver finalmente el problema !).

2.2.1. Problemas

El primer paso en la resolución de un problema es asegurarse de haber comprendido correctamente el enunciado, en cada uno de sus términos.

El paso siguiente será identificar las cantidades que se quieren conocer. Luego, buscar las relaciones expresadas en el enunciado y traducirlas al lenguaje de las ecuaciones.

Ejemplo 1. Asfaltar una calle costó \$33000. Los vecinos pagaron el doble de lo que aportó la Municipalidad, mientras que la Provincia contribuyó con las dos terceras partes del aporte municipal. ¿Cuánto dinero pusieron los vecinos?

Para comenzar, llamemos v a la incógnita: el aporte de los vecinos (por supuesto podríamos haber utilizado cualquier otra letra o símbolo, pero normalmente uno trata de utilizar letras que recuerden de algún modo lo que representan).

Sabemos, por el enunciado, que la contribución municipal fue de $\frac{v}{2}$, y que el aporte provincial fue de $\frac{2}{3} \cdot \frac{v}{2}$. La suma de estos aportes da el total de la obra, o sea

$$v + \frac{v}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{v}{2} = 33000$$

Tenemos entonces una ecuación lineal, cuya solución es

$$v = 18000,$$

lo que nos dice que el aporte de los vecinos fue de \$ 18000.

Verifiquemos que la solución es la correcta:

si el aporte vecinal es:	\$	18.000
el municipal es la mitad:	\$	9.000
el provincial, dos tercios del municipal:	\$	6.000
es costo de la obra es la suma:	\$	33.000

Ejemplo 2. En una reunión, la cantidad de mujeres supera en 8 a la tercera parte de la cantidad de hombres. Al retirarse dos parejas, la cantidad de hombres duplicó la cantidad de mujeres. ¿Cuántas personas estaban reunidas al principio?

Los datos que tenemos que averiguar son la cantidad de mujeres, que llamaremos m, y la cantidad de hombres, que llamaremos h.

La primera relación que expresa el problema se traduce como

$$m = \frac{1}{3}h + 8$$

Al retirarse dos parejas, quedan $m - 2$ mujeres y $h - 2$ hombres. La segunda relación es

$$h - 2 = 2(m - 2)$$

Tenemos entonces el sistema lineal:

$$\begin{cases} m = \frac{1}{3}h + 8 \\ h - 2 = 2(m - 2) \end{cases}$$

cuya solución es $m = 22$, $h = 42$. Por lo tanto, la cantidad de personas que había originalmente en la reunión es de $m + h = 22 + 42 = 64$.

El lector puede verificar fácilmente que la solución es correcta.

Ejercicios

66. Resolver los siguientes problemas:

   a) Se quieren separar 77 gramos de oro en dos partes, de tal manera que la mayor tenga $19,5$ gramos más que la menor. ¿Cuántos gramos debe contener cada parte?

b) Hallar un número sabiendo que si a su triple se le resta uno, se obtiene lo mismo que si a su tercera parte se le suma uno.

c) ¿Cuál es el número cuyo doble supera en 15 a su mitad?

d) Hace dos años la edad del padre era cuatro veces la edad del hijo. Dentro de dos años, la edad del hijo será la tercera parte de la edad del padre. Hallar las edades actuales de ambos. Resp: P=18, H=4.

e) El perímetro de un triángulo es de 68 cm. El segundo lado es 8 cm más largo que el primero, y 7 cm más corto que el tercero. Hallar las longitudes de los tres lados. Resp: a=15, b=23, c=30.

f) En la oficina de personal hay tres veces más empleados que en contaduría. Cuando se transfieren 7 de una a la otra, ambas quedan con la misma cantidad. Averiguar el número de empleados de cada oficina. Resp: P=21, C=27.

g) ¿Cuál es la longitud de una varilla si su quinta parte es roja, dos tercios son blancos, y quedan dos metros sin pintar? Resp: 8.

h) Al recibir mi sueldo, gasté la cuarta parte en comida, la mitad del resto en viajes, y aún me quedan $ 120. ¿Cuánto cobré? Resp: 320.

i) ¿Cuántas manzanas hay en una canasta si sacando la tercera parte más nueve, queda la mitad? Resp: N=54.

j) Tres canastas contienen en total 42 manzanas. Pasando 3 de la primera a la segunda, y 1 de la tercera a la primera, las tres canastas quedan con igual cantidad. ¿Cuántas manzanas había en cada canasta?. Resp: a=16, b=11, c=15.

k) Si se aumenta en dos metros el largo y el ancho de un rectángulo, su perímetro es de 24 metros. Si el largo se disminuye en dos metros, resulta un cuadrado. Hallar las dimensiones del rectángulo. Resp: a=3, b=5.

2.2.2. Pasos para resolver problemas

Comenzaremos ampliando las recomendaciones que se dieron anteriormente. Lo que haremos será establecer claramente los pasos que se deben dar al encarar la resolución de un problema, para ayudar al alumno a formar su propio criterio.

Hay cuatro pasos necesarios al enfrentarse a un problema:

1. COMPRENDER EL PROBLEMA

   - Tener la seguridad de haber comprendido completamente el enunciado.
   - Si es necesario, ayudarse para visualizar el problema con dibujos, esquemas, etc.
   - Asegurarse de saber qué significan los conceptos específicos (área de una figura, qué es velocidad, qué significa “ganancia”, etc.).
   - Comprender qué se pide y cuáles son los datos.

2. PLANTEAR EL PROBLEMA
   - Una vez entendido el problema es conveniente formularse algunas preguntas que ayuden a plantearlo. Por ejemplo: "¿Entre qué cantidades se establecen relaciones en el enunciado?". "¿Qué cantidades debo conocer para obtener la respuesta?".
   - Puede haber relaciones no explícitas en el enunciado pero originadas en hechos específicos (por ejemplo, el teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos, definición de velocidad, etc.).
   - Elegir las incógnitas, y designarlas con letras adecuadas.
   - En forma razonada, traducir las relaciones al lenguaje de las ecuaciones.
   - Establecer claramente cuáles son las ecuaciones a resolver.
3. RESOLVER LAS ECUACIONES
   - Identificar el tipo de ecuaciones halladas y resolverlas.
4. EXAMINAR LAS SOLUCIONES
   - Entre las soluciones halladas, descartar aquellas que carezcan de sentido para el problema (por ejemplo, un área o un tiempo no pueden ser negativos).
   - Responder a la pregunta del problema.
   - Verificar que las soluciones obtenidas efectivamente satisfacen el enunciado del problema.

Ilustraremos algunos aspectos de este programa con un problema:

Ejemplo 3. Dos hermanas llevan al mercado 100 sandías, y se ponen a venderlas por separado. Al final del día, la primera de las hermanas obtuvo \$ 32,20 y la segunda \$ 99,36. ¿Cuántas sandías vendió cada una, si sabemos que la segunda vendía cada sandía un 20 % más cara que su hermana?

En este enunciado los datos son relaciones entre precios y cantidades vendidas por cada hermana; para establecer estas relaciones hay que recordar (o razonar) que el monto de una venta se obtiene multiplicando la cantidad vendida por el precio unitario de los artículos.

Es natural entonces utilizar las incógnitas:
p: precio al cual vendió la primera de las hermanas
n: cantidad vendida por la primera hermana
Inmediatamente tenemos:

$$p + \frac{20}{100} \cdot p : \text{ precio al cual vendió la segunda hermana}$$

$$100 - n : \text{ cantidad vendida por la segunda hermana.}$$

Luego:

$$n \cdot p = 32,20: \text{ pesos obtenidos por la primera}$$
$$(100 - n) \cdot \left(p + \frac{20}{100} \cdot p\right) = 99,36: \text{ pesos obtenidos por la segunda}$$

Tenemos luego el sistema de ecuaciones mixto:

$$\begin{cases} n \cdot p = 32,20 \\ (100 - n) \cdot 1,2 \cdot p = 99,36 \end{cases}$$

resolviéndolo, se tiene $n = 28$, $p = \$1,15$. Luego, la primera hermana vendió 28 sandías y la segunda 72.

Volvamos al problema para verificar las soluciones: si la primera hermana vendió 28 sandías a \$115 cada una, tiene que haber obtenido $28 \times 1,15$ pesos, que es justamente \$32,20. La otra vendió $100 - 28 = 72$, a un precio de $1,15 + 0,2 \times 1,15 = 1,38$, y $72 \times 1,38 = 99,36$.

Ejercicios

67. Resolver los siguientes problemas:

   a) Cuando se aumenta el lado de un cubo en 1 cm., su volumen aumenta en 2 cm^3. ¿Cuánto mide el lado del cubo? Resp: 0.26m.

   b) Un comerciante compró 30 metros de tela a \$ 3,5 el metro. Vende una parte a \$ 4,7 el metro, y el resto a \$ 4,1 el metro. Si obtuvo una ganancia de \$ 21, averiguar cuántos metros vendió a cada precio. Resp: a=5, B=25.

   c) Por dos kg de azúcar y cinco de café se pagó \$ 17. Si el precio del azúcar aumenta un 20 % y el del café disminuye un 10 %, la misma compra se pagaría \$ 15,90. Hallar el precio por kilo de cada artículo. Resp: A=1, C=3.

   d) Los lados de un rectángulo miden 7 y 12 metros. ¿En cuánto se debe aumentar el ancho y en cuánto se debe disminuir el largo para que el perímetro del mismo aumente en 2 metros y el área permanezca igual? Resp: a=6, b=14.

   e) Un corredor de bolsa compró ciertas acciones por \$ 1.000.000. Cuando las acciones subieron \$ 1000 cada una, vendió todas salvo dos en \$ 808.000. ¿Cuántas acciones había comprado? Resp: N=10, V=100000.

   f) Con \$ 105 se pueden comprar una cierta cantidad de ejemplares de un cierto libro. Si el precio por unidad se rebaja en \$ 2, se pueden comprar seis ejemplares más por el mismo dinero. ¿Cuál es el precio por ejemplar? N=15, V=7.

   g) Un obrero ha trabajado 37 horas y otro obrero 25. El primero, que gana \$ 2 más que el segundo por hora, cobró \$ 218 más que el segundo. ¿Cuánto ganó cada uno? Resp: $g_1 = 14$, $g_2 = 12$.

h) Un grupo de personas alquila un ómnibus para relizar un viaje. Si cada uno pone \$ 5,50 faltan todavía \$ 9,60; y si cada uno pone \$ 6 sobra \$ 6,40. ¿Cuánto debe poner cada uno para financiar el viaje? Resp: 5,8.

i) Una mujer lleva al mercado cierta cantidad de huevos, y piensa venderlos a \$ 0,25 cada uno. Al llegar, comprueba que 15 huevos se han roto; vende los restantes a \$ 0,28 cada uno, y de esta manera obtiene la misma ganancia que esperaba. ¿Cuánto obtuvo por la venta? Resp: 35 pesos.

2.2.3. Mezclas y porcentajes

Cuando se tiene una mezcla C de dos sustancias A y B (por ejemplo: alcohol y agua, una aleación de oro y cobre, dos tipos de café, etc.) debemos tener presente la relación básica entre los pesos:

a: peso de A (en alguna unidad de medida)

b: peso de B (en la misma unidad de medida)

c: peso de C (en la misma unidad de medida)

entonces:

$$a + b = c$$

Además, el tipo de mezcla se puede describir de dos maneras:

1. Dando la relación entre los componentes: $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, si nos dicen que A y B están en relación 3 a 2, esto significa $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ o, dicho de otro modo, de cada 5 partes de C, 3 son de A y 2 de B.

2. Dando el porcentaje de uno de ellos. Por ejemplo, "A está al 90 %", significa que

$$a = \frac{90}{100}c,$$

o dicho de otro modo, que de cada 100 gramos de C, 90 gramos son de A y 10 gramos de B.

Observaciones.

1. Para determinadas mezclas suelen emplearse términos específicos, que nosotros no usaremos. Por citar un ejemplo, en joyería las aleaciones de oro y cobre se expresan en *kilates*: "oro 18 kilates" significa que de cada 24 gramos de aleación, 18 son de oro puro y el resto de cobre.

2. Al mezclar dos líquidos, no vale para los volúmenes una ley similar a la de los pesos. Por eso es importante notar que cuando hablemos de porcentajes en una mezcla estamos hablando de pesos y no de volúmenes.

Ejemplo. Un farmacéutico dispone de alcohol al 92 %. ¿Cómo debe proceder para obtener 500 gramos de alcohol al 70 %?

Es claro que deberá rebajar con agua destilada una cierta cantidad de alcohol al 92 %. Llamemos

x: gramos a utilizar de alcohol al 92 %

y: gramos de agua a agregar

Las relaciones son:

$x + y = 500$: es lo que se quiere

$\frac{92}{100}x$: gramos de alcohol en la mezcla

que debe ser el 70 % de 500 gramos, es decir:

$$\frac{92}{100}x = \frac{70}{100} \cdot 500$$

Hemos obtenido el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 92x = 35{,}000 \end{cases}$$

cuya solución es: $x = \frac{35{,}000}{92} \simeq 380$, $y \simeq 120$, es decir, debe mezclar 380 gramos de alcohol al 92 % con 120 gramos de agua.

Ejercicios

68. Resolver los siguientes problemas:

    a) Se tienen 850 gramos de alcohol al 90 %. ¿Cuánta agua hay que agregarle para obtener alcohol al 80 %? Resp: 106.25 kg.

    b) Ciertas monedas de plata están hechas de una aleación de plata y cobre en relación de 37 a 3. ¿Cuánto cobre hay que agregar a 18 kilos de plata para obtener dicha aleación? Resp 1.46 kg

    c) Un joyero dispone de dos aleaciones de oro y cobre: una al 75 % y otra al 90 %. Si quiere obtener 12 gramos de oro al 85 %, ¿cuántos gramos de cada aleación debe tomar? Resp: $A_{25} = 4kg$ y $A_{90} = 8kg$.

    d) Un tipo de café cuesta \$ 3 el kilo y otro \$ 4,5 el kilo. Se han obtenido 20 kilos de una mezcla de ambos tipos. Si el costo por kilo de la mezcla de ambos cafés es de \$ 3,6 ¿cuántos kilogramos se empleó de cada uno? Resp: $C_1 = 12$kg $C_2 = 8$kg.

    e) Colocando parte de un capital de \$ 6.000 al 4 % mensual y el resto al 6 % mensual se obtuvo una ganancia de \$ 270 al final del mes. ¿cuánto dinero se colocó a cada intereés? Resp: $p_1 = 4500$ y $p_2 = 1500$.

2.2.4. Velocidad

Recordemos ahora el concepto elemental de velocidad que, como veremos, aparece en gran cantidad de problemas.

Si un objeto en movimiento recorre espacios iguales en tiempos iguales, se dice que su movimiento es *uniforme* (porque no es *acelerado*). En este caso, si recorre una distancia e en un tiempo t, se dice que tiene una velocidad v, dada por

$$v = \frac{e}{t}$$

La distancia se mide en alguna unidad de longitud (metro, kilómetro, centímetro, etc.) y el tiempo t con alguna unidad de tiempo (segundos, minutos, horas, etc.).

Antes de plantear un problema se debe decidir cuáles son las unidades más convenientes y transformar todos los datos a las unidades elegidas. Lo más conveniente, para no cometer errores en este sentido, es expresar las cantidades junto con sus respectivas unidades, y operar también con las unidades.

En todos los problemas sobre velocidades, supondremos que los movimientos son uniformes, es decir que la velocidad no cambia con el tiempo.

Ejemplo. Dos automóviles realizan un recorrido de 360 km. Uno de ellos tarda dos horas más que el otro, pues ha viajado a una velocidad 15 km/h menor. ¿Cuáles fueron las velocidades, y cuáles los tiempos empleados?

En el enunciado se relacionan las velocidades y los tiempos; por lo tanto utilizaremos como incógnitas:

v: velocidad del auto más lento (en km/h)

t: tiempo que empleó (en horas)

Tenemos, por definición de velocidad,

$$v = \frac{360km}{t}.$$

La velocidad del otro automóvil es $v + 15km/h$, y el tiempo que tardó, $t - 2h$. Utilizando nuevamente la definición de velocidad, ahora para el segundo auto,

$$v + 15km/h = \frac{360km}{t - 2h}$$

Nos ha quedado un sistema mixto:

$$\begin{cases} v = \dfrac{360km}{t} \\ v + 15km/h = \dfrac{360km}{t - 2h} \end{cases}$$

Al resolverlo, hallamos $v = 45km/h$ y $t = 8h$, que son la velocidad y el tiempo del primer auto. El segundo tuvo una velocidad de $v + 15km/h = 60km/h$, y un tiempo de $t - 2h = 6h$.

Ejercicios

69. Resolver los siguientes problemas:

    a) Un automóvil realiza un trayecto a 80 km/h y retorna a 100 km/h, tardando en total 5 horas, ¿Qué distancia recorrió?

    b) Un auto viaja a 90 km/h habiendo partido 40 minutos después que otro que viaja a 60 km/h. ¿Cuánto tarda en alcanzarlo?

    c) Un tren de carga viajando a 5 km/h menos que su velocidad habitual, tarda una hora más para realizar un viaje de 210 km. ¿Cuál es la velocidad normal del tren?

    d) Un tren de 220 metros de largo atraviesa un túnel en 3 minutos. Si la velocidad del tren es de 25 km/h, ¿cuál es el largo del túnel?

Veamos ahora otro ejemplo: “Una máquina puede realizar una tarea en 8 horas. Luego de haber trabajado 3 horas en esa tarea, se agrega otra máquina, de tal manera que no se interfieren en la labor, y juntas terminan el trabajo 3 horas después. ¿Cuánto tiempo emplearía la segunda máquina en realizar sola la tarea?”

Tenemos:

$$\frac{1}{8}: \text{ parte del trabajo que realiza la primera en 1 hora}$$

$$\frac{3}{8}: \text{ parte del trabajo que realiza la primera en 3 horas}$$

Si

$$x = \text{ horas que tarda la segunda en realizar el trabajo,}$$

entonces

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{8} = \text{ parte del trabajo que realizaron juntas en dos horas}$$

(notemos que las partes se suman porque asumimos que no hay interferencia entre las máquinas).

El trabajo que realizaron juntas las dos máquinas es lo que le quedaba a la primera luego de 3 horas, es decir

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Luego,

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{8} = \text{ parte del trabajo que quedaba} = \frac{5}{8}$$

Resolviendo la ecuación fraccionaria:

$$x = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}.$$

La segunda máquina tardaría 5 horas y 20 minutos en realizar la tarea.

Ejercicios

70. Resolver los siguientes problemas:

    a) Un tanque puede ser llenado por una canilla en 9 horas, y por otra en 14 horas. ¿Cuánto se tardará en llenarlo utilizando ambas canillas? Resp: 5.48 hs.

    b) Dos bombas de agua funcionando juntas llenan una pileta en 4 horas. Funcionando solas, una tarde 2 horas más que la otra en llenarla. ¿Cuántas horas tarda cada una?

    c) Dos estufas consumen un tubo de gas en 11 días. Se sabe que si una de ellas funciona 5 días, la otra termina de consumir el tubo en 14 días. ¿Cuánto tarda cada una en vaciar el tubo?

71. Resolver los siguientes problemas:

    a) A cierta velocidad pude realizar un tramo en 3 horas. Aumentando la velocidad en 20 km/h, lo hice en dos horas. ¿Cuántos kilómetros recorrí en total? Resp: 120km.

    b) Las acciones de una empresa sufrieron una baja del 14 %, y al día siguiente tuvieron un alza con la que recuperaron su valor original. ¿Cuál fue el porcentaje del alza? Resp: 16.28 %

    c) Un jugador profesional arregla un sueldo neto de $ 25.000 mensuales. Al ser el sueldo neto, la entidad debe hacerse cargo de los impuestos y aportes jubilatorios. El aporte jubilatorio es del 12 %, y no paga impuestos. El impuesto es del 6 %. ¿Cuál es el costo mensual del jugador? Resp: 29500.

    d) Se reparten 108 naipes entre varios jugadores, de manera tal que no sobre ninguna y que todos terminan con la misma cantidad de cartas. En la mano siguiente se retiran dos jugadores, y al repartirse los naipes nuevamente, cada uno recibe 3 cartas más y sobran 3 cartas. Si se retiran otros dos jugadores, ¿cuántas cartas recibe cada uno en la mano siguiente?

    e) Se mezcla café de $ 20 el kilo con café de $ 12 el kilo. ¿Qué proporción de cada uno debe contener la mezcla para que al venderla a $ 18 el kilo se obtenga una ganancia del 10 % sobre el costo?

    f) A y B están a 3 km de distancia. Si parten al mismo tiempo y caminan en la misma dirección, A alcanza a B en 6 horas. Si marchan uno hacia el otro, se encuentran en media hora. ¿Cuáles son sus velocidades?

    g) Un libro se vende en dos presentaciones: una rústica y una de lujo. Una biblioteca efectúa dos compras; en la primera adquiere 10 rústicas y 3 de lujo, pagando por las 10 rústicas $ 260 más que por las 3 de lujo. En la segunda oportunidad compra 4 de lujo y 1 rústica, pagando en total la mitad de lo que abonó en la compra anterior. ¿Cuál es el precio de cada presentación?

    h) Una canilla puede llenar un tanque de 750 litros en cierto tiempo. Si se agrega otra canilla que arroja 200 litros por hora, se necesita una hora menos. ¿Cuántos litros por hora arroja la primera canilla?

i) Un automovilista ha notado que a cierta velocidad ve pasar los postes telefónicos cada 5 segundos, y que cuando aumenta su velocidad en 10 km/h, los ve pasar cada 4 segundos. ¿Qué distancia hay entre un poste y el siguiente?

j) En los fondos de una vivienda hay un parque de 28 por 40 metros, donde se desea contruir una pileta rectangular de 160 m^2. Se quiere que la franja de parque que rodeará a la misma sea de ancho uniforme. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de la pileta?

k) Un señor lleva al mercado 100 cajones de manzanas para venderlas por cajón. Llegado el mediodía, y temiendo no poder vender las que quedaban, decide ofrecer los cajones a un 10 % menos cada uno, con lo cual logra vender todos pero obtiene un 6 % menos de lo que esperaba.

1) ¿Cuántos cajones vendió a cada precio?
2) ¿Se pueden saber los precios de venta?

l) Dos abogados han trabajado 37 horas el primero y 25 el segundo, para realizar un trabajo cuyo beneficio fue de $ 2.160. Si el segundo, por ser el socio principal, cobra un 40 % más que el primero, ¿cómo deben repartirse la ganancia?

m) Un hombre tarda 3 horas en realizar el trayecto desde su casa hasta la de su amigo, y el amigo tarde 4 horas en realizar el mismo trayecto. Si parten simultáneamente, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

n) Una canilla llena un tanque en 9 minutos menos que otra. Juntas pueden llenarlo en la tercera parte del tiempo que tarda la segunda. ¿En cuánto tiempo llena el tanque cada canilla?

ñ) Se dispone de dos aleaciones de plomo y estaño. En las mismas, las relaciones entre los metales son 3 a 2, y 7 a 3 respectivamente. ¿Qué cantidad de cada una es necesaria para obtener 9 kilos de una aleación que contenga el doble de plomo que de estaño?

o) ¿Puede existir un rectángulo de 5 m^2 de área y 8 m de perímetro? Una vez respondida esta pregunta, considerar la situación general:

Sean A y P dos números positivos. Mostrar que para que exista un rectángulo de área A y perímetro P se debe cumplir:

$$16A \leq P^2$$

En tal caso, ¿es único?

p) Un empleado recibe una bonificación anual del 4 % sobre la ganancia de la empresa (una vez deducida dicha bonificación). Si la empresa ha obtenido $ 26.000, ¿cuál es el monto de la bonificación?

q) ¿En qué porcentaje debe aumentarse el radio de un círculo para que su área aumente en un 10 %?

r) En un terreno de 30 por 50 metros, se desea contruir un edificio en torre. Una ordenanza municipal especifica que debe quedar, por lo menos, una franja libre de ancho constante que rodee al edificio y de área igual a la superficie cubierta por la construcción. ¿En qué sector del terreno debe contruirse el edificio?

2.3. Inecuaciones: casos elementales

Hasta ahora hemos estudiado ecuaciones, en las que se busca un número - o conjunto de números - que satisfaga una cierta condición, dada por una igualdad. Podría suceder que en lugar de una igualdad, tengamos como condición una desigualdad. En este caso, hablamos de *inecuaciones*, o *desigualdades*.

A diferencia de las igualdades, en las que salvo en casos excepcionales la solución está dada por un único número, o a lo sumo dos, será habitual en las desigualdades encontrar que la solución es un conjunto infinito. Por ejemplo, una desigualdad sencilla es

$$x \geq \frac{1}{2}, \tag{2.3.1}$$

y esta desigualdad es satisfecha por todos los números reales que son mayores o iguales a 1/2.

Veremos ahora cómo operar en casos levemente más complicados. Lo que intentaremos hacer en casi todos los casos, será llevar la desigualdad con la que estamos trabajando a una de la forma 2.3.1 o similar, de la cual conocemos la solución en forma obvia.

Para trabajar con desigualdades se puede, al igual que con las igualdades, sumar un número (positivo o negativo) a ambos miembros de la desigualdad sin que cambie la desigualdad; en el caso de multiplicar por un número, si éste es positivo de nuevo se mantiene la desigualdad, pero la cosa cambia cuando el número es negativo: en este caso la desigualdad se invierte. Esto se ve como natural si hacemos algunos ejemplos.

Si $a < b$, entonces $a - 2 < b - 2$, como puede convencerse el lector si lo piensa un poco. Pero si multiplicamos por -2, "quedaría" $-2a < -2b$, lo cual es contradictorio con $a < b$. La forma correcta es, que si $a < b$, entonces $-2a > -2b$ (nótese que "invertimos la desigualdad". Si se tiene en cuenta esto, la resolución de inecuaciones lineales es similar a la de ecuaciones lineales.

A manera de ejemplo, entontremos los valores de x tales que

$$3x - 5 \leq 8x - 3$$

Lo que nos conviene es tratar de "juntar las x" en un miembro; para esto, sumamos a ambos miembros $-3x$, obteniendo

$$-5 \leq 5x - 3$$

Ahora sumamos 3 a ambos miembros, y obtenemos

$$-2 \leq 5x$$

Finalmente, multiplicando la desigualdad por $1/5$, tenemos

$$-\frac{2}{5} \leq x$$

Observemos que si operamos de otra manera en la desigualdad precedente, puede ser necesario tener en cuenta la regla de dar vuelta la desigualdad cuando multiplicamos por un número negativo: si hubiéramos agrupado los términos al revés, hubiérmos sumado primero $-8x$, para obtener

$$-5x - 5 \leq -3$$

Ahora sumamos 5 a ambos miembros, y tenemos

$$-5x \leq 2$$

Si fuera una igualdad, simplemente multiplicaríamos por $-1/5$ para "despejar x". Aquí hacemos lo mismo, pero recordando que multiplicar por un número negativo invierte la desigualdad:

$$x \geq -\frac{2}{5}$$

Por supuesto, obtuvimos como solución el mismo conjunto: todos los números reales mayores o iguales a $-2/5$

Al igual que con las ecuaciones, puede pasar que una desigualdad sea "imposible" (o sea que la solución es el conjunto vacío, lo que es igual a decir que no tiene solución), o "tautológica", es decir que la desigualdad es satisfecha por todo número.

Como ejemplo sencillo de desigualdad imposible, tenemos

$$x > x + 1$$

¡ ningún número real es mayor que el que se obtiene sumándole 1 ! Formalmente, si sumamos $-x$ a ambos miembros, obtenemos

$$0 > 1,$$

que es claramente imposible.

De la misma forma podemos hacer un ejemplo sencillo de desigualdad tautológica:

$$x < x + 1$$

En este caso, todo número real es menor que el que se obtiene de sumarle uno. Formalmente, de nuevo sumamos $-x$ a ambos miembros para obtener

$$0 < 1,$$

que se cumple siempre.

Ejercicios

72. En cada caso hallar el conjunto de los x que satisfacen la desigualdad indicada:

a) $2\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq (x - 1)$

b) $(x - 1/2)^2 \geq (x + 3)^2$

c) $x(x - 1) < x^2 - 3x - 1/4$

d) $(x + 2)(x - 3) \leq x^2$

e) $2(x - (4 - 3x)) < 8$

f) $\frac{3x + 1}{4} > 5\frac{x - 2}{5}$

Lista de ejercicios sugeridos

Ejercicios 49.h), 49.i), 50-52, 54.a)-54.d), 55, 56, 59.c)-59.g), 61.a)-61.f), 62.b), 62.e)-62.f), 63.a), 64.d), 65.b), 65.e), 65.f), 65.i), 66.d), 66.j), 67.b), 67.f), 68.a), 68.e), 69.b), 69.c), 70.b), 71.a), 71.d), 71.o), 72.b), 72.d)

Capítulo 3

Geometría

A partir de este momento dejaremos el análisis puramente algebraico y nos enfocaremos en aspectos más bien geométricos. En particular en este capítulo repasaremos cuestiones básicas sobre las curvas más elementales del plano y sobre funciones trigonométricas, las cuales a su vez nos servirán de base para poder estudiar en el próximo capítulo vectores en el plano y en el espacio tridimensional.

Los objetivos de este capítulo son varios. En lo que respecta a curvas en el plano, estudiaremos principalmente las rectas y las circunferencias. Analizaremos las distintas formas de representarlas y veremos cómo pueden darnos una representación gráfica de las ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones lineales y de grado superior que hemos estudiado en el capítulo anterior.

En lo que respecta a las funciones trigonométricas, repasaremos sus definiciones, tanto en el plano como en los triángulos rectángulos. El alumno debería terminar este capítulo siendo capaz de manejar con cierta fluidez las distintas funciones trigonométricas en el plano, comprender la elección de signos según el cuadránte, poder realizar reducciones al primer cuadrante (esto será muy útil a la hora de estudiar vectores), y conocer las identidades más básicas, relación entre las distintas funciones trigonométricas, teoremas del seno y del coseno, las cuales serán de mucha ayuda a la hora de resolver problemas que involucren triángulos, no necesariamente rectángulos.

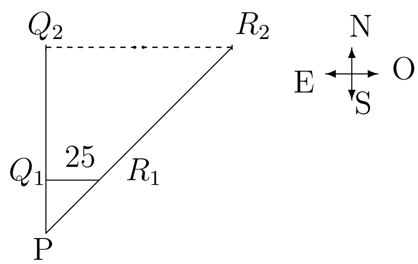
3.1. Introducción

Cuando tratamos con problemas de naturaleza geométrica, hay relaciones no explícitas y que es preciso conocer para poder abordarlos. En este capítulo estudiaremos algunas de estas relaciones.

Como muestra de lo que hemos dicho veamos dos ejemplos:

1. Dos barcos zarpan de puerto al mismo tiempo y viajan a velocidad constante: uno se dirige hacia el norte y el otro hacia el nordeste. Después de una hora la distancia que los separa es de 25 km. Se quiere averiguar qué distancia los separará después de 3 horas (suponemos aquí que la tierra es plana).

Hagamos un esquema de la situación:



Se quiere conocer la distancia Q_2R_2.

Hay una relación que viene dada por la semejanza de triángulos: los triángulos PQ_1R_1 y PQ_2R_2 tienen el ángulo P común y los lados adyacentes son proporcionales:

$$\frac{Q_2R_2}{PQ_2} = \frac{Q_1R_1}{PQ_1} = \frac{25}{PQ_1},$$

o sea

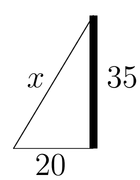
$$Q_2R_2 = 25 \times \frac{PQ_2}{PQ_1}.$$

Por el enunciado, sabemos que $PQ_2/PQ_1 = 3$, de manera que

$$Q_2R_2 = 25km \times 3 = 75km$$

2. Se va a colocar una antena de 35 m de altura y uno de los alambres que la sostendrá irá desde su punta hasta un punto del suelo distante a 20 m de su pie. Se quiere saber la cantidad de metros que hacen falta para dicho tiro de alambre.

El esquema es el siguiente:



Se trata de hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Para esto podemos utilizar el "Teorema de Pitágoras":

$$x^2 = 20^2 + 35^2,$$

de manera que

$$x = \sqrt{20^2 + 35^2} = \sqrt{400 + 1225} = \sqrt{1625} \simeq 40,3;$$

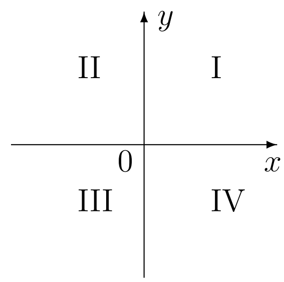
o sea que hacen falta 40,3 metros de alambre.

Los conceptos que han hecho su aparición en estos dos ejemplos, la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras, serán herramientas fundamentales en el desarrollo de este capítulo.

3.2. Plano Coordenado

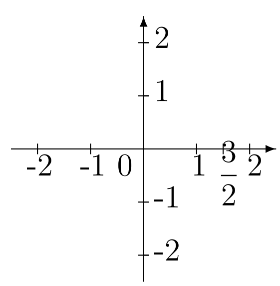
3.2.1. Coordenadas Rectangulares en el Plano

Para poder trabajar en el plano necesitamos identificar de algún modo a los puntos que lo componen. Para esto, se trazan dos rectas perpendiculares, que llamaremos "eje x" y "eje y" (ver figura); el punto de intersección de ambas rectas se llama "origen de coordenadas".



El plano queda entonces dividido en cuatro regiones, que llamaremos *cuadrantes*, numerados como se indica en la figura.

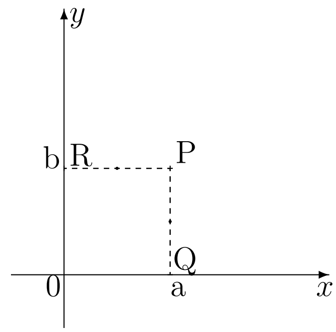
Luego fijamos arbitrariamente una unidad, y representamos los números sobre cada eje con esa misma unidad. El cero será el origen de coordenadas. Por convención, se colocan los números positivos a la derecha del cero en el eje x, y los negativos a la izquierda; sobre el eje y, se colocan los positivos arriba del origen y los negativos debajo.



Coordenadas de un punto. A un punto P del plano le asociamos dos números (ordenadamente) de la siguiente manera:

– Trazamos PQ perpendicular al eje x: al punto Q le corresponde un número a en el eje x.

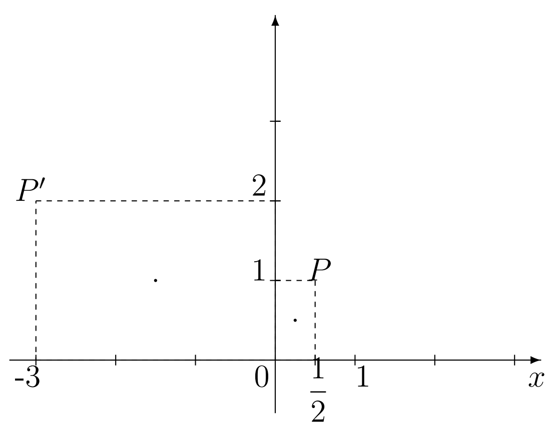
– Trazamos PR perpendicular al eje y: al punto R le corresponde un número b en el eje y.



Decimos que P tiene coordenadas (a, b). A la primera coordenada se la suele llamar *abscisa* de P, y a la segunda *ordenada* de P.

Recíprocamente, dado un par de número reales (x, y), es evidente que hay un punto P del plano tal que (x, y) son sus coordenadas. Por esto, es usual identificar al conjunto de puntos del plano con el conjunto de pares ordenados de números reales. A partir de este momento, haremos uso de esta convención, y haremos un uso indistinto de los conceptos de punto y de par ordenado de números reales.

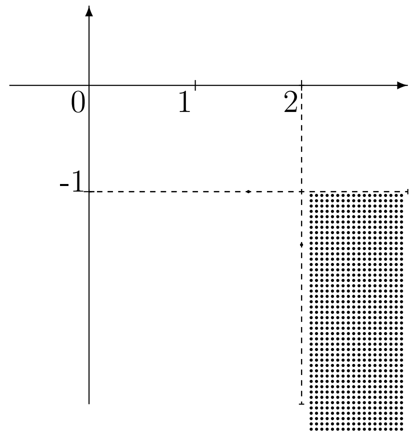
Ejemplo 1. Los puntos $P = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $P' = (-3, 2)$ se representan como en la siguiente figura:



Ejemplo 2. El conjunto de puntos $P = \{x, y\}$ cuyas coordenadas verifican $x \geq 2$ e $y \leq -1$, que se escribe

$$A = \{(x, y) : x \geq 2, y \leq -1\}$$

se representa como se indica en el gráfico siguiente:



Ejercicios

73. Representar en el plano los siguientes pares ordenados y decir a qué cuadrante pertenecen:

$$(2,-1);\ \left(-\frac{1}{2},3\right);\ \left(\frac{5}{3},2\right);\ (-1,-2)$$

74. Ubicación en el plano:

    a) ¿Qué signo tienen las coordenadas de un punto del segundo cuadrante? ¿Y del cuarto?

    b) Sombrear la parte del plano que corresponde a los puntos cuya abscisa es negativa.

    c) Sombrear la parte del plano que correponde a los puntos cuya abscisa es positiva y cuya ordenada es negativa.

75. Figuras:

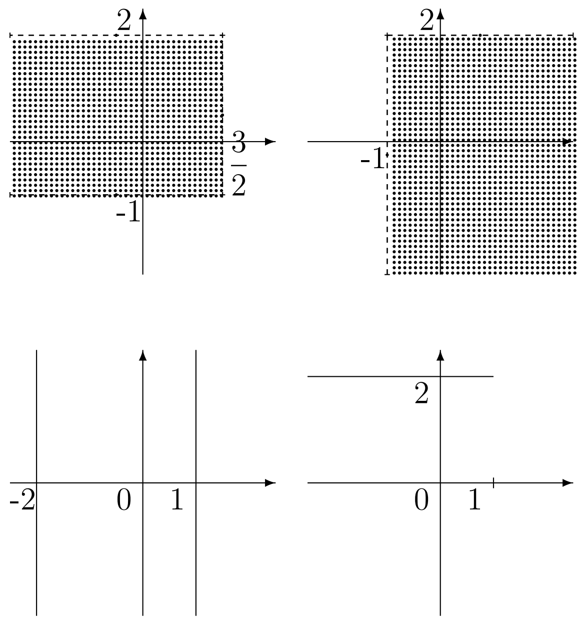
    a) Representar el triángulo de vértices $A=(0,0)$, $B=(3,0)$, $C=(2,3)$, y evaluar su área.

    b) Hacer lo mismo para $A=(1,0)$, $B=(1,3)$, $C=(0,1)$.

76. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

    $A=\{(x,y): x>-1\}$,
    $B=\{(x,y): y\leq 0\}$,
    $C=\{(x,y): x-y=0\}$,
    $D=\{(x,y): 1\leq x\leq 2, y>0\}$,
    $E=\{(x,y): x=y\}$,
    $F=\{(x,y): xy<0\}$.

77. Definir mediante condiciones los siguientes subconjuntos del plano



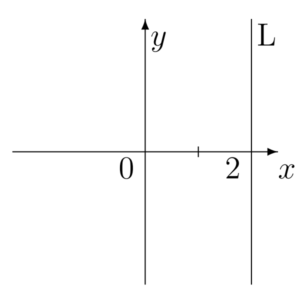
78. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:
    $A = \{(x, y) : 3x + 1 = 0\}$
    $B = \{(x, y) : y^2 + y - 2 = 0\}$
    $C = \{(x, y) : x + 4 = 0, y^2 = 1\}$

3.2.2. Rectas en el plano

Ahora nos ocuparemos de unos de los conjuntos básicos de la geometría: las rectas. Ya hemos visto algunos casos particulares, como por ejemplo:

a). El conjunto de puntos de abscisa 2, es decir

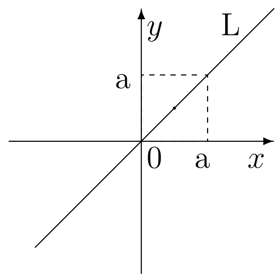
$$L = \{(x, y) : x = 2\},$$



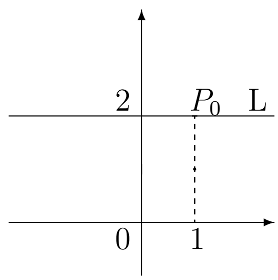
representa una recta vertical (o sea, paralela al eje y):

b). El conjunto de puntos cuya abscisa coincide con la ordenada representa una recta: la recta “diagonal”

$$L = \{(x, y) : x = y\}$$



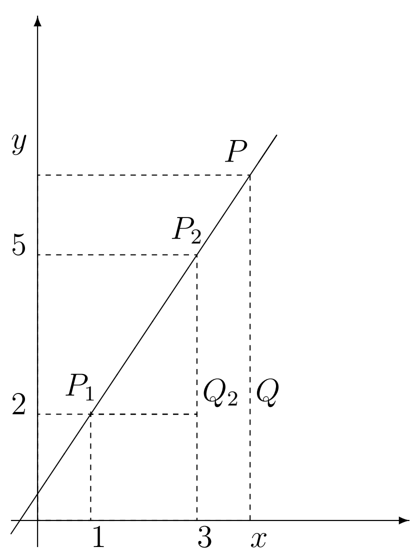
c). Si L es la recta horizontal (paralela al eje x) que pasa por el punto $P_0 = (1, 2)$:



claramente L se puede describir como el conjunto de puntos de ordenada 2, es decir

$$L = \{(x, y) : y = 2\}$$

Ahora examinaremos un ejemplo que nos ayudará a deducir las propiedades generales de las rectas. Sea L la recta que pasa por $P_1 = (1, 2)$ y por $P_2 = (3, 5)$



y sea $P = (x, y)$ uno de sus puntos. Entonces los triángulos rectángulos $P_1P_2Q_2$ y P_1PQ son semejantes, pues tienen ángulos iguales. Por lo tanto, sus lados son proporcionales; en particular,

$$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{3-1},$$

y operando llegamos a que cualquier punto (x, y) de la recta satisface la ecuación lineal (en dos variables)

$$2y - 3x = 1.$$

Recíprocamente, veamos que un punto $P = (x, y)$ que verifica $2y - 3x = 1$ pertenece a L. La recta vertical que pasa por el punto $(x, 0)$ corta a la recta L en un punto $P' = (x, y')$. Como P' está en L,

$$2y' - 3x = 1.$$

Por hipótesis,

$$2y - 3x = 1;$$

restando ambas ecuaciones, obtenemos $y = y'$, es decir, $P = P'$, de manera que P está en L.

Hemos demostrado que

$$L = \{(x, y) : 2y - 3x = 1\}$$

Estos argumentos pueden generalizarse a cualquier recta, y se puede demostrar el siguiente Teorema:

Teorema 3.1. *Sea L una recta del plano.*

1. *Si L es vertical, tiene una ecuación $x = c$:*

$$L = \{(x, y) : x = c\}$$

2. *Si L es horizontal, tiene una ecuación $y = c$:*

$$L = \{(x, y) : y = c\}$$

3. *Si L no es ni horizontal ni vertical, y pasa por los puntos $P_1 = (a_1, b_1)$ y $P_2 = (a_2, b_2)$, entonces tiene por ecuación:*

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = \frac{y - b_1}{x - a_1} \tag{3.2.1}$$

Observemos que la ecuación 3.2.1 puede escribirse de la forma

$$y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}x + \left(b_1 - a_1\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}\right),$$

o sea

$$y = mx + b,$$

que es la forma más común para expresar la ecuación de una recta. El número m se llama la *pendiente* de la recta, y b es la *ordenada al origen.*

Ejercicios

79. Razonando (¡ y **no** copiando !) como en los ejemplos, hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

    a) $(2, 3)$ y $(4, 5)$

    b) $(5, -1)$ y $(-5, -1)$

    c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $(0, 0)$

    d) $\left(1, -\frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

    e) $(-1, 5)$ y $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

    f) $(1, -1)$ y $(-1, 1)$

80. Sea L la recta que pasa por $P_1 = (-1, 0)$ y $P_2 = (5, 1)$:

    a) Hallar la ecuación de L y comprobarla.

    b) Mostrar otros dos puntos de L.

    c) Decir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a L:

    $$Q_1 = \left(3, \frac{1}{2}\right) \ ; \ Q_2 = (10, 2) \ ; \quad Q_3 = (-7, -1)$$

81. Hallar el valor de k para el cual los puntos

    $$(-1, 2), (3, 1) \text{ y } (2, -k+1)$$

    están alineados

Hemos visto ya que dada una recta L del plano es posible hallar una ecuación lineal

$$Ax + By = C$$

tal que

$$L = \{(x, y) : Ax + By = C\}.$$

Ahora realizaremos el proceso inverso: veremos que, fijados números A, B, C con $A \neq 0$ ó $B \neq 0$, el conjunto de puntos

$$L = \{(x, y) : Ax + By = C\}$$

es una recta.

Si $A = 0$, la ecuación queda

$$y = \frac{C}{B},$$

y es claro entonces que se trata de una recta horizontal (si al lector no le parece evidente, ¡ convénzase !

Si $B = 0$, la ecuación es $x = \dfrac{C}{A}$, y se trata de una recta vertical.

Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, despejando, obtenemos

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}.$$

Para confirmar, usando el Teorema 3.2.1, que esta ecuación es la de una recta, notemos que los puntos

$$P_1 = \left(0, \frac{C}{B}\right), P_2 = \left(1, -\frac{A}{B} + \frac{C}{B}\right)$$

satisfacen la ecuación, y la recta que pasa por estos dos puntos está dada por la ecuación

$$\frac{\left(-\frac{A}{B} + \frac{C}{B}\right) - \frac{C}{B}}{1 - 0} = \frac{y - \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{B}\right)}{x - 0},$$

es decir

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}.$$

Esto es una demostración de nuestro segundo teorema:

Teorema 3.2. *El conjunto de puntos que verifica una ecuación lineal*

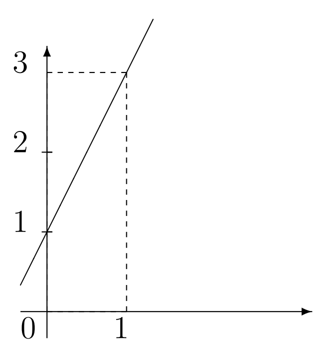
$$Ax + By = C \ (A \neq 0 \text{ ó } B \neq 0)$$

es una recta del plano.

Por ejemplo, si nos piden que representemos en el plano el conjunto

$$\{(x, y) : 2x - y = -1\}$$

razonamos así: sabemos por el teorema 3.2 que se trata de una recta; como sabemos también que una recta queda determinada por dos puntos, basta con hallar dos puntos del conjunto. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación, tenemos $y = 1$, o sea que $(0, 1)$ está en la recta; y si hacemos $x = 1$, tiene que ser $y = 2x + 1 = 3$, de manera que $(1, 3)$ es otro punto de la recta. Ya tenemos toda la información que necesitamos:



Ejercicios

82. Representar gráficamente los conjuntos de puntos $P = (x, y)$ que verifican las siguientes ecuaciones:

    a) $5x + y = 3$
    b) $x - 2 = 0$
    c) $4x - 3y = 6$
    d) $3x - 6 = 0$
    e) $y - 2 = 0$
    f) $y = 0$

83. Determinar el valor de k necesario para que el punto dado satisfaga la ecuación:

    a) $2x + ky - 1 = 0,\ (-1, 3)$
    b) $(k - 1)x + 3ky = 2(k + 1),\ (2, -2)$
    c) $3x = -y + 4,\ (1 - k, k)$
    d) $k^2x + ky = 1,\ (1, -1)$

84. Representar gráficamente los conjuntos:
    $A = \{(x, y) : 2x - y = 1, x > 0\}$
    $B = \{(x, y) : -x + y = 2, y < 0\}$
    $C = \{(x, y) : y = 2x - 1, x > 0, y < 0\}$
    (Sugerencia: pensarlos como intersección de conjuntos que se saben representar)

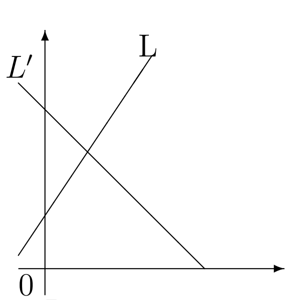
3.2.3. Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas L y L' del plano, necesariamente debe suceder una de las tres cosas siguientes:

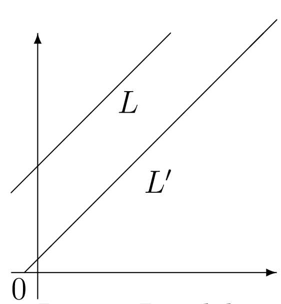
– son *transversales*, es decir, se cortan en un solo punto;

– son *paralelas*, es decir, no se cortan en ningún punto;

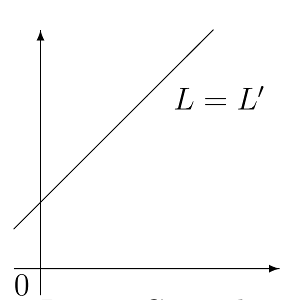
– son *coincidentes* (o sea, $L = L'$).



Rectas Transversales



Rectas Paralelas



Rectas Coincidentes

Según hemos visto, cada una de las rectas está dada por una ecuación lineal, digamos

$$\begin{aligned} L &: Ax + By = C \\ L' &: A'x + B'y = C' \end{aligned}$$

Los puntos de intersección, en caso de haberlos, deben verificar ambas ecuaciones, es decir, deben ser soluciones del sistema lineal

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$$

– Decir que las rectas son transversales, es decir que el sistema tiene solución única;

– decir que las rectas son paralelas es decir que el sistema no admite solución;

– decir que las rectas son coincidentes es decir que las ecuaciones son equivalentes (infinitas soluciones).

Ejemplos

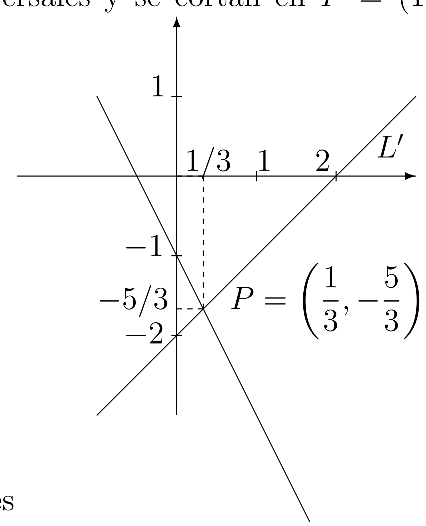
1. Sean las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} L &: 2x + y = -1 \\ L' &: x - y = 2 \end{aligned}$$

Este sistema lineal admite una única solución, que es

$$x = \frac{1}{3}, y = -\frac{5}{3}.$$

Luego las rectas son transversales y se cortan en $P = (1/3, -5/3)$. El gráfico es



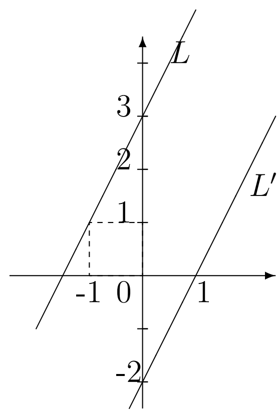
2. Sean las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} L &: 2x - y = -3 \\ L' &: -6x + 3y = -6 \end{aligned}$$

Si tratamos de resolver el sistema, vemos que multiplicando la primera ecuación por 3, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{array}{l} L : 6x - 3y = -9 \\ L' : -6x + 3y = -6 \end{array}$$

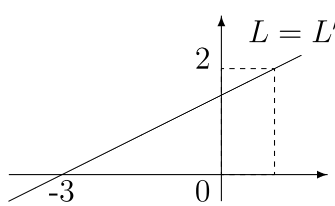
y sumando ambas ecuaciones, obtenemos $0 = -15$, lo que nos dice que el sistema no tiene solución (ni siquiera hace falta sumar las ecuaciones, ya que con un poco de práctica uno se da cuenta de que $6x - 3y$ no puede ser al mismo tiempo -9 y 6). Las rectas son paralelas, y el gráfico es el siguiente:



3. Sean L y L' las rectas de ecuaciones

$$\begin{array}{l} L : 4x - 8y = -12 \\ L' : -x + 2y = 3 \end{array}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -4, obtenemos la primera ecuación. Esto significa, que ambas ecuaciones son la misma ecuación. Las rectas coinciden



Ejercicios

85. Representar gráficamente los siguientes pares de rectas, indicando en cada caso si son paralelas, transversales o coincidentes. En el caso de ser transversales, indicar además el punto de intersección.

$a)$ $\begin{cases} L : 4x + 3y = 11 \\ L' : 3x - y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} L : x - 3 = y + 1 \\ L' : x + 1 = 8(y - 2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} L : x + y - 3 = 0 \\ L' : 2x + 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} L : x - \dfrac{1}{2}y = 1 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

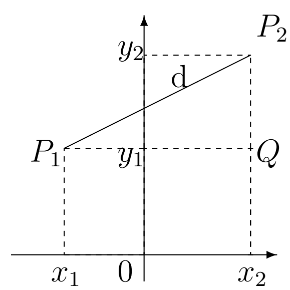
86. Hallar los vértices del triángulo determinado por las rectas:

$$\begin{aligned} &L_1 : 3x - 2y = -6 \\ &L_2 : 2y + x = 6 \\ &L_3 : 6y - x = 2 \end{aligned}$$

y representarlo gráficamente.

3.2.4. Distancia entre dos puntos del Plano

Si dos puntos del plano vienen dados por sus coordenadas, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, podemos calcular la distancia entre ellos mediante el Teorema de Pitágoras.



En la figura, el triángulo P_1P_2Q es rectángulo; por lo tanto,

$$(P_1P_2)^2 = (P_1Q)^2 + (QP_2)^2$$

y como $P_1Q = (x_2 - x_1)$, $QP_2 = (y_2 - y_1)$, obtenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

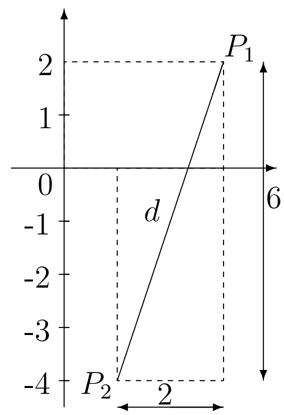
Con esto hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *La distancia d entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ está dada por*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

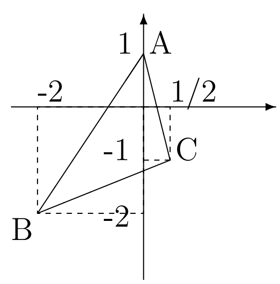
Ejemplo 1. La distancia entre $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (1, -4)$ es

$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$



Ejemplo 2. Los lados del triángulo de vértices $A = (0, 1)$, $B = (-2, -2)$, y $C = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ miden:

$$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}$$
$$BC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-2)\right)^2 + (-1-(-2))^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$
$$CA = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-(-1))^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$



Ejemplo 3. Una *circunferencia*, es un conjunto de puntos que equidistan (es decir, están a la misma distancia) de un punto fijo. Al punto fijo se lo llama *centro* y a la distancia *radio*. Con nuestros conocimientos actuales ya podemos conocer con precisión la ecuación de la circunferencia. Si elegimos un punto $P = (a, b)$ y un radio $R > 0$, todos los puntos de la circunferencia, deben estar a distancia R de P. Entonces, si el punto (x, y) está en la circunferencia, debe satisfacer

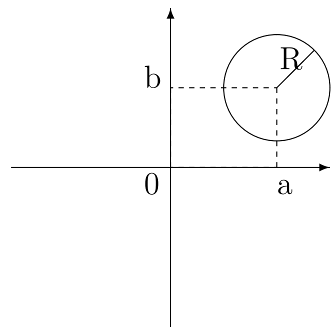
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

o escrito de otra manera,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

En resumen, si $B(P; R)$ denota a la circunferencia de centro P y radio R, tenemos

$$B((a, b); R) = \{(x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$$



Ejercicios

87. Calcular la distancia entre los puntos A y B que se indican, y hacer el gráfico correpondiente:

    a) $A = (2, 0); B = (0, -1)$
    b) $A = (0, -2); B = (1, 0)$
    c) $A = (2, -1); B = \left(3, \frac{1}{2}\right)$
    d) $A = (-1, -1); B = (1, 1)$

88. Sea el cuadrilátero de vértices:

$$A = (1, 2); B = (2, -1); C = (-1, -3); D = (-2, 1)$$

    a) Hallar las ecuaciones de sus diagonales.
    b) Calcular la longitud de las diagonales.

89. Comprobar que el triángulo de vértices

$$A = (4, 1); B = (4, 11); C = (0, 3)$$

es rectángulo.

90. Graficar los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$
$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$$

91. ¿Cómo hay que elegir el número k para que el triángulo de vértices

$$A = (1, 0); B = (5, 0); C = (3, k)$$

sea equilátero?

92. Un punto móvil parte del origen en la dirección de la recta $y = 2x$, viajando por el primer cuadrante a una velocidad de 5 unidades por segundo. Hallar el punto del plano en que se encuentra después de 3 segundos.

93. El punto $P = (1, 3)$ pertenece a la recta L de ecuación $y = 3x$. Hallar los puntos de L que distan 1 de P.

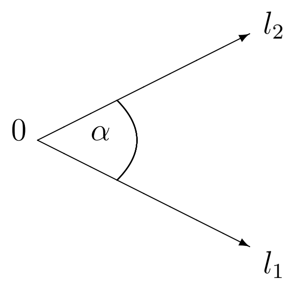
3.3. Funciones Trigonométricas de Ángulos

3.3.1. Ángulos

Un ángulo α en el plano está determinado por dos semirrectas (es decir, “rectas” que son infinitas solamente en un sentido) l_1 y l_2 con un origen común O; l_1 se llama *lado inicial*, y l_2 *lado terminal* de α. Lo denotamos por

$$\alpha = (l_1, 0, l_2),$$

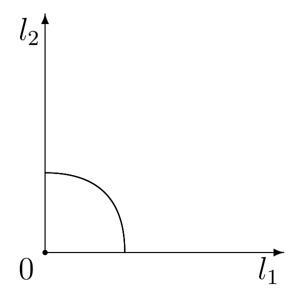
y gráficamente



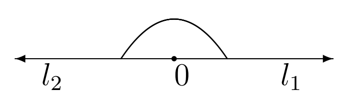
y lo pensamos como la abertura que determinan las semirrectas.

Ejemplos.

ángulo nulo
(l_1 coincide con l_2)

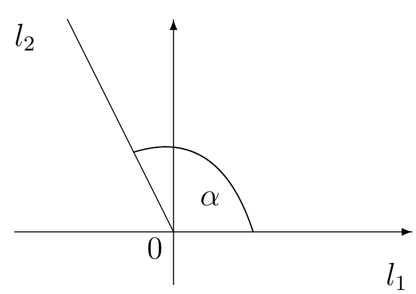


ángulo recto
(l_1 es perpendicular a l_2)



ángulo llano
(l_2 es opuesta a l_1)

Si colocamos el origen 0 de un ángulo $\alpha = (l_1, 0, l_2)$ en el origen de coordenadas y hacemos coincidir el lado inicial l_1 con el semieje positivo de las x,



entonces el lado terminal l_2 quedará en alguno de los cuatro cuadrantes (en la figura, por ejemplo, está en el segundo). De esta manera, podemos hablar del cuadrante al que pertenece un ángulo dado α. Por definición, llamamos ángulos *agudos* a los que pertenecen al primer cuadrante.

Ahora describiremos un sistema para medir los ángulos, el *sistema sexagesimal*. Este nombre proviene del hecho de que lo que uno realmente hace es expresar los ángulos con un sistema de numeración basado en el número 60. Lo describimos brevemente:

Se toma como unidad la 90-ava parte de un ángulo recto, y se la llama *grado sexagesimal*, y se la denota por 1^o. Para expresar unidades menores que el grado, se divide el grado en 60, y a cada una de estas partes se las llama *minuto*, denotado por $1'$; a su vez los minutos se dividen en *segundos*, denotados por $1''$. En caso de necesitarse aún más precisión, se consideran décimas de segundo, centésimas de segundo, etc.

Por la definición que hemos hecho, está claro que

- Un ángulo recto mide 90^o y un ángulo llano 180^o.
- La medida de un ángulo está entre 0^o y 360^o.

Es importante que quede clara la diferencia entre enunciar la medida de un ángulo en grados, minutos y segundos, que en centésimas de grado. Por ejemplo, un ángulo de $30^o13'48''$, pasado a grados y centésimas de grado será

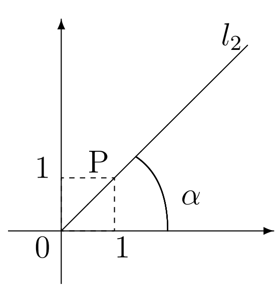
$$30 + \frac{13}{60} + \frac{48}{3600} = 30,28.$$

Esta distinción es especialmente importante para trabajar con calculadora, ya que probablemente se puedan introducir las medidas de ángulos de ambas maneras, y debe saberse cuál se utiliza.

Las calculadoras también pueden expresar los ángulos en *radianes*: en esta forma de medir ángulos, se considera que un ángulo llano mide π; entonces, un ángulo de 45^o expresado en radianes medirá (utilizamos la regla de 3)

$$45 \times \frac{\pi}{180} \simeq 0{,}7854$$

Ejemplo. Es sencillo construir en forma exacta un ángulo de 45^o, pues se puede obtener de la diagonal de un cuadrado. Sea $P = (1, 1)$, y α el ángulo cuyo lado terminal l_2 pasa por P; entonces α mide 45^o.



Ejercicios

94. Expresar en grados, minutos y segundo los ángulos que miden

    a) $23,18^o$

    b) $107,03^o$

95. Dibujar en forma exacta los ángulos de 135^o, 225^o y 315^o (considerando su relación con el ángulo de 45^o)

96. ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos: 300^o, 192^o, 93^o, $180^o1'$, 150^o?

97. Dibujar el triángulo de vértices

$$A = (0,0); B = (2,0); C = (1,\sqrt{3})$$

    y probar que es equilátero, y que en particular el ángulo A mide 60^o.

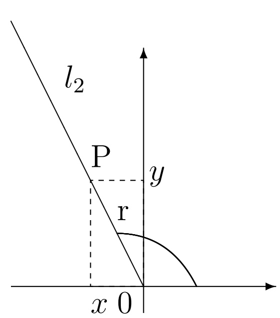
98. Encontrar un punto $P = (x,y)$ del primer cuadrante de tal manera que la semirrecta l_2 de origen 0 y que pasa por P determine un ángulo de 30^o.

Como mencionamos en el ejemplo anterior es posible, mediante construcciones geométricas sencillas, hallar en forma exacta algunos ángulos de medida dada. Pero si se quiere hacer lo mismo con otros, por ejemplo contruir un ángulo de 20^o, o de 1^o, nos encontramos con un problema que no es sencillo.

3.3.2. Funciones trigonométricas de un Ángulo

Sea α un ángulo (en algún cuadrante) con lado terminal l_2 y sea $P = (x,y)$ un punto sobre l_2. La distancia de P al origen está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ahora definiremos ciertas funciones del ángulo α, llamadas funciones trigonométricas:

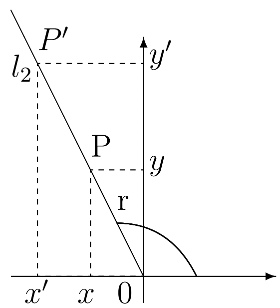
– Llamamos *seno* de α al cociente y/r, y se denota como $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{distancia de } P \text{ al origen}}.$$

– Llamamos *coseno* de α al cociente x/r, y se denota como $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{distancia de } P \text{ al origen}}.$$

En principio estas definiciones no parecen muy razonables, porque parecen depender del punto P. Pero esto es sólo aparente, ya que los cocientes mencionados dependen únicamente del ángulo α, y no de los valores de x, y (siempre que estén sobre la semirrecta l_2, pues en caso contrario no tendrían relación con el ángulo). Verifiquemos la afirmación que hemos hecho: si $P' = (x', y')$ es otro punto sobre la semirrecta l_2, tenemos



Es claro que el triángulo con vértices 0, P, $(x,0)$ y el triángulo con vértices 0, P', $(x',0)$ tienen los ángulos iguales, de manera que sus lados deben ser proporcionales. Luego,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}};\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y'^2)}}$$

que prueba que efectivamente el seno y el coseno dependen exclusivamente del ángulo y no de los puntos concretos que se uilizaron en la definición.

Observemos la siguiente relación fundamental:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1,$$

es decir

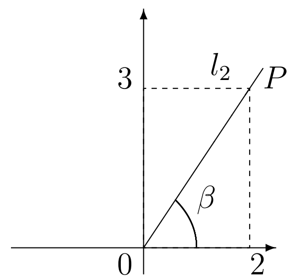
$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Hacemos notar aquí una cuestión de notación: $\operatorname{sen}^2\alpha$ *quiere decir* $(\operatorname{sen}\alpha)^2$.

Como el cuadrado de un número real siempre es positivo, tenemos $x^2 \leq x^2 + y^2$, y también $y^2 \leq x^2 + y^2$, de donde se deduce que, para cualquier ángulo α, siempre

$$\boxed{-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1, \text{ y } -1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

Ejemplo 1. Sea β el ángulo cuyo lado terminal l_2 pasa por $P = (2, 3)$



Entonces:

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

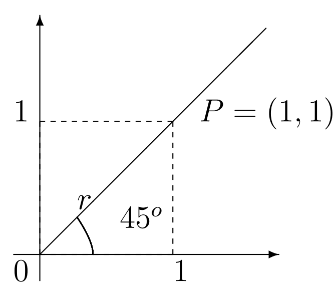
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Es sencillo (¡ pero no deje de hacerlo !) verificar la relación fundamental.

Ejemplo 2 (Ángulos especiales). En general no es sencillo obtener los valores de las funciones trigonométricas en un ángulo cualquiera. Pero para ciertos ángulos fundamentales, ciertas consideraciones geométricas permiten obtener de forma exacta los valores.

1. **(Ángulo de** 45^o**)**



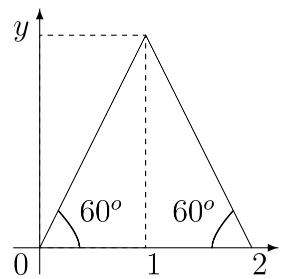
$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen} 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. **(Ángulo de** 60^o**)**

   Consideremos un triángulo equilátero con un vértice en el origen y lados de longitud 2:



El triángulo con vértices 0, $(1,0)$ y $(1,y)$ es rectángulo. Es muy sencillo obtener el coseno, porque conocemos el lado adyacente y la hipotenusa:

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}.$$

Entonces, por la fórmula fundamental,

$$\operatorname{sen} 60^o = \sqrt{1-\cos^2 60^o} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicios

99. Mostrar que

    a) $\operatorname{sen} 0^o = 0, \cos 0^o = 1$
    b) $\operatorname{sen} 90^o = 1, \cos 90^o = 0$
    c) $\operatorname{sen} 180^o = 0, \cos 180^o = -1$
    d) $\operatorname{sen} 270^o = -1, \cos 270^o = 0$

100. Mostrar que
$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}, \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

101. A los ángulos que están relacionados con los de $30^o, 45^o, 60^o$ se les puede calcular en forma exacta el valor de las funciones trigonométricas. Hallar los valores de las funciones trigonométricas para $120^o, 135^o, 150^o, 210^o, 225^o, 240^o, 300^o, 315^o, 330^o$.

Una tercera función trigonométrica importante es la *tangente*, definida como

$$\tan\alpha = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P}.$$

Notemos, con los símbolos ya usados, que

$$\frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Como carece de sentido dividir por cero, tampoco tiene sentido definir la tangente para 90^o y 270^o.

Ejercicios

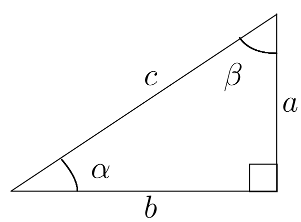
102. Hallar $\tan 0^o$, $\tan 30^o$, $\tan 45^o$, $\tan 60^o$.

103. Hallar $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ si α es el ángulo cuyo lado terminal l_2 pasa por $P = (-2, 3)$.

Para las aplicaciones es importante poder conocer el valor de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. Como ya dijimos, los métodos para hacer esto no son elementales y se basan en el cálculo infinitesimal. En general no pueden obtenerse valores exactos sino aproximados, aunque la aproximación puede hacerse tan buena como se quiera. Esto es lo que hacen las calculadoras, y los valores que se obtienen con ellas son casi siempre suficientemente aproximados para tratar los problemas planteados. De todos modos, cuando aparezcan los ángulos de los cuales hemos calculado en forma exacta las funciones trigonométricas, podremos utilizar los valores exactos que hemos calculado.

3.3.3. Triángulos Rectángulos

Consideremos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan a, b, su hipotenusa c, y sean α, β sus ángulos agudos.



Entre las medidas del triángulo rectángulo conocemos las siguientes relaciones:

1. Del Teorema de Pitágoras:
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. De las definiciones de las funciones trigonométricas:
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \cos\beta = \frac{a}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \quad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

3. La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180^o; por lo tanto, en el triángulo rectángulo,
$$\beta = 90^o - \alpha$$

El uso adecuado de estas relaciones permite abordar diversos problemas, en particular hallar los datos de un triángulo rectángulo a partir de un lado y uno de los ángulos agudos.

Ejercicios

104. Refiriéndonos al triángulo rectángulo anterior:

    a) Probar que

$$\operatorname{sen}(90^o - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^o - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\tan(90^o - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

    b) Calcular $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ en los siguientes casos:

        1) $a = 5$, $b = 3$
        2) $a = 6$, $b = 10$

    c) Calcular el valor <u>exacto</u> de b y c:

        1) si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ y $a = 2$;
        2) si $\tan\beta = 2$ y $a = 2$.

    d) Calcular el valor exacto del área del triángulo si $c = 1$ y $\cos\beta = \frac{1}{4}$.

105. Hallar el área de un triángulo rectángulo en el cual un ángulo mide 30^o y la hipotenusa mide 4.

106. En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 60^o y el cateto opuesto mide 3. Hallar su perímetro.

Aún queda una situación por resolver en el caso de los triángulos rectángulos: ¿cómo averiguar la medida de los ángulos si se conocen los lados?

Si pensamos un poco en el problema, veremos que incluso alcanza con conocer la longitud de **dos** de los lados. Efectivamente, supongamos que conocemos los dos catetos a y b de un triángulo rectángulo. Por supuesto, sabemos además que el ángulo entre ambos catetos es de 90^o. Sabiendo el valor de los catetos, podemos calcular el valor de la tangente de los otros ángulos: por ejemplo, si α es el ángulo entre el cateto a y la hipotenusa, entonces

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

El hecho importante es que dado un número en el intervalo $[0, \infty)$, hay un sólo ángulo en el primer cuadrante que tiene ese número como tangente.

Una forma intuitiva de ver esto, es que si α y β son dos ángulos del primer cuadrante, $\alpha < \beta$, tenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\beta \ \text{y} \ \cos\alpha > \cos\beta,$$

y por lo tanto

$$\tan\alpha < \tan\beta$$

(es decir, que "un valor no se puede repetir").

Al único ángulo α del primer cuadrante tal que

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}$$

lo llamamos *arco tangente* de $\frac{b}{a}$ y se nota

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}.$$

Del mismo modo, también para el seno y el coseno, cuando son positivos, hay un único ángulo agudo α (o sea, del primer cuadrante) tal que si r es un número real del intervalo $[0,1]$,

$$\operatorname{sen}\alpha = r$$

y hay un único ángulo agudo β del primer cuadrante tal que si $s \in [0,1]$,

$$\cos\beta = s.$$

Denotamos estos ángulos por

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen} r,$$

$$\beta = \arccos s.$$

Ejercicios

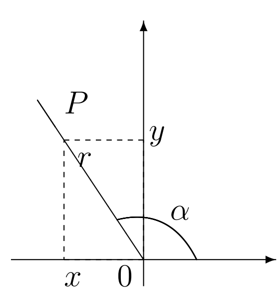
107. Hallar los ángulos del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 20 y 35.

108. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 18, y uno de los catetos 7. Hallar sus ángulos.

109. En un triángulo rectángulo la altura correspondiente a la base mide el doble que ésta. Hallar el valor de sus ángulos.

3.3.4. Signos de las Funciones Trigonométricas

Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en que se encuentra el ángulo. Así, por ejemplo, si α está en el segundo cuadrante,



Tenemos que

$$x < 0; y > 0.$$

Como $r > 0$ siempre,

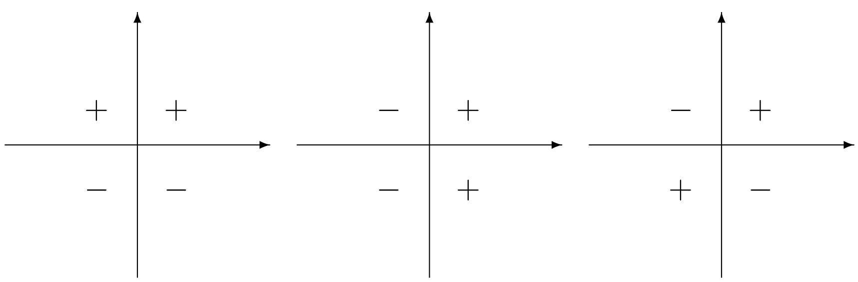
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} > 0,$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} < 0,$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} < 0,$$

es decir, que para un ángulo del segundo cuadrante el seno es positivo y el coseno y la tangente son negativos.

Como ejercicio, comprobar que los signos en los distintos cuadrantes son los indicados en las figuras que siguen:



$\operatorname{sen}\alpha$ $\cos\alpha$ $\tan\alpha$

Ejercicios

110. Hallar el signo de las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos: 98^o, 220^o, 75^o, 160^o,300^o, 185^o.

111. Determinar el cuadrante en que se encuentra el ángulo en cada uno de los siguientes casos:

   a) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$

   b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$

   c) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\tan\alpha > 0$

   d) $\tan\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$

112. Construya, en cada uno de los casos indicados, el ángulo α, especificando un punto de su lado terminal.

   a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}$ y $\tan\alpha > 0$

b) $\tan\alpha = -4$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$

c) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$

d) $\tan\alpha = -1$ y $\cos\alpha > 0$

3.3.5. Relaciones entre las funciones trigonométricas

Hemos visto que para cualquier ángulo α vale la relación fundamental

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{3.3.1}$$

También tenemos, por definición de la tangente,

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \neq 90^o, 270^o). \tag{3.3.2}$$

Mostraremos ahora como utilizar estas fórmulas para deducir relaciones entre las funciones trigonométricas. Es importante recalcar que el punto aquí no está en que el alumno recuerde estas fórmulas, sino en que entienda el mecanismo utilizado para hacer la deducción que haga falta.

Dividiendo la ecuación 3.3.1 por $\cos^2\alpha$ (de nuevo, si $\alpha \neq 90^o, 270^o$) obtenemos

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

y despejando,

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \tag{3.3.3}$$

Además, como $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$, de lo anterior obtenemos

$$1 - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

y, despejando,

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} \tag{3.3.4}$$

Es importante que quede claro que la elección del signo en las raíces cuadradas deberá hacerse teniendo en cuenta el cuadrante en que está el ángulo.

Con estas relaciones, se pueden obtener los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo, si se conoce una de ellas, sin necesidad de conocer el valor del ángulo.

Ejemplo 1. Sea α un ángulo del tercer cuadrante del cual se conoce que $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Para obtener $\cos\alpha$, utilizamos 3.3.1,

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

y como α está en el tercer cuadrante, $\cos\alpha < 0$:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Para calcular $\tan\alpha$, utilizamos la definición 3.3.2:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-1/3}{-\sqrt{8}/3} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Ejemplo 2. Sea α un ángulo del segundo cuadrante tal que $\tan\alpha = -3$. Para calcular $\operatorname{sen}\alpha$, por 3.3.4 obtenemos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{(-3)^2}{1+(-3)^2} = \frac{9}{10},$$

luego

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Como α está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\alpha > 0$; luego,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Para calcular $\cos\alpha$, por 3.3.3

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+(-3)^2} = \frac{1}{10},$$

luego

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Por ser un ángulo del segundo cuadrante, $\cos\alpha < 0$; luego

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ejemplo 3. Sea α un ángulo del tercer cuadrante. Expresar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\tan\alpha$ en términos de $\cos\alpha$.

Para obtener $\operatorname{sen}\alpha$, por 3.3.1,

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Como α está en el tercer cuadrante, $\operatorname{sen}\alpha < 0$, de manera que

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ para } \alpha \text{ en el tercer cuadrante.}}$$

Para obtener $\tan\alpha$, utilizamos la definición 3.3.2 y lo anterior,

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

es decir

$$\boxed{\tan\alpha = -\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \text{ para } \alpha \text{ en el tercer cuadrante}}$$

Ejercicios

113. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo α en los casos siguientes:

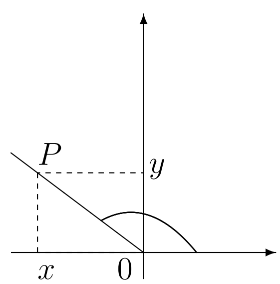
   a) $\operatorname{sen}\alpha = -2/3$, α en el cuarto cuadrante.
   b) $\tan\alpha = \sqrt{3}$, α en el primer cuadrante.
   c) $\cos\alpha = -2/5$, α en el segundo cuadrante.
   d) $\tan\alpha = \sqrt{2}$, α en el tercer cuadrante.

114. Expresar $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$ en términos de $\operatorname{sen}\alpha$ para α en el segundo cuadrante.

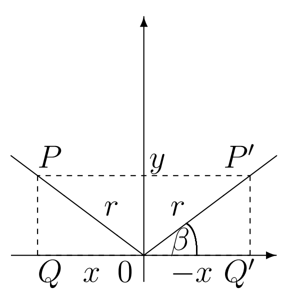
115. Expresar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en términos de $\tan\alpha$ para α en el cuarto cuadrante.

3.3.6. Reducción al primer cuadrante

Consideremos un ángulo α del segundo cuadrante, y sea $P = (x, y)$ un punto sobre su lado terminal



Sea $P' = (x', y')$ el simétrico de P respecto del eje y:



Los triángulos rectángulos $0PQ$ y $0P'Q'$ son iguales pues sus hipotenusas miden igual, y los catetos $0Q$ y $0Q'$ son también iguales. Por lo tanto, como el ángulo β mide $180^o - \alpha$, de la figura obtenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}(180^o - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{-x}{r} = -\cos(180^o - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{y}{-x} = -\tan(180^o - \alpha)$$

Estas relaciones son muy útiles para:

1. Calcular el valor de las funciones trigonométricas de α conociendo las del ángulo $\underline{\text{agudo}}$ $180^o - \alpha$

2. Evaluar α conociendo el valor de alguna función trigonométrica de α, pues para ángulos agudos ya sabemos hacerlo.

Ejemplo 1. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 150^o. Aquí la observación clave es que $150 = 180 - 30$. Entonces,

$$\operatorname{sen} 150^o = \operatorname{sen}(180^o - 150^o) = \operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^o = -\cos(180^o - 150^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^o = -\tan(180^o - 150^o) = -\tan 30^o = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2. Sea α un ángulo del segundo cuadrante, del cual sabemos que

$$\cos\alpha = -0,57357$$

Para hallar α, tenemos:

$$-0,57357 = \cos\alpha = -\cos(180^o - \alpha),$$

de manera que

$$\cos(180^o - \alpha) = 0,57357.$$

Mediante la calculadora hallamos que el ángulo agudo cuyo coseno es $0,57357$ es 55^o, de manera que

$$180^o - \alpha = 55^o,$$

o sea

$$\alpha = 125^o$$

Como es lógico, se pueden obtener relaciones análogas para el tercer y cuarto cuadrante.

Ejercicios

116. Utilizando reducción al primer cuadrante, hallar $\cos 120^o$, $\operatorname{sen} 175^o$, $\tan 98^o$.

117. Determinar α en cada uno de los siguientes casos:

   a) $\operatorname{sen}\alpha = 0,69465$ y α en el segundo cuadrante.

   b) $\tan\alpha = 1,42814$ y α en el segundo cuadrante.

118. Para α en el tercer cuadrante, deducir las relaciones

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - 180^o)$$

$$\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180^o)$$

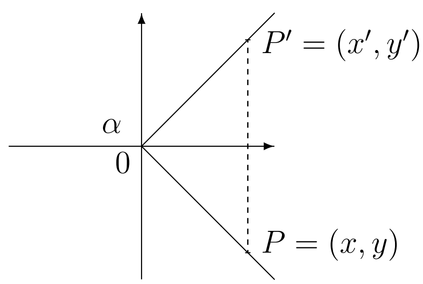
$$\tan\alpha = \tan(\alpha - 180^o)$$

119. Sea α un ángulo del cuarto cuadrante. Razonando sobre la figura, deducir las relaciones:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360^o - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \cos(360^o - \alpha)$$

$$\tan\alpha = -\tan(360^o - \alpha)$$



120. Por reducción al primer cuadrante, calcular $\operatorname{sen}250^o$, $\tan 275^o$, $\operatorname{sen}300^o$, $\cos 281^o$, $\tan 190^o$.

121. Determinar α, sabiendo que:

   a) $\cos\alpha = -0,656$ y α está en el primer cuadrante;
   b) $\tan\alpha = -2$ y α está en el cuarto cuadrante;
   c) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{3}$ y α está en el tercer cuadrante;
   d) $\cos\alpha = 0,659$ y α está en el segundo cuadrante.

122. Calcular el valor de los ángulos de los triángulos de vértices:

   a) $A = (0,0); B = (-3,2); C = (4,0)$;
   b) $A = (-1,0); B = (0,2); C = (5,0)$.

3.3.7. Pendiente de una Recta

Cuando consideramos rectas en el plano, utilizamos el hecho de que una recta queda determinada por dos de sus puntos. Ahora veremos otra manera de fijar una recta, que está relacionada con su inclinación con respecto a la horizontal.

Sea L una recta del plano, no horizontal. Es claro que L corta al eje X en un único punto Q. Llamamos *inclinación* de L al ángulo que tiene como lado inicial a la semirrecta que está sobre el eje X, con origen Q, y que se extiende hacia la derecha de Q; y como lado terminal, la semirrecta sobre L de origen Q, y que se extiende hacia arriba de Q. Si la recta es horizontal, decimos que la inclinación es de 0^o.

Tenemos, por como fue definida,

$$0^o \leq \text{inclinación de } L \leq 180^o$$

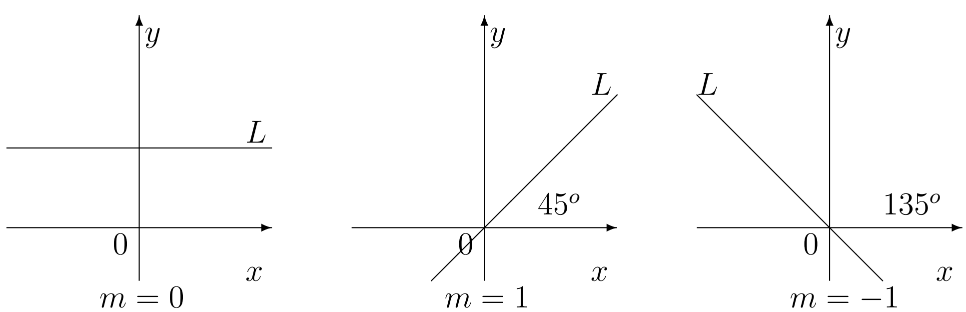
para cualquier recta L.

Ejemplos: el eje X tiene una inclinación de 0^o; el eje Y, de 90^o, y la recta "diagonal", 45^o.

Llamamos *pendiente* de una recta no vertical a la tangente del ángulo de inclinación. En símbolos,

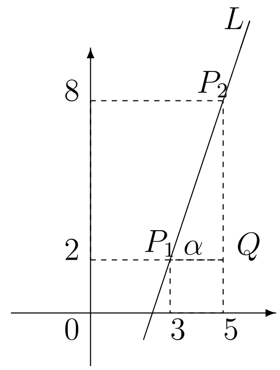
$$m = \tan\alpha$$

Como la tangente de 90^o no está definida, se dice que las rectas verticales no tienen pendiente.



Como veremos a continuación, no es necesario conocer la inclinación para hallar la pendiente.

Ejemplo. Sea L la recta que pasa por $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (5, 8)$.



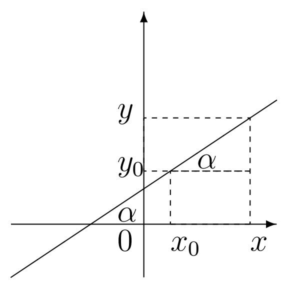
Del triángulo P_1P_2Q obtenemos

$$m = \tan\alpha = \frac{8-2}{5-3} = 3,$$

es decir que la pendiente es 3.

Conocida la pendiente m de una recta L y uno de sus puntos $P_0 = (x_0, y_0)$, es fácil hallar su ecuación.

Si $P = (x, y)$ es otro punto de L, de la figura,



obtenemos

$$m = \tan\alpha = \frac{y-y_0}{x-x_0},$$

de donde

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

que es la ecuación de L.

Ejercicios

123. ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de inclinación de una recta si la pendiente es positiva? ¿Y si es negativa?

124. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de una recta de pendiente 4? ¿Y de pendiente -3?

125. Calcular la pendiente de la recta que pasa por $P_1 = (1, 3)$ y $P_2 = (-1, 4)$.

126. Dibujar las rectas que pasan por el origen y cuya pendiente es:

   a) $m = 1$
   b) $m = 2$
   c) $m = 3$
   d) $m = -1$
   e) $m = -2$
   f) $m = -3$

127. Hallar la ecuación de la recta de pendiente $1/3$ y que pasa por $P_0 = (-1, 2)$. Graficarla.

Sea L una recta de ecuación $Ax + By = C$. Si L no es vertical, $B \neq 0$, y podemos despejar y:

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

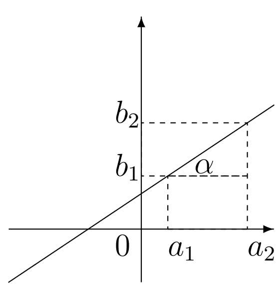
es decir, tiene la forma (llamada *explícita*)

$$y = mx + b,$$

donde $m = -A/B$, $b = C/B$. Los números m y b tienen el siguiente significado geométrico:

1. m es la pendiente. En efecto, si $P_1 = (a_1, b_1)$ y $P_2 = (a_2, b_2)$ son dos puntos distintos de L, por la definición de pendiente se tiene

$$\text{Pendiente de } L = \tan\alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$



Por otra parte, al pertenecer a L los puntos P_1 y P_2 verifican su ecuación:

$$b_1 = ma_1 + b$$

$$b_2 = ma_2 + b$$

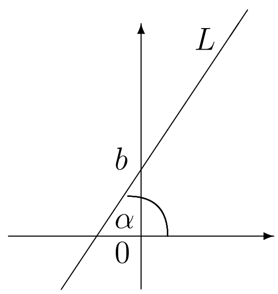
Restando la segunda ecuación de la primera,

$$b_2 - b_1 = m(a_2 - a_1),$$

de manera que
$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1},$$
y por lo tanto
$$m = \text{Pendiente de } L$$

2. El punto $(0, b)$ pertenece a la recta, y es donde L corta al eje y. Por ello se llama *ordenada al origen.*

Resumimos lo anterior en el dibujo:



$$L : y = mx + b$$
$$m = \tan \alpha$$

Ejercicios

128. Hallar la pendiente y la ordenada al origen de la recta, y graficarlas:

    a) de ecuación $-x + 3y = 1$

    b) de ecuación $2x + y = 1$

    c) que pasa por $P_1 = (-2, 0)$ y $P_2 = (-1, -1)$

    d) de inclinación 30^o y que pasa por $P_0 = (1, 3)$

129. Sean L, L' de ecuaciones
$$L : y = mx + b$$
$$L' : y = m'x + b'$$
Comprobar que:

    – L y L' transversales equivale a $m \neq m'$

    – L y L' paralelas equivale a $m = m'$

    – L y L' coincidentes equivale a $m = m'$ y $b = b'$

130. Averiguar si el cuadrilátero $ABCD$ de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (4, 3)$, $D = (3, 1)$ es un paralelogramo (es decir, si tiene lados opuestos paralelos).

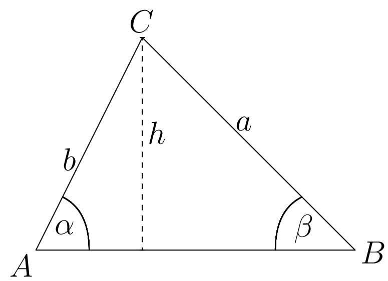
131. Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta de ecuación $-x + 2y = 1$ que pasa por $P_0 = (-1, 1/3)$

3.3.8. Teoremas del Seno y del Coseno

No siempre los triángulos son rectángulos, y por lo tanto aún hay muchos casos en los que no pueden utilizarse las nociones aprendidas. Veremos ahora cómo encontrar relaciones que valgan en cualquier triángulo, y nos permitan encontrar, a partir de algunas medidas de lados y ángulos, las otras.

Teorema del Seno.

Consideremos un triángulo ABC y sea h la longitud de la altura correspondiente al lado AB.



De las definiciones, obtenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}, \text{ de manera que } h = b\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}, \text{ de manera que } h = a\operatorname{sen}\beta$$

Por lo tanto,

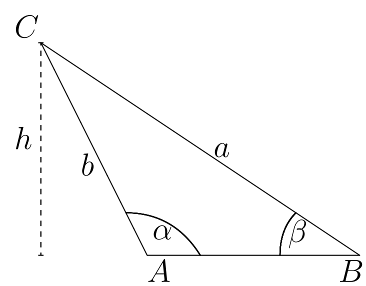
$$a\operatorname{sen}\beta = b\operatorname{sen}\alpha,$$

o, escrito de otra manera,

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}}$$

Esta relación es conocida como "Teorema del Seno".

Observación. Notemos que en la demostración hemos supuesto que α era agudo; si no lo fuera, el Teorema sigue siendo válido, de acuerdo al razonamiento siguiente:



$$\operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \frac{h}{b}, \text{ de manera que } h = b\operatorname{sen}(180^o - \alpha)$$

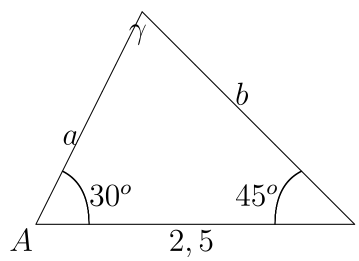
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a},\ \text{o sea } h = a\operatorname{sen}\beta$$

como α está en el segundo cuadrante,

$$\operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

y se obtiene nuevamente la relación anterior.

Ejemplo. En un triángulo un lado mide 2,5 y los ángulos adyacentes 30^o y 45^o. Calcular las longitudes de los otros dos lados.



$$\gamma = 180^o - 30^o - 45^o = 105^o$$

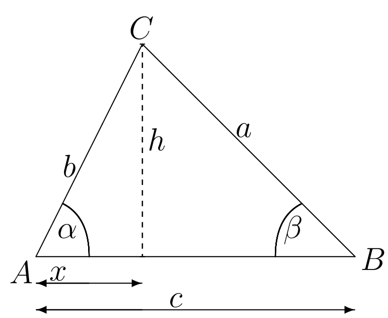
Usando el Teorema del Seno:

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{2,5} = \frac{\operatorname{sen}45^o}{x},\ \text{de manera que } x = \frac{2,5\operatorname{sen}45^o}{\operatorname{sen}105^o} = 1,83$$

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{2,5} = \frac{\operatorname{sen}30^o}{y},\ \text{de manera que } y = \frac{2,5\operatorname{sen}30^o}{\operatorname{sen}105^o} = 1,29$$

Teorema del Coseno

Sea nuevamente un triángulo ABC y h la altura correspondiente al lado AB



Por el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

De las definiciones:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b},\ \text{de manera que } h = b\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{b}, \text{ de manera que } x = b\cos\alpha$$

y reemplazando las expresiones de h y x en la primera igualdad, nos queda

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2\operatorname{sen}^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\operatorname{sen}^2\alpha + c^2 - 2cb\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha \\ &= b^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2cb\cos\alpha \end{aligned}$$

y como

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

tenemos

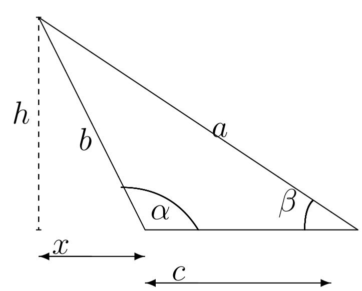
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha}$$

Esta relación es conocida como “Teorema del Coseno”.

Observaciones:

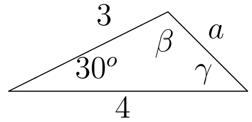
1. Si el triángulo anterior fuera rectángulo, de manera que $\alpha = 90^o$, se tiene $\cos\alpha = 0$, y la relación del Teorema del Coseno se convierte en el Teorema de Pitágoras.

2. En la demostración anterior supusimos que α era agudo. Sin embargo, el teorema vale para cualquier triángulo: si α no es agudo, es decir $90^o < \alpha \leq 180^o$, se puede razonar con la figura siguiente



Ejemplo 1. En un triángulo dos lados miden 3 y 4, y el ángulo comprendido por ellos es de 30^o. Calcular la longitud del tercer lado y los otros dos ángulos.

Comencemos calculando a. Por el teorema del coseno,



$$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 30^o = 25 - 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a \simeq 2,05$$

Calculemos ahora β: utilizamos nuevamente el teorema del coseno con el valor hallado de a:

$$4^2 = 3^2 + a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a \cos\beta,$$

de donde

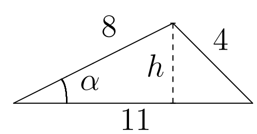
$$\cos\beta = \frac{3^2 + a^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{9 + 2,05^2 - 16}{6 \cdot 2,05} = -0,22$$

Al ser $\cos\beta$ negativo, β está en el segundo cuadrante, y obtenemos

$$\beta \simeq 103,6^o = 103^o 3'$$

Ejemplo 2. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden 4,8 y 11. El área es

$$A = \frac{11 \cdot h}{2}$$



Para calcular h tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{8}, \text{ de manera que } h = 8 \operatorname{sen}\alpha$$

y el ángulo α puede obtenerse por el teorema del coseno:

$$4^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cos\alpha.$$

Despejando,

$$\cos\alpha = \frac{8^2 + 11^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot 11} = \frac{169}{176}.$$

Por lo tanto, α es agudo (está en el primer cuadrante), y entonces

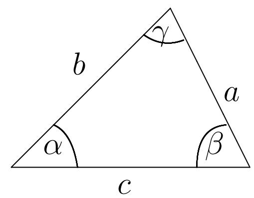
$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{169}{176}\right)^2}.$$

Finalmente, reemplazando en la fórmula del área,

$$A = \frac{11{,}8}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{169}{176}\right)^2} \simeq 8,77$$

Ejercicios

132. En cada caso utilizar los datos del triángulo



para hallar los que se piden:

a) $a = 7$, $b = 9$, $\gamma = 60^o$: hallar c;
b) $c = 1{,}2$, $a = 1{,}7$, $\beta = 120^o$: hallar b;
c) $a = 82$, $b = 57$, $\gamma = 61^o$: hallar β;
d) $c = 16$, $\alpha = 52^o$, $\beta = 35^o$: hallar b.

133. Con los datos que se ofrecen en cada caso, calcular el área del triángulo del ejercicio anterior:

a) $b = 14$, $c = 21$, $\alpha = 41^o$;
b) $c = 11,2$, $\alpha = 31^o$, $\beta = 62^o$.

3.4. Radianes

Hasta aquí, hemos medido los ángulos usado el sistema sexagesimal, cuya ventaja recide principalmente en la gran cantidad de divisores que posee el número 360. Este hecho permite presentar una gran cantidad ángulos en término de números enteros. Sin embargo, hay otro sistema muy utilizado, al cual debe familiarizarse, si no lo está y es el sistema de radianes. El ángulo en radianes se define como el cociente entre la longitud del arco del ángulo en cuestión y su radio. La relación entre el sistema sexagesimal y el radian se halla entonces por regla de tres simple, teniendo en cuenta que un ángulo de 360º corresponde a 2π radianes.

Ejercicios

134. Complete la siguiente tabla

sistema sexagesimal	sistema radian
180º	π
90º	
	$\pi/4$
30º	
270º	
	$7/8\pi$

3.5. Funciones Trigonométricas sobre $\mathbb{R}$

En algunas situaciones resulta útil extender el dominio de las funciones trigonométricas del intervalo $[0, 2\pi)$ a todo $\mathbb{R}$. La idea es simple: extender las funciones de forma periódica. Esto significa que tomando como punto de partida el ángulo 0 comenzamos a girar en sentido antihorario, barriendo todos los ángulos hasta que llegamos a 2π ,que originalmente se identificaba con 0. Solo que ahora seguimos aumentando el ángulo más allá de 2π, pero a la hora de calcular las funciones trigonométricas de dicho ángulo, lo hacemos reduciendolo al intervalo $[0, 2\pi)$, o sea 2π se identifica con 0, $3\pi = 2\pi + \pi$, con $0 + \pi = \pi$ y así sucesivamente. En otras palabras, extendemos las funciones de forma periódica, *e.g.*, dado $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\text{sen}(\alpha + 2n\pi) = \text{sen}(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente esta definición puede extenderse para valores negativos si el giro se realiza en sentido horario, es decir, dado $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\text{sen}(\alpha + 2n\pi) = \text{sen}(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios

135. Complete la siguiente tabla

$\text{sen}(25/6\pi)$	$\text{sen}(2 \cdot 2\pi + 1/6\pi) = \text{sen}(1/6\pi) = 1/2$
$\text{sen}(-\pi/2\pi)$	
$\cos(-\pi/2\pi)$	
$\tan(-\pi/2)$	
$\text{sen}(5\pi)$	
$\cos(7/2\pi)$	
$\tan(-9\pi/4)$	

De la tabla de signos para las fucniones trigonométricas en la sección 3.3.4 resulta inmediato verificar que

$$\begin{aligned} \text{sen}(-x) &= -\text{sen}(x) \ , \\ \cos(-x) &= \cos(x) \ , \\ \tan(-x) &= -\tan(x) \ . \end{aligned}$$

Funciones que al cambiar el signo del argumento permanecen inalteradas o solo cambian en un signo se dice que tienen paridad definida, *i.e.* $f(-x) = \pm f(x)$. Las fucniones como el seno, que cambian de signo se dicen *impares* y aquellas que permanecen inalteradas, como el coseno se llaman *pares*. Claramente el producto (o division) de funciones pares e impares resulta impar y es por ello que la tangente tiene la misma paridad que el seno. ¿y el producto de dos impares qué paridad tiene? ¿la suma de dos impares tiene paridad definida? ¿qué sucede con la suma de una función par y una función impar?

3.6. Otras Identidades

Las funciones trigonométricas están repletas de identidades, las cuales son muy útiles a la hora de resolver problemas, hemos visto varias, cuyas demostraciones han sido presentadas oportunamente, pero hay otras, cuya demostración escapa los alcances de este curso, aunque no por ello es necesario ignorarlas. Entre ellas, probablemente una de las que más hara uso en los próximos cursos de la carrera son

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

A partir de estas identidades y de las paridades de las funciones trigonométricas es inmediato probar el siguiente conjunto de identidades

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

Ejemplo 3.

De las identidades anteriores resulta

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) = \cos^2(a) - \big(1 - \cos^2(a)\big) = 2\cos^2(a) - 1$$

o equivalentemente

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

Ejercicios

136. Usando este resultado pruebe que

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

3.7. Problemas de Aplicación

Los problemas propuestos a continuación se pueden resolver utilizando los conocimientos adquiridos, ya sea de trigonometría como de ecuaciones. Seguramente será bueno tener presentes las indicaciones que se dieron en el capítulo anterior para encarar los problemas.

Ejercicios

137. Resolver los siguientes problemas

a) Cuando el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte es de 30^o, una torre proyecta una sombra de 75 m. Calcular su altura.

b) ¿Qué tan larga es la sombra que arroja un mástil de 11 m. de altura cuando el sol tiene una elevación de 20^o?

c) El hilo que sujeta un barrilete mide 250 m. y forma un ángulo de 32^o con la vertical. Hallar la altura a la que se halla el barrilete si se supone que el hilo está tenso.

d) Un automóvil asciende una cuesta que tiene una inclinación de 22^o. Si viaja a una velocidad de 60 km/h, ¿Cuántos metros sube en 15 minutos?

e) Se piensa construir una pista de aterrizaje, y debido a la orientación de la misma quedará una arboleda de 25 m de altura. ¿A qué distancia mínima de la pista debe quedar la arboleda si el ángulo de despegue de los aviones es de 16^o?

f) Cuando se apoya una escalera de 3 m de largo en una de las paredes de un pasillo, su extremo llega a una altura de 2,50 m de altura en la pared opuesta. Averiguar el ancho del pasillo.

g) Un carpintero desea construir una escuadra de madera y necesita que uno de los ángulos sea de 30^o. Indique las relaciones que deben guardar los lados entre sí.

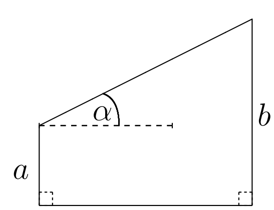
h) Los lados paralelos de un trapecio miden 6 y 8, y los otros dos lados miden 3. Hallar las longitudes de las diagonales y el área del trapecio.

138. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide a y un ángulo agudo es α. Verificar que el área está dada por la siguientes fórmula:

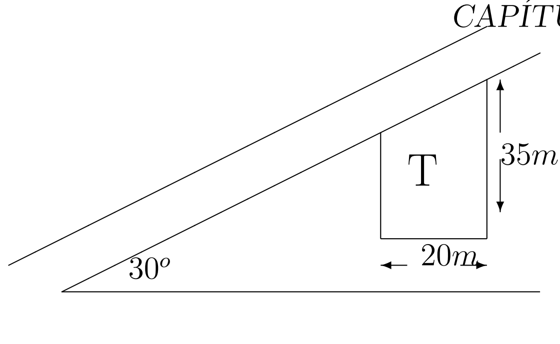
$$A = \frac{a^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$$

139. Mostrar que el área de la figura está dada por

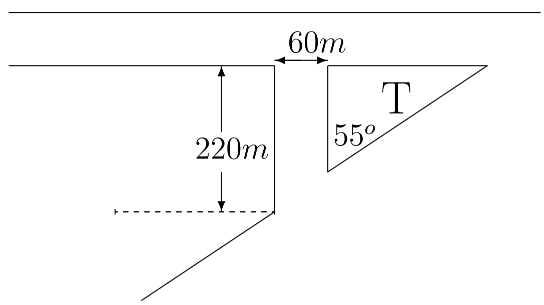
$$A = \frac{b^2 - a^2}{2\tan\alpha}$$



140. El frente de un terreno da sobre una diagonal y tiene las dimensiones que se indican en el esquema. Calcular los metros que tiene el frente y el área que ocupa.



141. Se quiere saber cuántos metros de alambre son necesarios para cerrar el terreno sombreado de la figura:

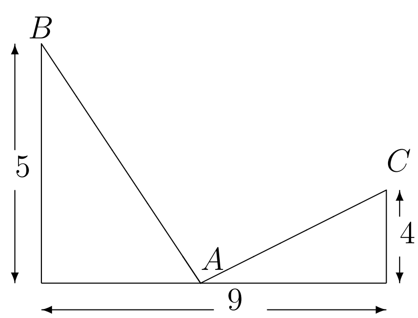


142. Resolver los siguientes problemas:

a) Un topógrafo observa desde C dos puntos A y B situados en los lados opuestos de un río. Si C está a 500m de A y a 750m de B, y ha medido el ángulo ACB en 32^o, ¿cuál es el ancho del río?

b) Desde un punto del suelo un observador ve la punta de una torre en un ángulo de elevación de 22^o, y cuando avanza 20m hacia ella, dicho ángulo es de 35^o. Hallar la altura de la torre.

c) Refiriéndonos a la figura, determinar la posición del punto A para el ángulo BAC sea recto.



d) En un triángulo ABC el lado AB mide 10 y el lado CB mide el doble que el lado AC. Hallar las longitudes de los lados sabiendo además que el ángulo A mide 60^o.

e) Un embudo de forma cónica tiene una altura de $20cm$. Cuando se vierten $25cm^3$ de agua y se tapona la salida, el agua llega a una altura de $9cm$. Calcular el diámetro del embudo.

f) Una caja tiene $15cm$ de ancho, $20cm$ de largo y $10cm$ de alto. ¿Qué longitud máxima puede tener una varilla delgada para caber en la misma?

g) Para medir la altura a la que se encuentra un globo de observación, se han elegido dos puntos A y B en tierra, distantes entre sí $1{,}200m$, de tal manera que el globo se encuentra arriba de algún punto de la línea AB. El ángulo de elevación del globo cuando se lo observa desde A, es de 51^o, y desde B, 75^o. Determinar a qué altura se encuentra el globo.

h) Desde un barco que viaja en determinada dirección se ve un faro a 28^o a babor. Luego de viajar $5km$ más, el faro está a 43^o a babor. ¿A qué distancia del faro pasará el barco si continúa con el mismo rumbo?

i) Un mástil está inclinado hacia el norte formando un ángulo de 78^o con la horizontal. Desde un punto situado a $50m$ al sur de su pie, el ángulo de elevación a la punta es de 27^o. Hallar la longitud del mástil.

j) Una flota marcha hacia el este a $40km/h$. Un barco explorador se separa de la misma con rumbo norte a $60km/h$. Si debe reunirse con la flota 3 horas después, ¿cuánto tiempo debe viajar antes de torcer su rumbo y en qué dirección debe hacerlo si su misión es explorar la máxima distancia posible hacia el norte?

k) Un ferrocarril une en línea recta dos ciudades A y B. Una tercera ciudad C dista de las vías $22km$. Si el ángulo CAB es de 30^o y el CBA es de 48^o, calcular la distancia AB.

l) Un barco se halla a $18km$ de un faro. Si viaja a $35km/h$ y en una dirección que forma un ángulo de 23^o con la visual dirigida al faro, ¿cuánto tiempo tarda en hallarse a $10km$ del mismo?

m) En un triángulo los lados miden 7, 11 y 14. Calcular en forma exacta la longitud de la altura correspondiente al lado que mide 14. ¿Tiene este triángulo algún ángulo no agudo?

n) El punto B es inaccesible y no se ve desde A. Para calcular la distancia AB se eligieron puntos C y D alineados con A y desde los cuales tanto A como B son visibles. Las distancias AC y AD son de $420m$ y $570m$ respectivamente. Averiguar la distancia AB si el ángulo ACB es de 98^o y ADB es de 76^o.

143. *a*) Expresar el área de un triángulo en términos de las longitudes a y b de dos lados y el ángulo α comprendido.

b) Dos barcos se hallan alineados con un faro cuya altura es conocida. Ls visuales dirigidas a los mismos desde lo alto del faro, forman ángulos α y β con la horizontal. Hallar la expresión para la distancia entre los barcos en términos de esos datos.

c) Verificar que el área de un pentágono regular de lado a viene dada por

$$A = \frac{5a^2}{4\tan 36^o}$$

Si se trata de un hexágono regular, ¿cuál sería la expresión?

d) De un triángulo se conocen un lado y los dos ángulos adyacentes. Expresar el área en función de esos datos.

e) Hallar el área de un triángulo equilátero inscripto en un círculo de radio r. Hacer lo mismo para un cuadrado.

144. *a*) Una antena de longitud conocida está colocada verticalmente en la azotea de un edificio. ¿Qué mediciones se pueden hacer desde la calle para determinar la altura del edificio?

b) ¿Cómo se podría medir el ancho de un río a partir de mediciones hechas desde una sola de las orillas?

c) Refiriéndonos al problema 143b, si los barcos no están alineados con el faro, ¿qué mediciones se pueden hacer desde el mismo para determinar la distancia entre los barcos?

Lista de ejercicios sugeridos

Ejercicios 79.a)-79.c), 80, 82.a)-82.c), 85-87, 89, 91, 99, 102, 104, 107, 110, 111, 113, 116, 132, 134-136, 137.a), 137.d), 137.g), 137.h), 138, 142.b), 142.c), 142.f),143.c)

Capítulo 4

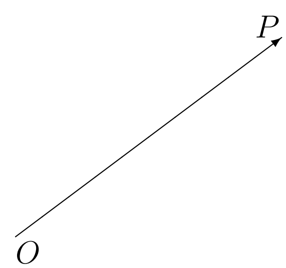
Vectores

Hemos llegado al último bloque del taller. Aquí introduciremos las nociones básicas sobre vectores, un concepto clave en la matemática, pero fundamental en la física, ya que prácticamente no hay rama de la física donde no aparezcan estos objetos.

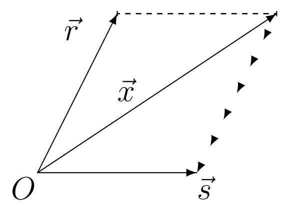
El objetivo de este capítulo es que el alumno comprenda los conceptos básicos: definición, representaciones en sistemas cartesianos y polares, operaciones básicas (suma, producto escalar y vectorial) y tenga un primer contacto con algunas de las cantidades vectoriales más relevantes que aparecerán en los primeros cursos de Física.

4.1. Introducción

Un concepto básico y muy utilizado en física, es el de *fuerza*. Los físicos, mediante diversos experimentos, han observado que una fuerza puede caracterizarse mediante una magnitud, una dirección y una regla de combinación con otras fuerzas. Las primeras dos características mencionadas, sugieren que una fuerza puede ser representada por un segmento de recta dirigido, en el que utilizamos la longitud del segmento para representar la magnitud, y el segmento (con sus puntos de inicio y fin elegidos) para representar la dirección. Un segmento de recta dirigido, con punto inicial O y punto final P se dibuja



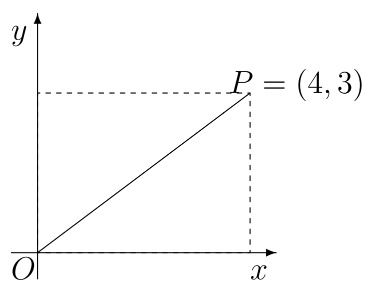
A estos segmentos de recta dirigidos los llamaremos *vectores*, y una forma habitual de notarlos será $\vec{a}, \vec{b}$, etc. Ponemos las flechas para enfatizar el hecho de que no se trata de cantidades. La definición de vector incluye un aspecto más, mencionado en el párrafo anterior: la regla de combinación, que no es ni más ni menos que una regla para sumarlos. Se comprueba mediante experimentos que dadas dos fuerzas $\vec{s}$ y $\vec{r}$ actuando sobre un punto común O, el efecto combinado de ambas es equivalente al de una fuerza $\vec{x}$; esta fuerza es representada por la diagonal del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ como lados:



La fuerza $\vec{x}$ es llamada la *suma* de $\vec{r}$ y $\vec{s}$ y se escribe $\vec{x} = \vec{r} + \vec{s}$. Notemos en primer lugar que estamos definiendo una operación que llamamos suma, pero que en principio no está relacionada con la suma de números que conocemos, pues se aplica a otra clase de objetos, los vectores. Otra cosa importante que debe quedar clara es que sólo hemos definido la suma para vectores que tienen el mismo punto de origen: en otros casos, no sabemos cómo sumar dos vectores.

4.2. Vectores en $\mathbb{R}^2$

La gran utilidad del concepto de vector, y de sus propiedades, es que es muy sencillo hallar una representación analítica de los mismos. Para ver esto, recordemos la representación de puntos en el plano coordenado: podemos considerar cada punto del plano como un par ordenado de números reales (sus coordenadas). Así, por ejemplo, el par $(4, 3)$ representa a un cierto punto P, con respecto a un origen O:



El hecho que queremos destacar, es que este par de números reales determina, con referencia a O, una dirección y una magnitud. Tenemos todos los elementos que componen un vector: punto inicial y punto final. La dirección queda determinada por la pendiente de la recta por el origen que contiene a P, y la magnitud, por la longitud del segmento OP.

Vemos entonces que es razonable interpretar un par ordenado de números reales (a_1, a_2) como una flecha, cuya punta es el punto (a_1, a_2) y cuyo principio es el origen de coordenadas. Por lo tanto, cuando hablemos de vectores en el plano, hablaremos indistintamente de ellos como pares ordenados de números reales. Estamos identificando cada punto del plano con un vector. Es de destacar que solamente contamos en esta identificación a los vectores con igual origen, pero al trabajar con vectores en un problema concreto, siempre será posible hacer esto, porque solamente se consideran los vectores que tienen origen común.

La definición analítica de la suma, si bien equivalente a la regla del paralelogramo que mencionamos en la sección anterior, es muy sencilla de describir:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

(y ahora tenemos una buena explicación de por qué llamamos suma a la operación que definimos mediante la regla del paralelogramo).

Así, por ejemplo, si $\vec{a} = (3, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 2)$,

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1), 1 + 2) = (2, 3)$$

Dejamos la representación gráfica al lector.

Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ su longitud es, por el teorema de pitágoras,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

El vector $\vec{0} = (0, 0)$, que llamamos *vector nulo*, es un vector de magnitud nula, y que no tiene definida una dirección.

Al estar representados por pares de números reales, varias propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^2$ pueden probarse de forma sencilla:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (conmutatividad de la suma)
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociatividad de la suma)
3. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (existencia del neutro)

Las tres propiedades mencionadas pueden probarse de forma sencilla, ya que las propiedades se trasladan a las coordenadas (verificarlo) y se pueden probar en función de las propiedades de los números reales.

Se define el producto de un número real k por un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ como el vector $k \cdot \vec{a} = (ka_1, ka_2)$ (de forma intuitiva, $k\vec{a}$ es "k veces $\vec{a}$"). Por esta razón de que al multiplicar "cambian el tamaño" de los vectores, se llama *escalares* a los números reales cuando se los piensa multiplicando vectores.

Ejercicios

145. Probar que el producto por un escalar es distributivo respecto a la suma,

$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

146. Sean $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (-3,3)$, $\vec{c} = (4,0)$. Realizar las siguientes operaciones y representar geométricamente cuando corresponda:

    a) $\vec{a} + \vec{b}$
    b) $\vec{b} + 3\vec{c}$
    c) $2\vec{b} + 3(\vec{a} + \vec{c})$
    d) $|\vec{a} + \vec{b}|$
    e) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$
    f) Comprobar la propiedad asociativa de la suma de vectores en el plano.

Notemos que dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$,

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a} = (-a_1, -a_2),$$

de manera que

$$\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$$

El vector $-\vec{a}$ es el vector "opuesto" de $\vec{a}$, ya que es un vector de igual longitud y sentido opuesto. Esta terminologí a es coherente con el hecho de que $-\vec{a}$ es también el opuesto algebraico, como hemos visto.

Está claro ahora el sentido que damos a $\vec{a}-\vec{b}$: simplemente lo definimos como $\vec{a}+(-\vec{b})$.

Ejercicios

147. Si $\vec{a} = (2,4)$, $\vec{b} = (4,-3)$, $\vec{c} = (-3,2)$, determinar

    a) $\vec{a} - \vec{b}$
    b) $\vec{b} - \vec{a}$
    c) $|\vec{b} - \vec{c}|$
    d) $|4\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}|$

148. Si $\vec{a} = (3,2)$ y $\vec{a} + \vec{b} = (8,8)$, averiguar $\vec{b}$.

Utilizando las propiedades de la suma y el producto por escalares, podemos escribir cualquier vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ del plano como

$$\vec{a} = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$

Los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ tienen magnitud 1, y por esto se dice que son *unitarios*. Se los suele designar por $\hat{\mathbf{i}} = (1,0)$ y $\hat{\mathbf{j}} = (0,1)$.[1] Entonces, para cualquier vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$ se tiene

$$\vec{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}}$$

[1] A los vectores de longitud 1 se les designa el nombre especial de *versores* y en la literatura se pueden encontrar distintos símbolos, *e.g.* $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$; $\{\breve{\mathbf{i}}, \breve{\mathbf{j}}\}$; $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}\}$; $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$; o bien $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y\}$, siendo todos equivalentes y sólo una elección de estilo.

Los números a_1 y a_2 son llamados *coordenadas* de $\vec{a}$ respecto de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$. El conjunto de dos vectores $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$ es la *base canónica del plano*.

Ejemplo 1.
Hallar un vector unitario paralelo a $\vec{a} = (1, -3)$. Debemos encontrar por tanto un vector $\vec{u}$ con $|\vec{u}| = 1$ y que además sea paralelo a $\vec{a}$. Lo que tenemos que hacer es "convertir" al vector $\vec{a}$ en un vector unitario. Podemos definir

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Como es un múltiplo escalar de $\vec{a}$, obviamente es paralelo, y también es sencillo convencerse de que tiene longitud uno. Entonces:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

y tenemos

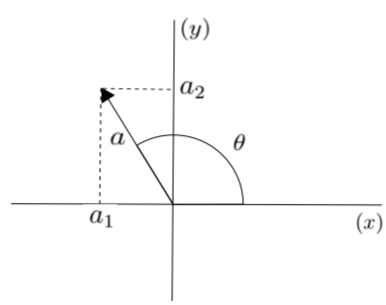
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

Ejercicios

149. Hallar un vector unitario paralelo a $3\vec{a} - 2\vec{b}$, si $\vec{a} = 4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{b} = 6\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$

4.2.1. Vectores en coordenadas polares

Hasta aquí hemos descrito a los vectores por medio de sus coordenadas cartesianas. Sin embargo existen muchas formas alternativas de parametrizarlos. Una de éstas es por medio de coordenadas polares, es decir dando explícitamente su magnitud, dirección y sentido (ver figura).



En efecto, está claro que por cada dupla (a_1, a_2) hay una y sólo una dupla (a, θ) y están conectadas entre sí por

$$a_1 = a\ \cos(\theta)\ ,$$
$$a_2 = a\ \text{sen}(\theta)\ ,$$

donde $a = |\vec{a}| \in [0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Consideremos un ejemplo con $\vec{a} = (-1, 2)$. Claramente $a = \sqrt{3}$ y por tanto θ debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,, \\ \operatorname{sen}(\theta) &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,, \end{aligned}$$

La primera ecuación tiene dos soluciones: un valor de θ en el segundo cuadrante y otro en el tercero. En cambio la segunda ecuación tiene una solución en el primer y otra en el segundo cuadrante. Como θ debe satisfacer ambas, vemos que efectivamente la solución es única y está dada un ángulo del segundo cuadrante: $\theta \approx 125{,}3^o$.

Ejercicios

150. Escriban los siguientes vectores en coordenadas polares: $\vec{a} = (0, 4)$, $\vec{b} = (1, -1)$, $\vec{c} = (-3, -\sqrt{3})$

151. Un barco se mueve en dirección Este a una velocidad respecto al agua de 20 km/h. Calcule la magnitud y dirección de la velocidad del barco medido por alguien en la orilla si el agua a su vez se está moviendo en dirección Noroeste a 5 km/h.

4.3. Vectores en $\mathbb{R}^3$

Un vector del espacio puede ser representado mediante una terna ordenada de números reales, que denotamos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y que representa a un determinado punto P del espacio con respecto a un origen 0.

La igualdad, la suma, el producto por escalares, son exactamente análogos al caso de vectores en el plano, sólo que con tres coordenadas en lugar de dos. Por supuesto, valen las mismas propiedades, agregando un tercer vector, que se suele denotar $\hat{\mathbf{k}}$, a la base canónica, es decir que un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$ se escribe

$$\vec{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}},$$

y tenemos

$$\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0);\ \hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0);\ \hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$$

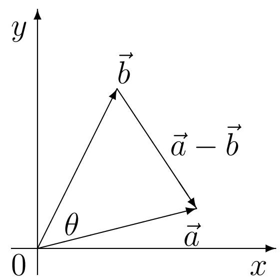
También

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

¿Por qué mencionamos explícitamente a los vectores de $\mathbb{R}^3$ si se comportan igual que los de $\mathbb{R}^2$ pero con una coordenada más? En primer lugar, porque el lugar natural para plantear la mayoría de los problemas de la mecánica en física, es $\mathbb{R}^3$. Y en segundo lugar, como veremos en la próxima sección, porque hay una operación entre vectores, el producto vectorial, que no tiene sentido para vectores del plano y sí para vectores del espacio.

4.4. Producto Escalar

Consideremos dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y su diferencia, $\vec{a}-\vec{b}$. Tenemos el siguiente diagrama:



(hacemos el diagrama en $\mathbb{R}^2$ pero también se puede en $\mathbb{R}^3$).

Por el Teorema del Coseno, tenemos

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta \tag{4.4.1}$$

Llamaremos *producto escalar* de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a la cantidad

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta,$$

donde θ es el ángulo que tiene a $\vec{a}$ como segmento inicial y a $\vec{b}$ como segmento final.

El producto escalar tiene una expresión muy sencilla en términos de las coordenadas de los vectores: si reescribimos la ecuación 4.4.1 en términos de las coordenadas, tenemos

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta.$$

Si expandimos los cuadrados de los binomios y cancelamos, llegamos a que

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Es importante notar que el producto escalar de dos vectores produce como resultado un **escalar** (de ahí su nombre), y no un vector.

Una propiedad del producto escalar es que dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son *ortogonales* (o sea, perpendiculares) si y sólo si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, ya que el producto escalar será nulo solamente cuando el coseno del ángulo comprendido sea 0, y esto fuerza a que dicho ángulo sea de 90^o.

Ejemplo 2.

Hallar el coseno del ángulo entre $\vec{a}=(1,-3)$ y $\vec{b}=(1,1)$.

El producto escalar es

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1 + (-3)\cdot 1 = -2$$

Las magnitudes son

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+(-3)^2} = \sqrt{10},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

De la definición de producto escalar podemos despejar

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|},$$

de manera que

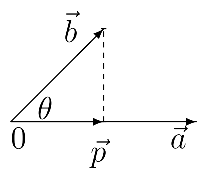
$$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Expresando el producto escalar en términos de coordenadas podemos comprobar que es conmutativo y que distribuye respecto de la suma:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

Una utilidad del producto escalar es obtener la proyección de un vector sobre otro. Consideremos el siguiente diagrama:



Sabemos por trigonometría que

$$|\vec{p}| = |\vec{b}|\cos\theta,$$

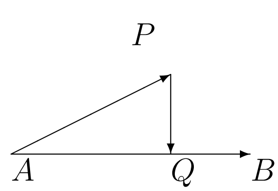
de manear que la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ es un vector $\vec{p}$ de magnitud $|\vec{b}|\cos\theta$ e igual dirección que $\vec{a}$. Tenemos entonces que

$$\vec{p} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,|\vec{b}|\cos\theta\vec{a},$$

y

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

Ejemplo 3.
Hallar la distancia del punto $P = (2,-2,1)$ a la recta que pasa por $A = (1,0,-1)$ y $B = (7,2,2)$. La distancia entre un punto y una recta está dada por la longitud del vector que une el punto con la recta y además es perpendicular a la recta.



El vector $\vec{PQ}$ está dado por $\vec{AQ} - \vec{AP}$, y $\vec{AQ}$ es la proyección de $\vec{AP}$ sobre $\vec{AB}$. Entonces,

$$\vec{AQ} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|^2} \vec{AB}.$$

Los vectores que conocemos son

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (7, 2, 2) - (1, 0, -1) = (6, 2, 3)$$

y

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (2, -2, 1) - (1, 0, -1) = (1, -2, 2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{AQ} &= \frac{(1, -2, 2) \cdot (6, 2, 3)}{(6^2 + 2^2 + 3^2)} (6, 2, 3) \\ &= \frac{6 - 4 + 6}{49} (6, 2, 3) = \frac{8}{49} (6, 2, 3) \end{aligned}$$

Ahora calculamos el módulo de $\vec{AQ}$:

$$|\vec{AQ}| = \sqrt{\left(\frac{8}{49}\right)^2 (6^2 + 2^2 + 3^2)} = \frac{8}{49} \sqrt{49} = \frac{8}{7}$$

Podríamos calcular la diferencia $\vec{AQ} - \vec{AP}$ y obtener su módulo; pero como en este problema solamente necesitamos conocerla longitud del vector, es más sencillo utilizar el Teorema de Pitágoras en el triángulo APQ:

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{|\vec{AP}|^2 - |\vec{AQ}|^2} = \sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2 - \left(\frac{8}{7}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{64}{49}} = \frac{1}{7} \sqrt{377}$$

Ejercicios

152. Aplicar el producto escalar para calcular el ángulo entre los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ si los puntos A, B, C son $(1, -1, 0)$, $(3, 1, 1)$ y $(7, 2, 2)$ respectivamente.

153. Decidir si el triángulo cuyos vértices son $A = (-1, 4, 1)$, $B = (5, 8, 5)$ y $C = (11, -4, 7)$ es rectángulo.

154. Hallar los lados y los ángulos del triángulo de vértices $A = (2, 2, 2)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (-2, -3, 2)$.

155. Utilizar el producto escalar para probar que

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

(Sugerencia: notar que ambos miembros son positivos, y entonces probar la desigualdad entre los cuadrados de ambos).

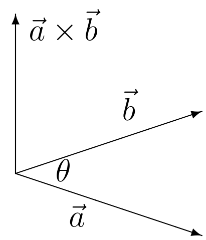
156. Hallar el valore de b para el cual $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (b, 2, 2b)$ resultan ortogonales.

4.5. Producto Vectorial

Dados $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, el *producto vectorial* de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un vector $\vec{a} \times \vec{b}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y tal que

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo comprendido.



En realidad la definición está incompleta, porque para cada par de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ hay dos vectores que cumplen lo dicho: el que dibujamos y su opuesto: la regla para elegirlo es la "regla de la mano derecha": ponemos la mano derecha en $\vec{a}$, con la palma mirando hacia $\vec{b}$: entonces el pulgar extendido indica cuál hay que elegir.

Ejercicios

157. Probar que $|\vec{a} \times \vec{b}|$ es el área de un paralelogramo que tiene por lados a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Es inmediato de la definición que el producto vectorial de vectores colineales es nulo: en particular, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ para todo $\vec{a}$, y entonces

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Ejercicios

158. Comprobar que $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$.

159. Comprobar que $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$.

160. A partir de los ejercios anteriores probar que $\vec{a} \times \vec{b}$ está dado explíicitamente por

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{\mathbf{i}} + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{\mathbf{j}} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{\mathbf{k}}.$$

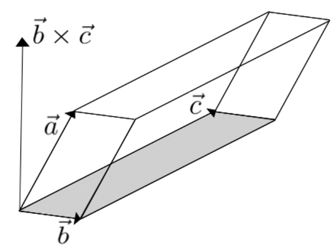
161. Hallar $(1, 10, 1) \times (0, 3, -1)$.

162. Hallar $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}})$.

163. Demostrar que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

164. Probar que si tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares, entonces $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

165. Probar que el volumen de un paralelepípedo generado por la base $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ está dado por $Vol = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$



166. Probar con un contraejemplo que el producto vectorial no es asociativo, es decir

     $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.
     Notar que debido a esta propiedad, resulta indispensable la utilización de paréntesis con productos múltiples y expresiones del estilo $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ no están bien definidas.

167. Elija tres vectores cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y verifique que se cumple la identidad $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

4.6. Aplicaciones físicas de vectores

Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton postula que si la masa de una partícula es constante, entonces la suma de fuerzas externas que actúan sobre ella es igual a la masa por su aceleración. Donde la fuerza y la aceleración son magnitudes vectoriales y la masa es un escalar. En forma de ecuación esta ley se escribe de la siguiente manera

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\cdots + \vec{F}_n = m\vec{a}$$

Ejercicios

168. Sobre una partícula de masa 3kg actúan en el mismo instante las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1$ cuyo módulo es de 6N y forma un ángulo de 30 grados con el eje negativo de la coordenada. $\vec{F}_2 = 1N\hat{\mathbf{i}} - 3N\hat{\mathbf{j}}$, y $\vec{F}_3 = (-5N, 4N)$. Calcular la aceleración de dicha partícula.

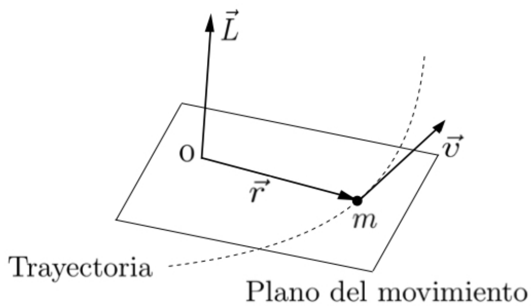
169. La fuerza $\vec{T}$ de módulo 4N forma un ángulo de 230 grados con el eje positivo de las x, que junto con la fuerza $\vec{F}$, actúan sobre un cuerpo de masa 4kg para imprimirle una aceleración de $\vec{a} = (2.5\ \hat{\mathbf{i}} - 3.5\hat{\mathbf{j}})\frac{m}{s^2}$. Obtener $\vec{F}$.

Momento angular

El momento angular (o cantidad de movimiento angular) con respecto a O (ver figura) de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ está definido por el producto vectorial

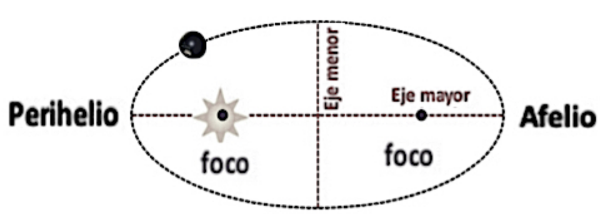
$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v},$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición respecto al orígen del sistema de coordenadas.



Ejercicios

170. A partir de las leyes de Newton y la ley de gravitación universal puede verse que, si se considera separadamente la interacción de cada planeta con el Sol, las órbitas de los planetas resultan ser elípticas, con el Sol ubicado en uno de los focos (ver figura abajo). En el caso de Mercurio, en el afelio y el perihelio las distancias entre el planeta y el Sol son de 6.99 $\times 10^{10}$ m y 4.60 $\times 10^{10}$ m, respectivamente. Tegamos en cuenta que, tanto en el afelio como en el perihelio la velocidad del planeta respecto del Sol es perpendicular al eje mayor de la elipse. La masa de Mercurio es aproximadamente 3.3 $\times 10^{23}$ kg, su rapidez respecto del Sol en el afelio es de 3.9 $\times 10^{4}$ m/s y, su rapidez respecto del Sol en el perihelio es de 5.93$\times 10^{4}$ m/s. a) Calcular el momento angular de Mercurio respecto del Sol en el perihelio. b) Calcular el momento angular de Mercurio respecto del Sol en el afelio. c) Calcular el módulo del momento angular de Mercurio respecto del Sol en el afelio y perihelio, discutir las diferencias (si las hay) con los incisos a) y b).



Lista de ejercicios sugeridos

Todos ;-)