Análisis de señales curso 2017

Transformada Z

Transformada Z

Hay dos maneras de desarrollar la Transformada Z:

- Como generalización de la Transformada de Fourier de tiempo discreto.

- Utilizando a las exponenciales complejas como autofunciones de las ecuaciones en diferencias que describen SLIT.

Transformada Z

En la TFTD utilizamos a las exponenciales complejas de parámetro real de la forma:

$e^{j\Omega n}$ con Ω real. Esto tiene módulo 1

Ahora las vamos a extender a exponenciales con un parámetro S complejo: e^{Sn}.

e^{S} puede estar en cualquier parte del plano complejo.

Transformada Z

Llamando $z = e^{S}$ la definición de la Transformada Z queda:

$$Z\{x(t)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Cuando $z = e^{j\Omega}$ con Ω real, o sea $|z| = 1$, la sumatoria coincide con la TFTD de $x[n]$.

Transformada Z

Utilizando $z = re^{j\Omega}$ en la Transformada Z tenemos:

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\Omega n}$$

Pero eso es la TFTD de $x[n]r^{-n}$! O sea $x[n]$ multiplicada por un factor de convergencia. r^{-n} puede ser creciente o decreciente según sea r mayor o menor que 1.

Transformada Z

En particular cuando $r=1$ o de forma similar $|z|=1$ obtenemos la TFTD.

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

z sobre la circunferencia unidad.

Transformada Z

Para encontrar la transformación inversa vamos a considerar la TFTD de la función $x[n]r^{-n}$.

$$F\left\{x[n]r^{-n}\right\} = X(re^{jw})$$

Antitransformando ambos miembros:

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\left\{X(re^{jw})\right\}$$

$$x[n] = r^{n}F^{-1}\left\{X(re^{jw})\right\}$$

Transformada Z

Usando la TFTD Inversa:

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{jw}) e^{jwn} dw$$

Moviendo el factor r^n adentro de la integral:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{jw})(re^{jw})^n dw$$

Haciendo $z=re^{jw}$ con r fija y $dz=jre^{jw}dw=jzdw$

- o $dw=(1/j)z^{-1}dz$

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Transformada Z

$$x[n] = \frac{1}{j2\text{®}} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Transformada Z inversa

Transformada Z

Otra manera de ver a la Transformada Z es considerando la respuesta de un SLIT ante una entrada exponencial compleja de la forma $x[n]=Ke^{sn}= Kz^{n}$.

$$y[n]=h[n]*Kz^{n}=K\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]z^{n-m}=\underbrace{Kz^{n}}_{x[n]}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]z^{-m}$$

Si la suma converge, la salida es la misma señal de entrada multiplicada por $H(z)$ (la transformada Z de la respuesta al impulso $h[n]$.

Transformada Z

Ahora para una señal generica *x[n]*:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] * x[n]) z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m] z^{-n}$$

Separando las dos sumatorias:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m] z^{-n}$$

Transformada Z

Haciendo un cambio de variables $q{=}n\text{-}m$:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q] z^{-(q+m)}$$

$$Y(z) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}}_{H(z)} \underbrace{\sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q] z^{-q}}_{X(z)}$$

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

Transformada Z

Obtuvimos un resultado similar que con Fourier y Laplace.

La Transformada Z de la respuesta a una señal $x[n]$ de un SLIT con respuesta impulsional $h[n]$ es igual al producto de las transformadas $X(z)$ y $H(z)$.

$H(z)$ se llama función de transferencia.

Transformada Z

Ejemplo: sea $x[n]=a^n u[n]$:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Para la convergencia necesitamos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty \qquad \text{o} \qquad |az^{-1}|^n < 1$$

o lo que es lo mismo: $|z| > |a|$

Transformada Z

Entonces:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \quad ,|z|>|a|$$

Si $a=1$, $x[n]$ es el escalón unitario y la TZ será:

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \quad , |z|>1$$

Si $a>1$ la Transformada Z existe pero la TFTD no !

Transformada Z

Otro ejemplo: sea $x[n]=-a^n u[-n-1]$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

Pero ahora para que la suma converja debe ser $|a^{-1}z|<1$ o $|z|<|a|$.

Transformada Z

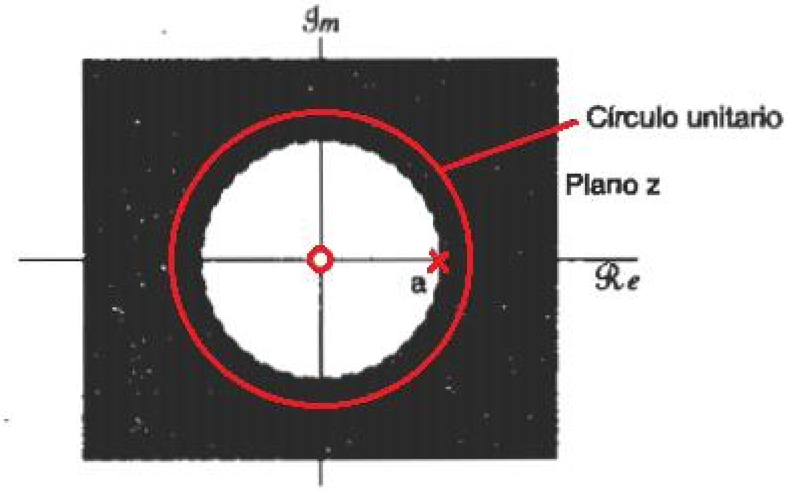
$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad , \ |z| < |a|$$

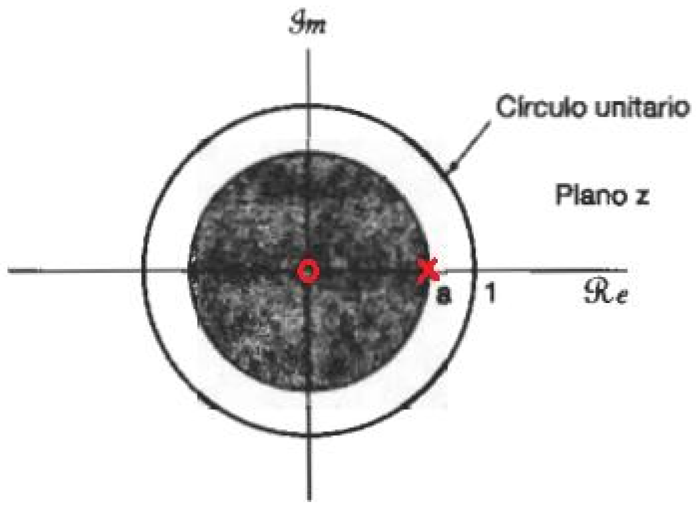
La expresión algebraica de $X(z)$ resultó la misma que antes, pero los valores de z para los cuales la expresión es válida es diferente.

No es suficiente la expresión de la TZ sino que además necesitamos saber lo que se conoce como región de convergencia (ROC).

Transformada Z

Para los ejemplos anteriores:





Para algun valor $0<a<1$

Transformada Z

Algunas propiedades de la TZ:

Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
Desplazamiento en tiempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, excepto para la posible adición o supresión del origen
Escalamiento en el dominio de z	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	z_0R
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Versión escalada de R (es decir, $\|a\|R$ = el conjunto de puntos $\{\|a\|z\}$ para z en R)
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R invertida (es decir, R^{-1} = el conjunto de puntos z^{-1}, donde z está en R)
Expansión en el tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algún entero r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (es decir, el conjunto de puntos $z^{1/k}$, donde z está en R)
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos la intersección de R y $\|z\| > 0$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	Al menos la intersección de R y $\|z\| > 1$
Diferenciación en el dominio de z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R

Transformada Z

Algunos pares transformados:

1. $\delta[n]$	1	Toda z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	Para toda z excepto 0 (si $m > 0$) o ∞ (si $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $[\operatorname{sen} \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\operatorname{sen} \omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [r\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $[r^n \operatorname{sen} \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\operatorname{sen} \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$

Transformada Z

Cualquier combinación lineal de secuencias exponenciales tendrá una TZ que será suma de términos similares a los que vimos.

También al analizar SLIT especificados como ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes.

En esos casos la TZ será una función racional en z. (cociente de polinomios)

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Transformada Z

Podemos expresar a la TZ como cociente de polinomios en z y a veces también podemos expresarlos en z^{-1}.

Sin embargo hablamos de ceros y polos como las raices de los polinomios del numerador y denominador expresados en la variable z.

Los ceros, los polos y la ROC, todos marcados en el plano z, nos dan una forma gráfica para describir a la TZ.

Transformada Z

Si las TZ son funciones racionales (cociente de polinomios) se puede encontrar de una manera sencilla la antitransformada Z mediante fracciones parciales.

Ejemplo: $$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Hay un polo en $z=1/4$ y otro en $z=1/3$ y la ROC está afuera del polo más externo.

Transformada Z

Utilizando la expansión en fracciones parciales (igual a lo que vimos para la TL):

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \quad , \qquad |z| > \tfrac{1}{3}$$

Por lo tanto $x[n]$ será la suma de dos secuencias. Como la ROC de $X(z)$ está hacia afuera del polo más alejado, la ROC de cada una de las partes tendrá que estar hacia afuera de cada uno de sus polos.

Transformada Z

O sea que:

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

Donde:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad |z| > \tfrac{1}{4}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \tfrac{1}{3}$$

Del ejemplo que vimos anteriormente sabemos que:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Transformada Z

Por lo tanto por inspección nos queda:

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Y finalmente:

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Transformada Z

De la misma manera que lo hicimos con la TL vamos a definir lo que se conoce como Transformada Z Unilateral.

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Es la herramienta que vamos a usar para analizar sistemas causales y especificados por ecuaciones en diferencias ordinarias con coeficientes constantes y condiciones iniciales no nulas.

Transformada Z

Las dos Transformadas sólo difieren en el índice inicial de la sumatoria.

Dos secuencias diferentes para $n<0$ pero que son idénticas para $n\geq 0$ tendrán distintas TZ bilaterales pero TZ unilaterales iguales.

Dos secuencias que sean idénticamente nulas para $n<0$ tendrán TZ bilateral y unilateral idénticas.

Transformada Z

La transformada inversa será la misma.

La mayoría de las propiedades son las mismas salvo algunas diferencias que vamos a ver.

La ROC siempre será el exterior de un círculo a partir del polo más alejado.

Transformada Z

La propiedad o teorema de convolución:

$$Z\{x[n] * h[n]\} = H(z)X(z)$$

sigue valiendo siempre y cuando $x[n]$ y $h[n]$ sean idénticamente nulas para $n<0$.

La propiedad de corrimiento en el tiempo:

$$x[n-1] \xleftrightarrow{Z} z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$x[n+1] \xleftrightarrow{Z} zX(z) - x[0]$$

Transformada Z

Propiedad de primera diferencia:

$$x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{Z}(1-z^{-1})X(z)-x[-1]$$

Teorema del valor inicial:

$$x[0]=lím_{z\to\infty}X(z)$$

Transformada Z

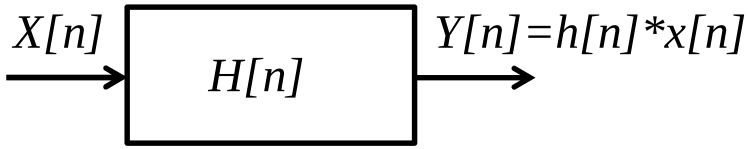
La utilidad más grande de la TZ es el análisis y caracterización de SLIT.

Ya vimos que la TZ de la entrada y salida de un SLIT están relacionadas a través de la multiplicación por la TZ de la respuesta al impulso del sistema.

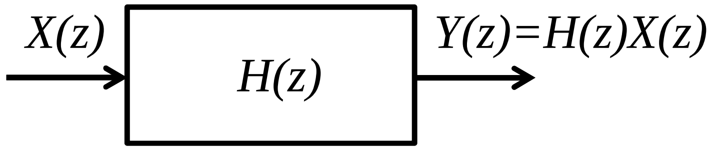
$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Transformada Z

En el dominio del tiempo:



En el dominio de la frecuencia:



$H(z)$ es la función de transferencia. Para $z=e^{jw}$, $H(e^{jw})$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Transformada Z

Causalidad:

Un SLIT discreto con $H(z)$ racional es causal si y sólo si la ROC es el exterior de un círculo a partir del polo de mayor módulo y si el grado del numerador de $H(z)$ no es mayor que el grado del denominador.

Transformada Z

Estabilidad:

La estabilidad del sistema era equivalente a que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable. En ese caso la TFTD de la respuesta al impulso converge (existe). Si la TFTD existe entonces tiene que coincidir con la TZ para $z=e^{jw}$. O sea que el círculo unitario debe pertenecer a la ROC.

Transformada Z

Estabilidad y causalidad:

Por lo dicho anteriormente, un SLIT es causal y estable si y sólo si todos los polos de la $H(z)$ racional están dentro del círculo unitario !

Transformada Z

Ejemplo: sea un SLIT cuya entrada *x[n]* y salida *y[n]* satisfacen la siguiente ecuación en diferencias con condiciones iniciales nulas:

$$y[n]-\tfrac{1}{2}\,y[n-1]=x[n]+\tfrac{1}{3}\,x[n-1]$$

encuentre la respuesta causal al impulso.

Transformada Z

Aplicando TZ a ambos miembros y utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo tenemos:

$$Y(z)-\tfrac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)+\tfrac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Como queremos encontrar una respuesta causal la ROC debe ser $|z|>1/2$.

Transformada Z

Podemos escribir:

$$H(z) = \left(1 + \tfrac{1}{3} z^{-1}\right) \frac{1}{1 - \tfrac{1}{2} z^{-1}}$$

Y utilizar propiedades para llegar a:

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$