# Análisis de Señales
# Curso 2017

## Procesos Aleatorios
## Correlación y Densidad Espectral

# Señales de Energía

- Debido a los distintos tipos de señales físicas que actúan en los sistemas, se definió el término energía de la señal, para TC:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt$$

- Si $x(t)$ es una tensión, las unidades son $V^2s$, falta dividir por R para que sea la energía. Es decir la energía de la señal es proporcional a la energía física (sobre una resistencia de $1\,\Omega$).

# Señales de Energía

- De acuerdo a lo anterior la energía de la señal es proporcional a la energía real y la constante de proporcionalidad es R.

- Para el caso discreto

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

# Señales de Potencia

- En muchas señales ni la integral ni la sumatoria anterior convergen. La energía de la señal es infinita pues no está limitada en tiempo y no decae lo suficientemente rápido.

- En estas señales es conveniente tratar con la potencia promedio de la señal en vez de la energía

# Señales de Potencia

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Tiempo continuo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

Tiempo discreto

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Señales periódicas

# Correlación determinística

- Señales de Energía
- En TC

$$R_{xy}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y\,(t+2)\,dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y\,[n+m]$$

# Correlación determinística

- Señales de Potencia
- En TC

$$R_{xy}({}^{2}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x(t)\, y\, (t + {}^{2})dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, y\, [n+m]$$

# Autocorrelación determinística

Señales de Energía

$$R_{xx}({}^{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x\, (t + {}^{2})\, dt$$

$$R_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2}(t)dt \qquad R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{2}[n]$$

# Autocorrelación determinística

## Señales de Potencia

$$R_{xx}({}^{2}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T} x(t)x(t+{}^{2})dt$$

$$R_{xx}[m] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T} x^2(t)dt \qquad R_{xx}[0] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x^2[n]$$

# Experimento aleatorio

- Experimento físico en el que las salidas están reguladas de cierta manera probabilística y no determinística.
- Ante repeticiones en las mismas condiciones las salidas no son siempre las mismas.
- Ejemplos:
- Tirar un dado: seis resultados posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Tirar una moneda: dos resultados posibles {cara, ceca}

# Modelo matemático

Tres elementos:

- Espacio muestral $(S)$ es el conjunto de todas las salidas posibles del experimento.
- Conjunto $(E)$ de todos los subconjuntos de $S$ (eventos posibles).
- Una ley de probabilidad $(P)$ que asigna un número entre $0$ y $1$ a cada evento de $E$.

# Variables aleatorias

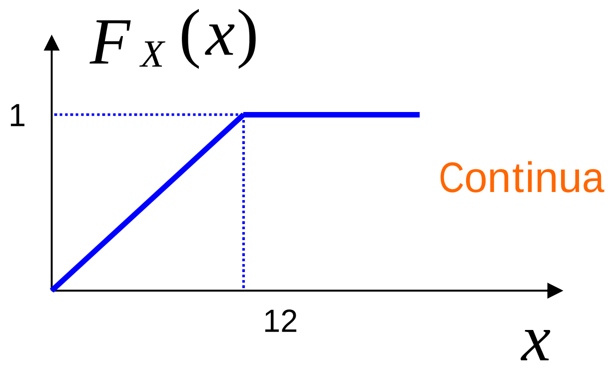
Se le llama variable pero en realidad es una función que asigna un número a cada salida de un experimento o elemento del espacio muestral $s$ Č $S$.

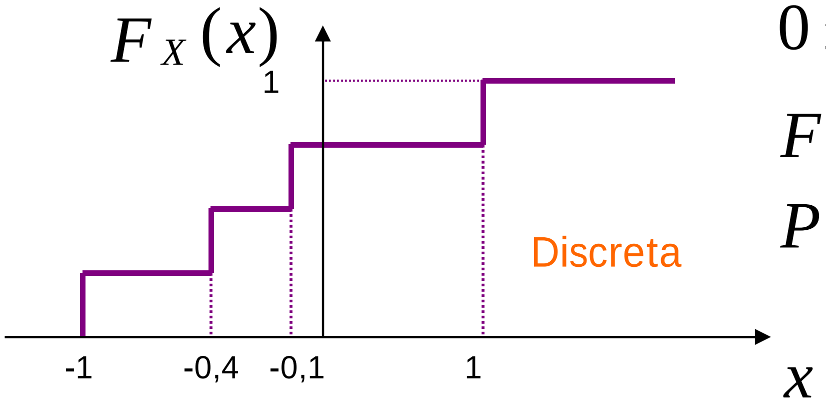
- $X(s): S \longrightarrow R$ variable aleatoria continua
- $X(s): S \longrightarrow Z$ variable aleatoria discreta
- $X(s): S \longrightarrow N$ variable aleatoria discreta

# Función de distribución

$$F_X(x_1) = P\{X \leq x_1\}$$

Probabilidad de que la V.A. $X$ tome valores menores o igual que $x_1$




Algunas propiedades

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

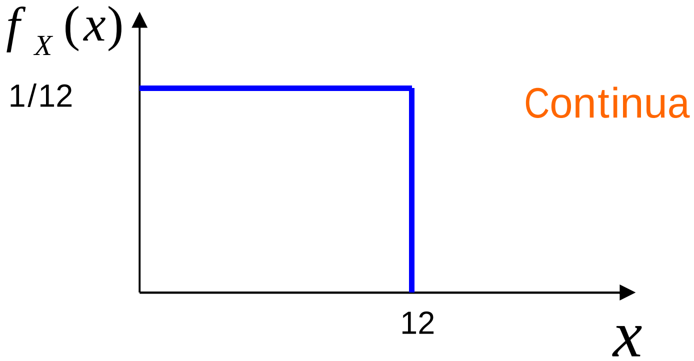
$$0 \leq F_X \leq 1$$

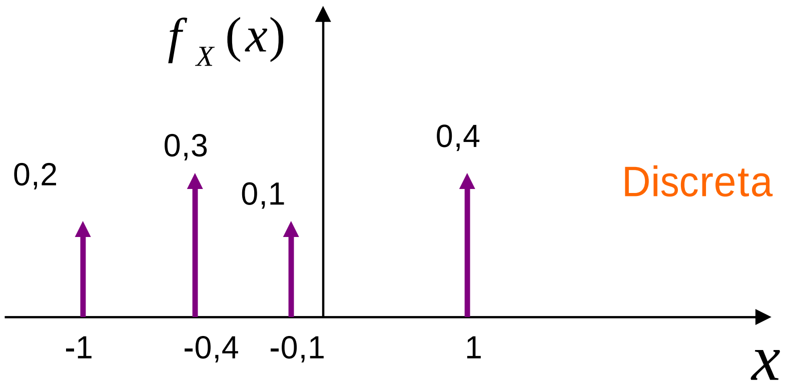
$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad con \ x_1 < x_2$$

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

# Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{dx}$$




Algunas propiedades

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

# Operaciones sobre una VA

- Valor esperado, media estadística o Esperanza

$$E[x] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx \quad \text{variable aleatoria continua}$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \quad \text{variable aleatoria discreta}$$

- Momentos alrededor del origen

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, f_X(x)dx$$

$m_0=1$: Area bajo la curva

$m_1= \overline{X}$

# Operaciones sobre una VA

- Momentos centrales (alrededor de la media)

$$«_n = E[\left( X - \overline{X} \right)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \left( x - \overline{X} \right)^n f_X(x)dx$$

$«_0 = 1$ : Area bajo la curva

$«_1 = 0$

$«_2$ se llama varianza $V[X]$, también $±^2_X$

$$±^2_X = E[\left( X - \overline{X} \right)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \left( X - \overline{X} \right)^2 f_X(x)dx =$$

$$= E[(X^2 - 2X\overline{X} + \overline{X}^2)]$$

$$= E[X^2] - \overline{X}^2 = m_2 - m_1^2$$

# Operaciones sobre dos VAs

- Si tenemos dos VAs $X$ e $Y$ podemos calcular la correlación estadística:

$$R_{XY} = E[XY]$$

- También la covarianza:

$$C_{XY} = E\left[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})\right]$$

# Función distribución y densidad conjunta

- Las probabilidades de 2 eventos (c/u)

$$A = \{X \le x\} \quad y \quad B = \{Y \le y\}$$

$$F_X(x) = P\{X \le x\} \quad y \quad F_Y(y) = P\{Y \le y\}$$

- Definimos el evento conjunto

$$\{X \le x, Y \le y\}$$

$$F_{XY}(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$ Función distribución conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$ Función densidad conjunta

# Independencia estadística

- Dados dos eventos $A=\{X \leq x\}$ y $B=\{Y \leq y\}$ se dice que son estadísticamente independientes si y sólo si:

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

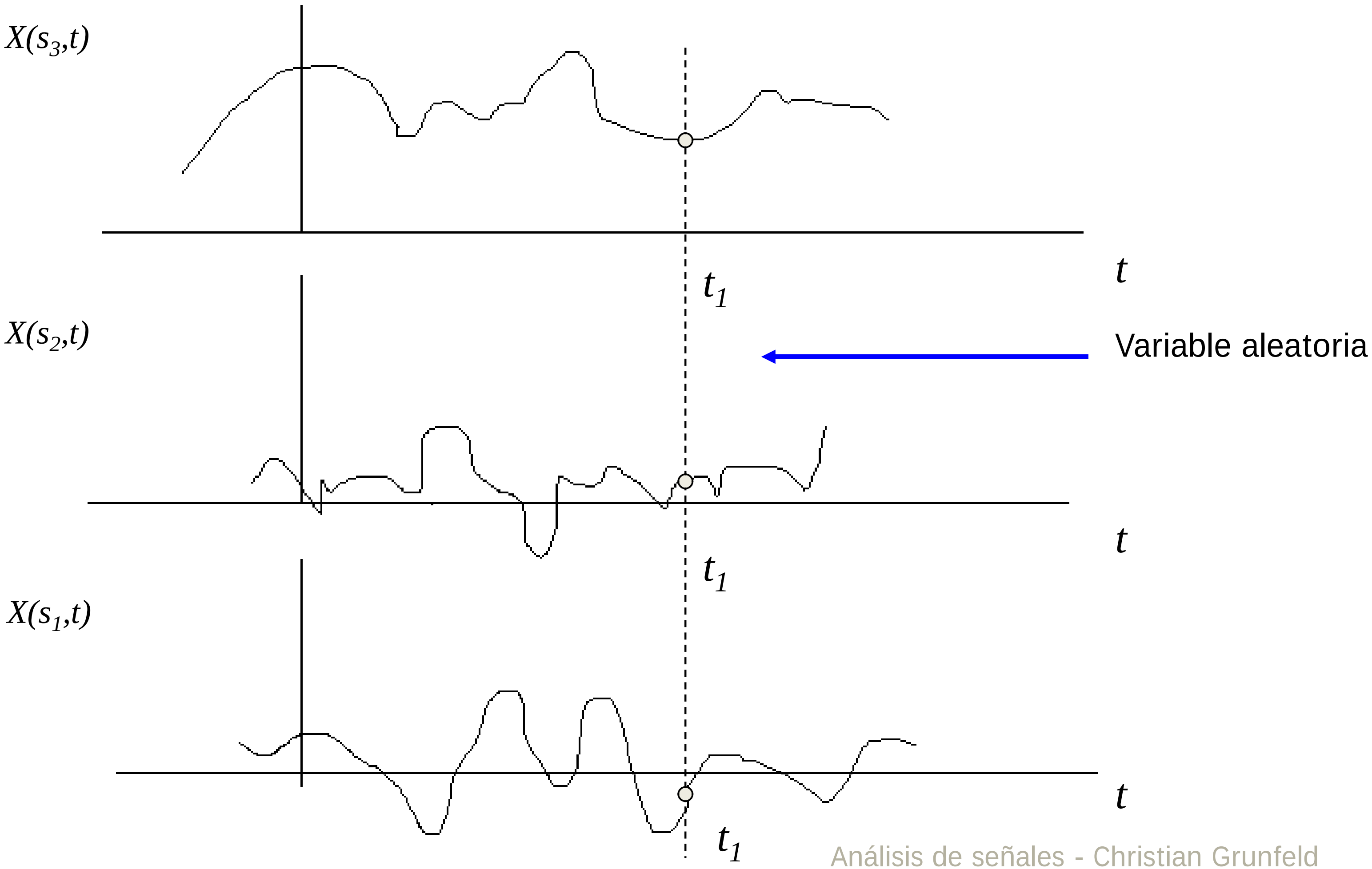
# Motivación

- Encontramos señales aleatorias
- Deseadas (comunicación bits)
- No deseadas (ruido)
- ¿Cómo describimos o analizamos estas señales en el tiempo?

# Procesos aleatorios

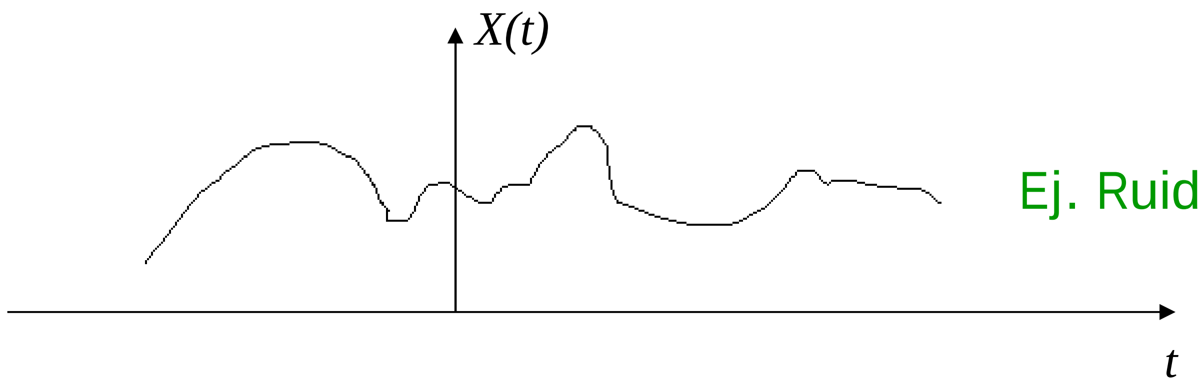
- Una variable aleatoria $X(s)$ función de las salidas $s$ de un experimento.
- Ahora función de $s$ y $t$, $X(s,t)$
- La familia de funciones $X(s,t)$ se conoce como proceso aleatorio.
- Si $t=t_1$ es fijo y $s$ variable tenemos una variable aleatoria $X(s, t_1)$.
- Si $s$ es fijo tenemos una función temporal $x(t)$.
- Si $s$ y $t$ son fijos tenemos un número.

# Procesos aleatorios



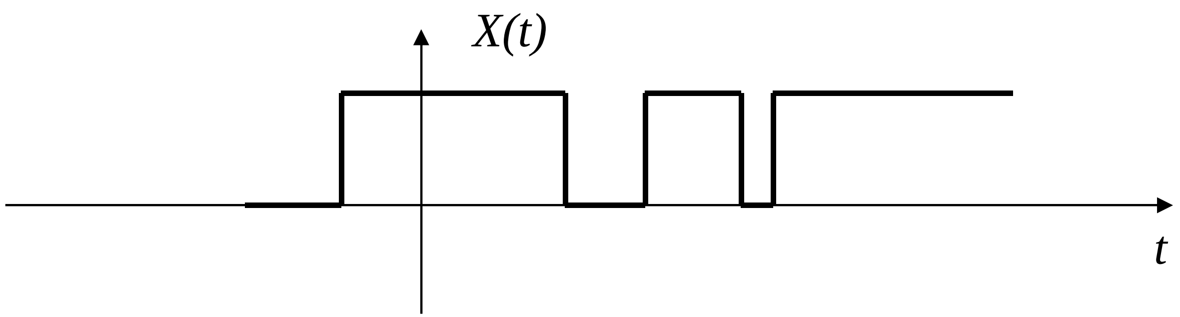
# Clasificación de PA

- $X$ y $t$ continuos ➡ PA continuo




Ej. Ruido térmico

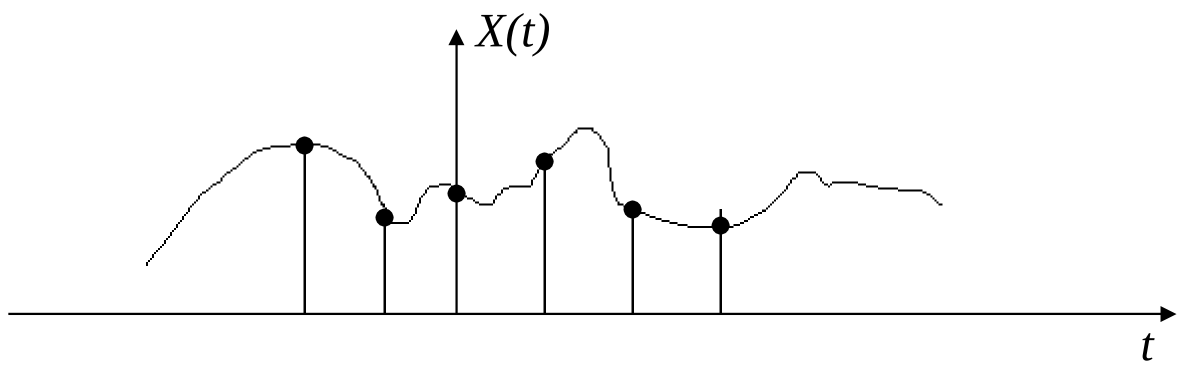
- $X$ discreta y $t$ continuo ➡ PA discreto




Ej. Bits

# Clasificación de PA

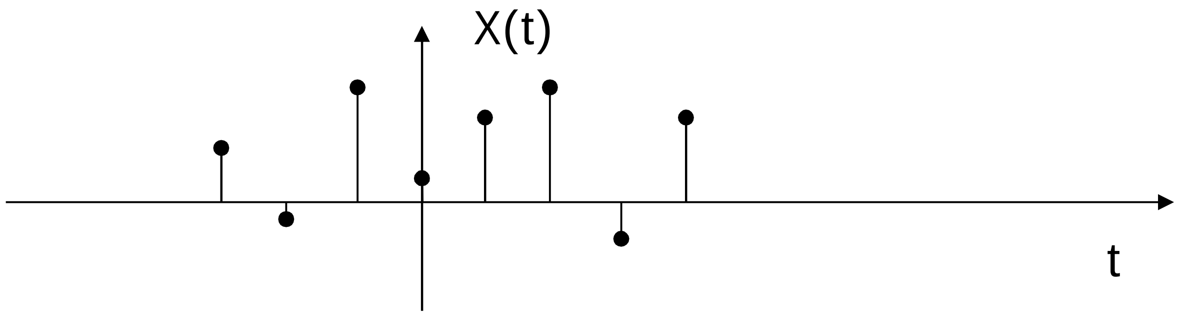
- $X$ continuo y $t$ discreto ➡ secuencia aleatoria continua




Ej. Ruido térmico muestreado

# Clasificación de PA

- X discreto y t discreto → secuencia aleatoria discreta




Ej. Secuencia de números

# Ejemplos de PA

Veamos por ejemplo el siguiente proceso aleatorio:

$$X(t) = A cos(\mu_0 t + ¯)$$

Donde $A, \mu_0$ ó ¯ pueden ser variables aleatorias.

Ver distintas realizaciones en Matlab !

# Funciones de distribución del PA

Distribución de 1er. orden:

$$F_X(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \le x_1\}$$

Distribución de 2do. orden:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

Distribución de orden $N$:

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) =$$
$$= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_N) \le x_N\}$$

# Estadística de 1er y 2do orden

- Si conociéramos la distribución conjunta de orden $N$ de un proceso $X(t)$ no necesitamos nada más! Conocemos todo lo que hay que saber del proceso!
- Esto rara vez sucede en la realidad!!!
- En la práctica debemos conformarnos con momentos de primer y segundo orden: medias y correlaciones del proceso.

$$E\left[X(t)\right] = \overline{X}$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$

# PA independiente

- Decimos que dos PA *X(t)* e *Y(t)* son estadísticamente independientes si y sólo si:

$$F_{XY}(x_1,t_1;y_1,t_1')=F_X(x_1,t_1)F_Y(y_1,t_1')$$

Para toda elección de $t_1$ y $t´_1$

# PA estacionario

- En un PA si fijamos el tiempo tenemos una VA. Ésta tiene propiedades estadísticas: valor medio, varianza, etc.
- Si hacemos esto para $N$ $t$ distintos obtenemos $N$ VA con sus propiedades estadísticas.
- Decimos en general que el PA es estacionario si sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

# PA estacionario de 1er orden

$$F_X(x_1;t_1) = F_X(x_1;t_1+\Delta)$$

Para cualquier $t_1$ y a.

En consecuencia $F_X(x_1;t_1)$ es independiente de $t_1$

$$\Rightarrow \quad E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante}$$

# PA estacionario de 2do. orden

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

Para todo $t_1$, $t_2$ $y$ a. En particular si $\Delta = -t_1$ :

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$$

No depende de $t_1$ y $t_2$ sino de la diferencia $^2 = t_2 - t_1$.
Implica estacionario de 1er orden y además:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$R_{XX}(t_1, t_1 + ^2) = E[X(t_1)X(t_1 + ^2)] = R_{XX}(^2)$$

# PA estacionario en sentido amplio

Decimos que un PA es estacionario en sentido amplio (PAESA) si se cumple que:

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante}$$

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_1+{}^2)] = R_{XX}({}^2)$$

Un PA estacionario de 2do orden lo es en sentido amplio. El recíproco en general no es cierto.

# PA estacionario de orden N y en sentido estricto

$$F_X(x_1,\ldots,x_N;t_1,\ldots,t_N) = F_X(x_1,\ldots,x_N;t_1+\Delta,\ldots,t_N+\Delta)$$

Para todo $t_1, \ldots, t_N$ $y$ a , entonces es estacionario de orden $N$.

Estacionario de orden $N$ implica estacionario de todos los ordenes $k \leq N$.

Si un proceso es estacionario para todos los ordenes $N=1,2,\ldots$ entonces se dice que es estacionario en sentido estricto.

# Promedios temporales y Ergodicidad

- Definimos el promedio temporal como:

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

- Consideremos los siguientes promedios

$$\overline{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\Re_{xx}({}^{2}) = A[x(t)x(t+{}^{2})] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+{}^{2})dt$$

# Promedios temporales y Ergodicidad

- Para una realización del proceso las dos integrales dan un número como resultado (que depende de la realización). Si todas las realizaciones del proceso son consideradas entonces $\Re_{xx}(^{2})$ y $\overline{x}$ son VAs.
- Si tomamos esperanza y suponemos que podemos entrar la esperanza dentro de la integral temporal tenemos:

$$E[\overline{x}] = \overline{X}$$

$$E[\Re_{xx}(^{2})] = R_{XX}(^{2})$$

# Ergodicidad

Si por alguna razón pudiéramos afirmar que las VAs anteriores tienen varianza nula entonces:

$$\overline{x} = \overline{X}$$

$$\mathcal{R}_{xx}(2) = R_{XX}(2)$$

Promedios temporales iguales a promedios estadísticos!!

El que establece esas condiciones es el Teorema Ergódico.

Dificil de probar. En la práctica se asume.

# Autocorrelación

- Si el proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio

$$R_{XX}(2) = E[X(t)X(t+2)]$$

- Y tiene las siguientes propiedades:

$$\left|R_{XX}(2)\right| \leq R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(-2) = R_{XX}(2)$$

$$R_{XX}(0) = E[X^{2}(t)]$$

# Otras propiedades

Si $E[X(t)] = \overline{X} \neq 0$ y $X(t)$ no tiene componentes periódicas entonces: $\lim_{|^2| \to \infty} R_{XX}(^2) = \overline{X}^2$

Si $X(t)$ tiene una componente periódica entonces:

$R_{XX}(^2)$ también tiene una componente periódica con el mismo período.

Si $X(t)$ es ergódico, con valor medio 0 y sin componente periódica entonces:

$$\lim_{|^2| \to \infty} R_{XX}(^2) = 0$$

# Ejemplo

Dado el proceso $X(t) = A\cos(w_0 t + \theta)$ donde $A$ y $w_0$ son constantes y $\theta$ es una VA uniformemente distribuida en $(0,2\pi)$, decir si es estacionario en sentido amplio.

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(w_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0 = \boxed{cte.}$$

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[A\cos(w_0 t + \theta)A\cos(w_0 t + w_0\tau + \theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(w_0\tau) + \cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\theta)]$$

$$= \boxed{\frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau)} + \underbrace{\frac{A^2}{2}E[\cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\theta)]}_{0}$$

Es estacionario en sentido amplio

# Motivación

- Antes analizamos señales determinísticas y sistemas lineales en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
- ¿Ahora con señales aleatorias se podrá?
- Hicimos todo el análisis de procesos aleatorios hasta acá en el dominio del tiempo.
- ¿Y en el dominio de la frecuencia?

# Densidad Espectral de Potencia

Dado un PA $X(t)$:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T<t<T \\ 0 & en\ otra\ parte \end{cases}$$

Satisface $\int_{-T}^{T} |x_T(t)|\,dt < \infty$ con $T$ finito y por lo tanto tiene TF:

$$X_T(w) = \int_{-T}^{T} x_T(t) e^{-jwt} dt = \int_{-T}^{T} x(t) e^{-jwt} dt$$

# Densidad Espectral de Potencia

La energía de *x(t)* contenida en el intervalo *(-T,T)* es:

$$E(T) = \int_{-T}^{T} x_T^2(t)dt = \int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

Aplicando el Teorema de Parseval:

$$E(T) = \int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} | X(w) |^2 \, dw$$

# Densidad Espectral de Potencia

Dividiendo por $2T$ tenemos la potencia promedio de $x(t)$ en $(-T,T)$:

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| X_T(w) \right|^2}{2T} dw$$

Haciendo $T \longrightarrow$ ã y tomando valor esperado:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X^2(t)]dt = \frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[\left|X_T(w)\right|^2]}{2T} dw$$

# Densidad Espectral de Potencia

Finalmente definimos la DEP como:

$$S_{XX}(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(w)|^2]}{2T}$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\circledR} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)\,dw$$

# Ejemplo

Dado el proceso $X(t) = A\cos(w_0 t + \theta)$ donde $A$ y $w_0$ son constantes y $\theta$ es una VA uniformemente distribuida en $(0,\pi/2)$, encontrar la potencia promedio $P_{XX}$.

$$E[X^2(t)] = E[A^2\cos^2(w_0 t + \theta)] = E\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2w_0 t + 2\theta)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2w_0 t + 2\theta)\,d\theta = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}sen(2w_0 t)$$

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}sen(2w_0 t)\right]dt = \frac{A^2}{2}$$

# Propiedades de la DEP

$$(1) \quad S_{XX}(w) \geq 0$$

$$(2) \quad S_{XX}(-w) = S_{XX}(w) \qquad X(t) \quad real$$

$$(3) \quad S_{XX}(w) \quad es\ real$$

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)dw = A\left[E[X^2(t)]\right]$$

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)e^{jwt}dw = A\left[R_{XX}(t, t+\tau)\right]$$

# Relación entre Autocorrelación y DEP

De la propiedad 5 y si el proceso $X(t)$ es estacionario en sentido amplio tenemos que:

$$A\left[R_{XX}(t,t+\tau)\right]=R_{XX}(\tau)$$

Y entonces:

$$S_{XX}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau)e^{-jw\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(w)e^{jw\tau}\,dw$$

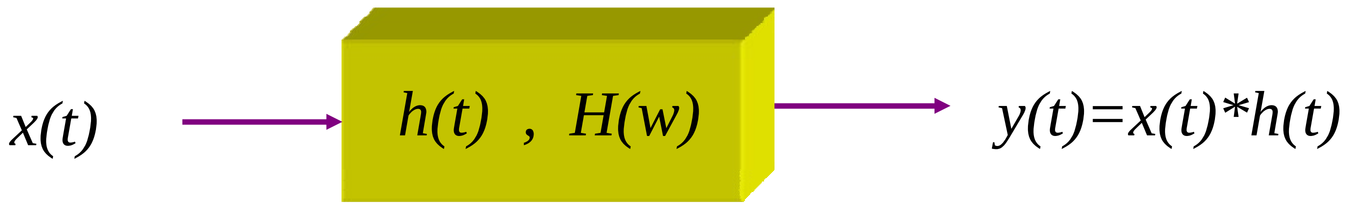
$$o \quad R_{XX}(\tau)\xleftrightarrow{F}S_{XX}(w)$$

Forman un par transformado de Fourier

Relación de Wiener-Khinchin

# SLITs con entradas aleatorias

*X(t)* estacionario en sentido amplio !!!




Aun cuando *x(t)* es una señal aleatoria la respuesta del sistema será:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

# SLITs con entradas aleatorias

Lo podemos interpretar como que una realización $x(t)$ del proceso $X(t)$ produce una realización $y(t)$ de un proceso de salida $Y(t)$.

Podemos ver como una definición del proceso $Y(t)$ a lo siguiente:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(^2)X(t-^2)d^2$$

Y podríamos calcular medias y correlaciones para $Y(t)$.

# SLITs con entradas aleatorias

Media de $Y(t)$:

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau$$

$$= \overline{X}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = \overline{Y}$$

Correlaciones de entrada-salida y salida:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(t)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t)$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t) * h(t)$$

# SLITs con entradas aleatorias

$$R_{YY}(t,t+^{2}) = E[Y(t)Y(t+^{2})] =$$

$$= E[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t+^{2}-v)dv] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-u)X(t+^{2}-v)]h(u)h(v)dudv =$$

$$R_{YY}(^{2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(^{2}+u-v)h(u)h(v)dudv =$$

$$R_{YY}(^{2}) = R_{XX}(^{2})*h(^{2})*h(-^{2})$$

$$S_{YY}(f) = \left|H(f)\right|^{2} S_{XX}(f)$$

# Ruido Blanco

- Tiene todas las *f*, como la luz blanca, es estacionario en sentido amplio:

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} = K = cte$$

$$R_{NN}(2) = \frac{N_0}{2}\,\text{¢}\,(2)$$

- No es realizable

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(f)df = \infty$$