Análisis de señales curso 2017

Métodos discretos de Fourier

Resumen

- Introducción al problema
- Serie de Fourier de tiempo discreto (SFTD o DTFS)
- Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD o DTFT)
- Transformada discreta de Fourier (TDF o DFT)

Introducción

Ya vimos en tiempo continuo la representación de señales periódicas en Series de Fourier de tiempo continuo (SFTC o CTFS).

Vimos la extensión a señales no periódicas con la Transformada de Fourier (TF o FT)

¿Podremos hacer lo mismo para señales de tiempo discreto?

Serie de Fourier de TD

La serie de Fourier de TD representa a **señales discretas periódicas** como combinación lineal de sinusoides reales o exponenciales complejas.

De esa manera nos sirve para encontrar la respuesta de SLIT ante entradas arbitrarias (periódicas por ahora) mediante superposición de respuestas a sinusoides individuales.

Serie de Fourier de TD

Si la señal en TD es periódica $x[n]=x[n+N]$, su representación mediante la SF es:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk\Omega_0 n}$$

Donde $\Omega_0 = \frac{2\circledR}{N}$ es la frecuencia "digital" fundamental de la señal periódica y la frecuencia de la componente k-ésima es $k\Omega_0$

Serie de Fourier de TD

Ahora podemos preguntarnos: ¿cuántos términos deben considerarse en la suma para el caso de una secuencia discreta periódica de período N?

Recordando la propiedad de las exponenciales complejas discretas

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jN\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n} = e^{j\cancel{N}\frac{2\text{®}}{\cancel{N}}n} e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$$

Como habíamos visto antes, exponenciales complejas con $f \neq$ no son todas diferentes como ocurría en TC. Sólo hay N exponenciales complejas distintas.

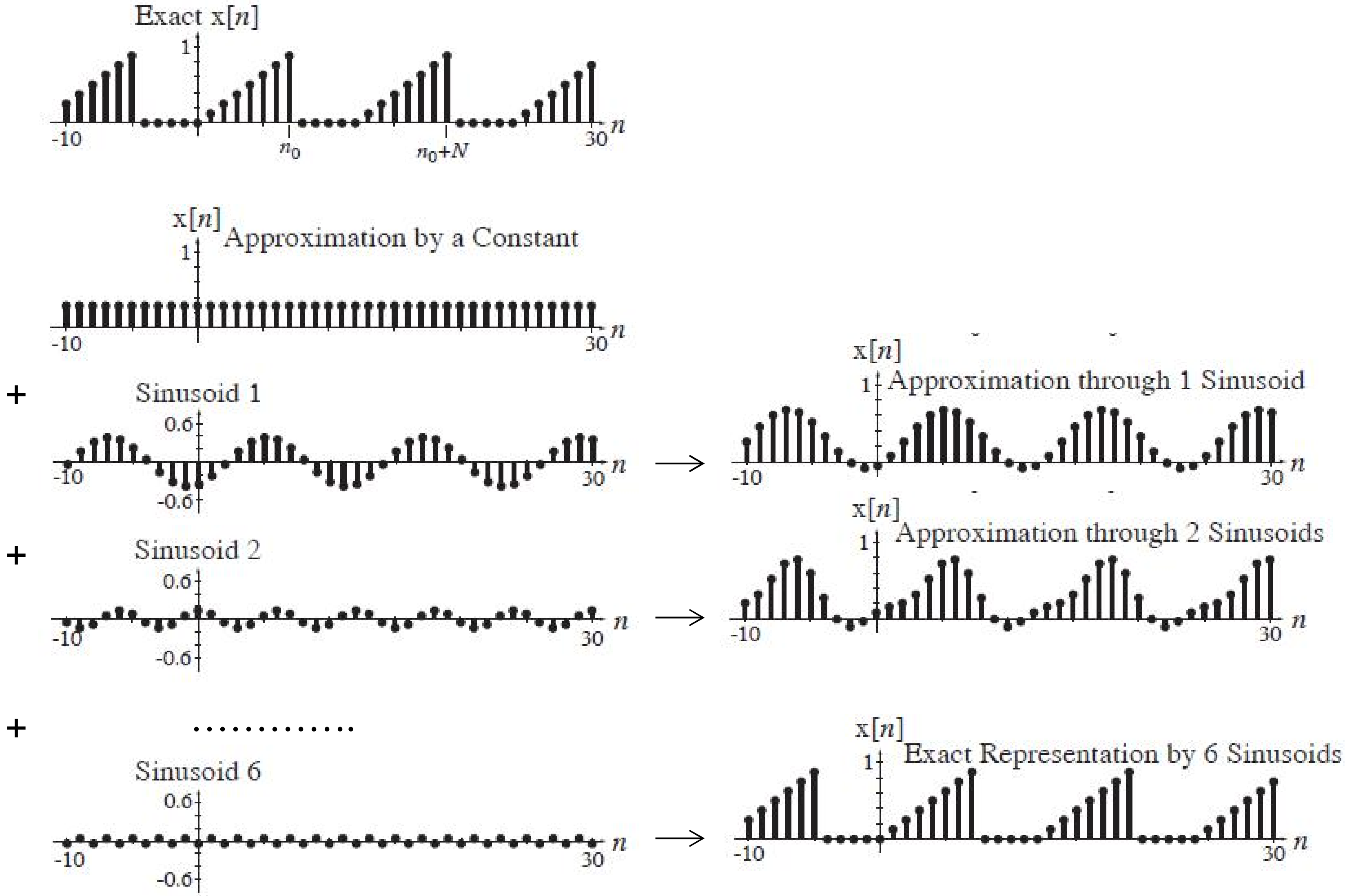
Serie de Fourier de TD

Ésta es una diferencia fundamental entre TC y TD!

En TC necesitábamos infinitas sinusoides o exponenciales complejas!

En TD necesitamos sólo un número finito y además la representación siempre se puede hacer exacta!

Serie de Fourier de TD



Serie de Fourier de TD

En consecuencia se puede escribir la SF de una señal periódica discreta como:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} C_k \, e^{jk\Omega n}$$

Donde $k=<N>$ significa que la sumatoria debe hacerse sobre cualquier conjunto de N valores consecutivos de k. Por ejemplo $k=n_0 \ldots n_0+N\text{-}1$. En particular n_0 puede ser 0.

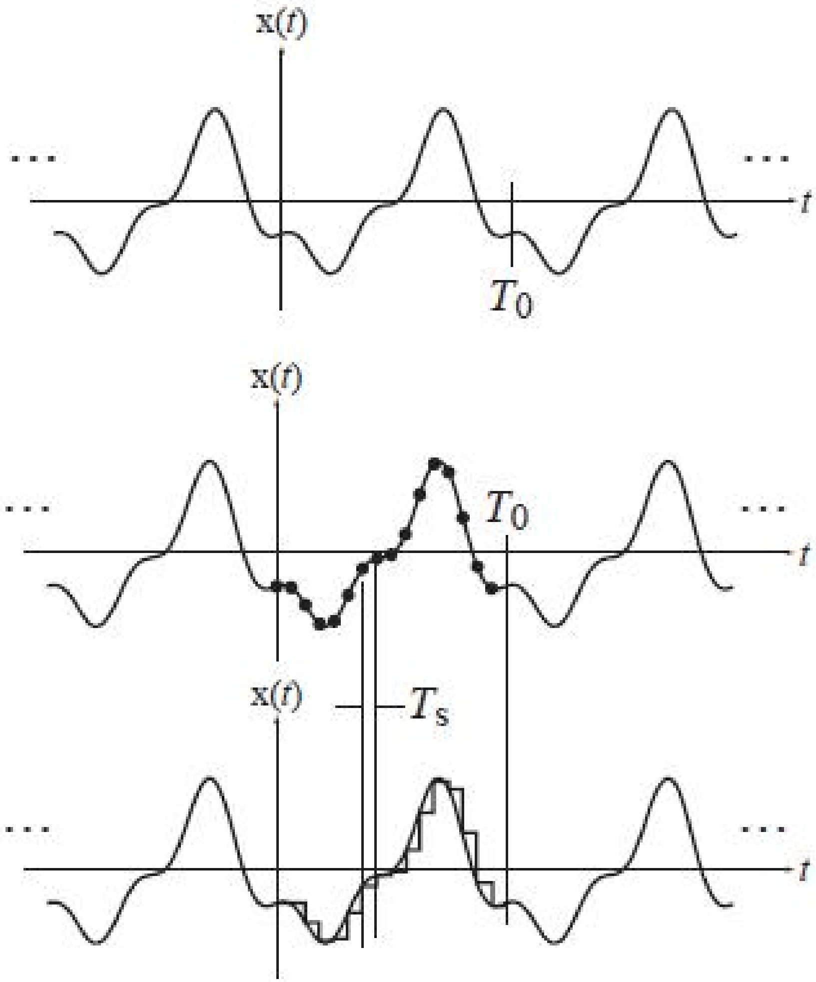
Serie de Fourier de TD

¿Cómo encontramos los coeficientes C_k?

Supongamos que tenemos muestras de una señal periódica de TC en instantes $t=nT_s$. Donde T_s es la separación entre muestras.

Este análisis también es válido para una señal arbitraria periódica de la cual no tenemos una expresión matemática, sólo muestras en algunos instantes.

Serie de Fourier de TD



Serie de Fourier de TD

Sabemos de la SFTC que:

$$c[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\,e^{-j2\pi kt/T}dt$$

Supongamos que no conocemos una forma explícita de $x(t)$ pero tenemos un conjunto de N datos que abarcan un período (podría empezar en 0 o no). La separación entre esos datos es $T_s = T/N$ (período de muestreo).

Serie de Fourier de TD

Podemos entonces aproximar la integral por una suma de varias integrales donde cada una cubre un tiempo T_s.

$$c[k] \cong \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{nT_s}^{(n+1)T_s} x(nT_s)\, e^{-j2\pi knT_s/T} dt \right]$$

Cuanto más juntas estén las muestras mejor será la aproximación!

Serie de Fourier de TD

Puede demostrarse, bajo ciertas condiciones ($|k| << N$), que:

$$c[k] \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)\, e^{-j2\circledR kn/N}$$

Entonces tenemos:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} c[k]\, e^{jk\Omega n}$$

Ecuación de síntesis

$$c[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\Omega n}$$

Ecuación de análisis

T. de Fourier de tiempo discreto

Igual que como hicimos para tiempo continuo, para extender la SFTC a señales no periódicas, ahora lo vamos a hacer con la SFTD para definir la TFTD.

- $x[n]$ – aperiódica de duración finita
- $y[n]$ – periódica de período N
- $x[n] = y[n]$ en N

T. de Fourier de tiempo discreto

La representación en SFTD de *y[n]* será:

$$y[n] = \sum_{k=<N>} c[k] e^{jk\Omega n}$$

Donde:

$$c[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} y[n] e^{-jk\Omega n}$$

Como *x[n]=y[n]* en un período y luego *x[n]=0*, la sumatoria puede extenderse para *x[n]* y dará lo mismo:

$$c[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega n}$$

T. de Fourier de tiempo discreto

Definiendo:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Tenemos: $$c[k] = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

Donde $\Omega_0 = 2\pi/N$ es el espaciamiento de las muestras en el dominio de la frecuencia.

T. de Fourier de tiempo discreto

Combinando las ecuaciones:

$$y[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n}$$

Ya que $\Omega_0 = 2\pi/N$ o lo que es lo mismo $1/N = \Omega_0/2\pi$

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

A medida que N aumenta, Ω_0 disminuye y la sumatoria se convierte en una integral.

T. de Fourier de tiempo discreto

$X(e^{j\Omega})$ y $e^{j\Omega n}$ son periódicas en Ω de período 2π entonces el producto también es periódico.

Cada término de la sumatoria representa el área de un rectángulo de altura $X(e^{jk\Omega o})e^{j\Omega on}$ y ancho Ω_0.

A medida que $N \rightarrow \infty$ la sumatoria se vuelve una integral pero el producto $\Omega_0 N=2\pi$ y el intervalo de integración siempre tendrá un ancho de 2π.

Por lo tanto:

$$x[n] \cong y[n] = \frac{1}{2\circledR} \int_{2\circledR} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

T. de Fourier de tiempo discreto

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Ec. de análisis

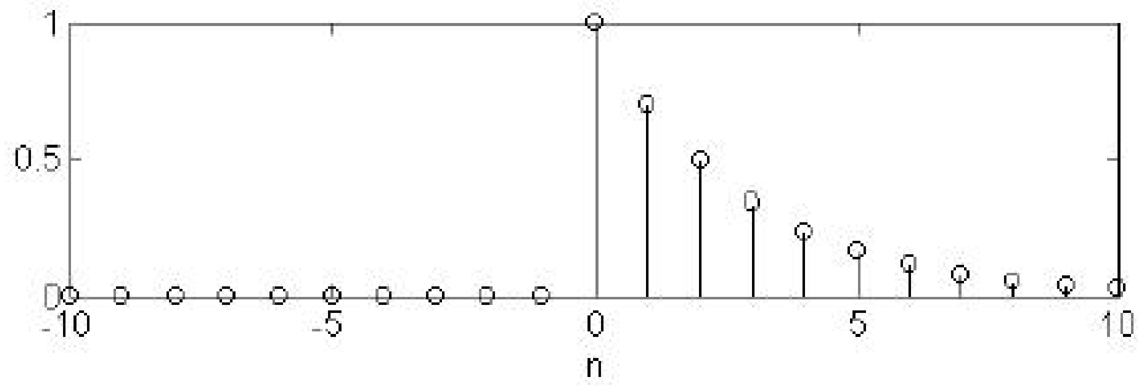
$$x[n] = \frac{1}{2\circledR} \int_{2\circledR} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

Ec. de síntesis

T. de Fourier de tiempo discreto

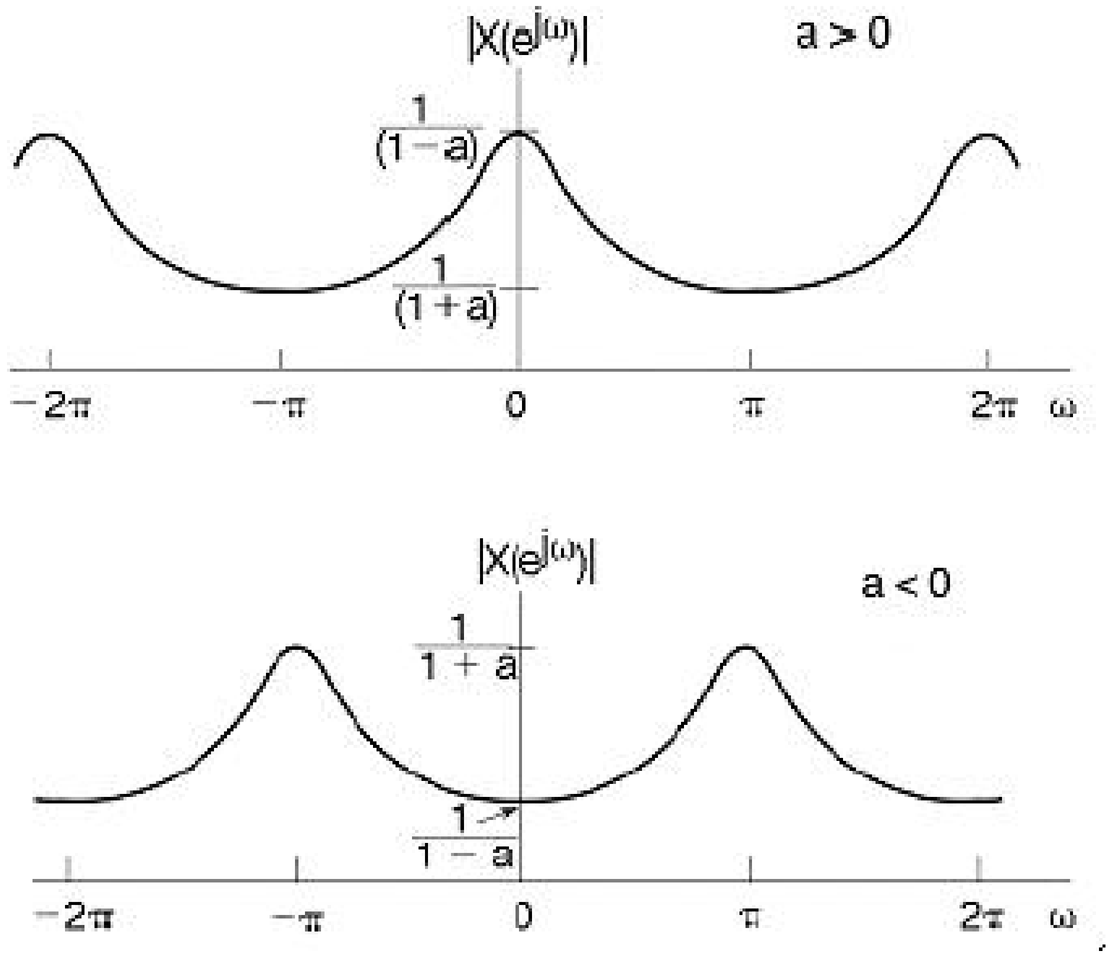
Ejemplo 1:

$$x[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1$$



$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\, e^{-jw})^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-jw}}$$

T. de Fourier de tiempo discreto



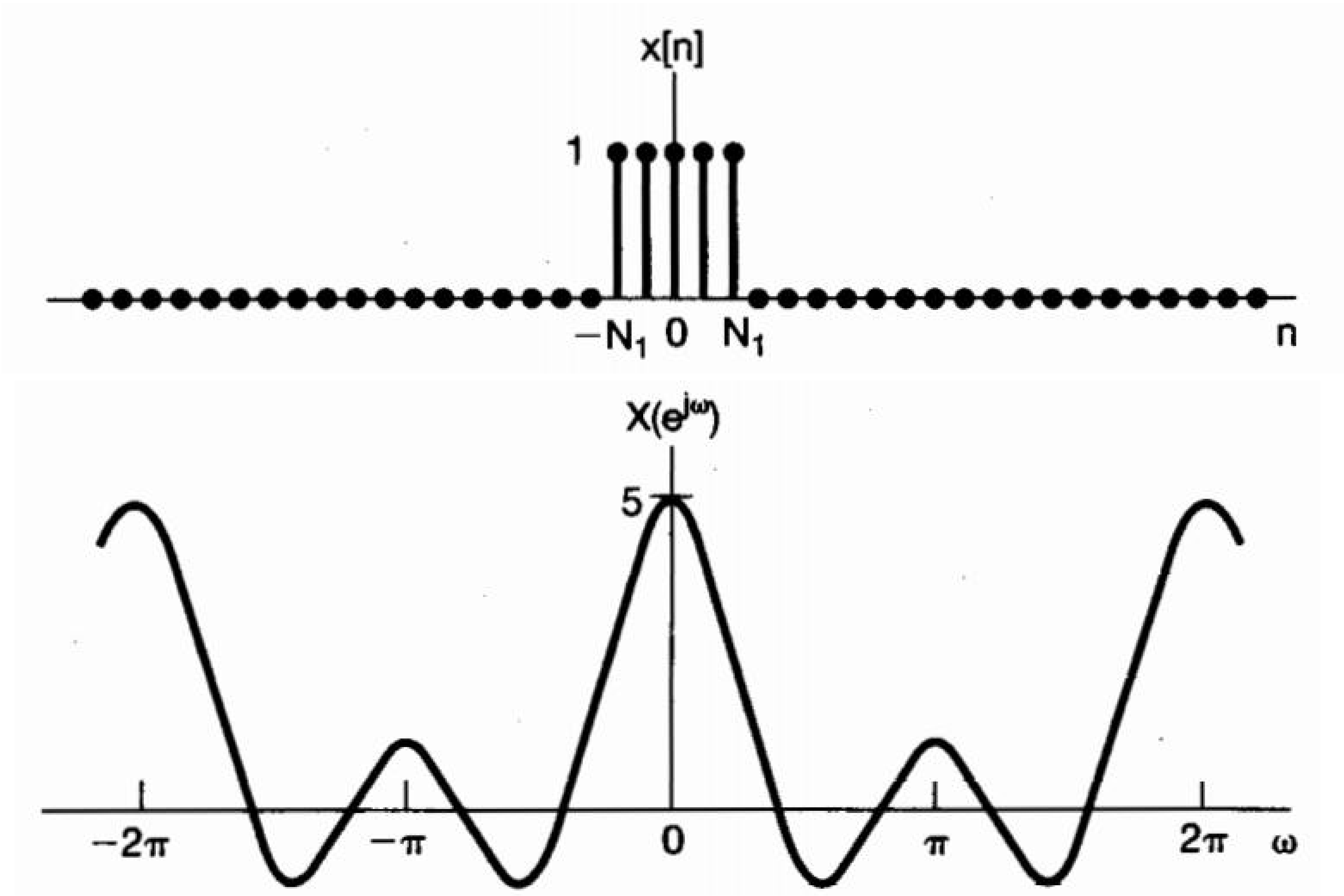
T. de Fourier de tiempo discreto

Ejemplo 2:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jwn} = \frac{sen w(N_1 + 1/2)}{sen(w/2)}$$

T. de Fourier de tiempo discreto



T. de Fourier de tiempo discreto

Para la convergencia de la ecuación de análisis se necesitan condiciones similares a la Transformada de Fourier:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right| < \infty$$

En la ecuación de síntesis por lo general no hay problemas de convergencia ya que se integra sobre un intervalo finito.

T. de Fourier de tiempo discreto

Algunas propiedades:

- Periodicidad: la TFTD siempre es periódica en w con período *2®*.
- Linealidad:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{jw})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{jw})$$

$$a\,x_1[n] + b\,x_2[n] \xleftrightarrow{F} a\,X_1(e^{jw}) + b\,X_2(e^{jw})$$

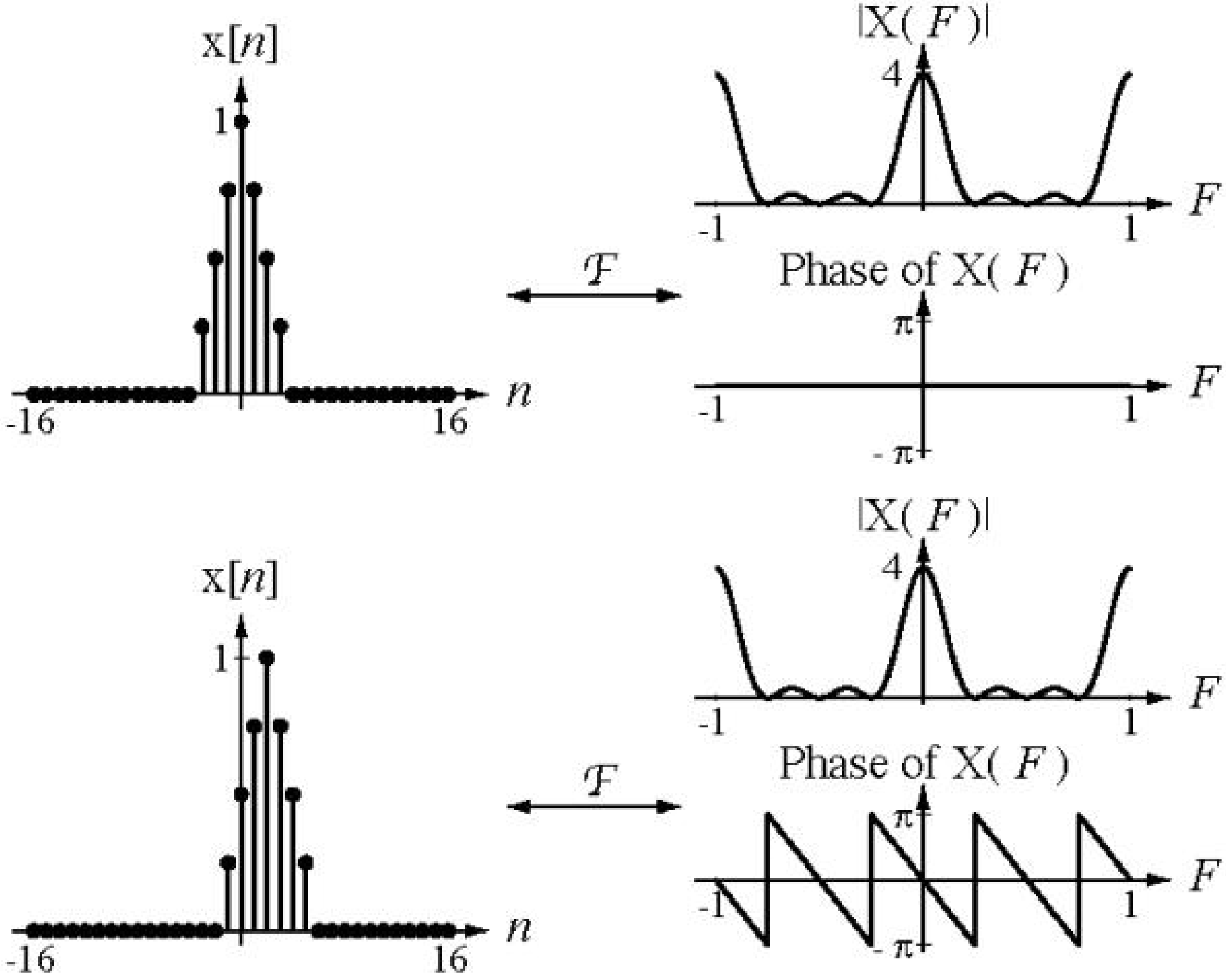
- Desplazamiento en t y en w

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jw})$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-jwn_0} X(e^{jw})$$

$$e^{jw_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(w-w_0)})$$

T. de Fourier de tiempo discreto



Transformada Discreta de Fourier

- Antiguamente se buscaban soluciones continuas para operar simbólicamente.
- Hoy en día se prefieren soluciones discretas y numéricas para operar con computadoras.
- Como vimos, la TFTD es una transformada de señales discretas pero sigue siendo continua.
- Podremos encontrar una transformada de señales discretas que también sea discreta?

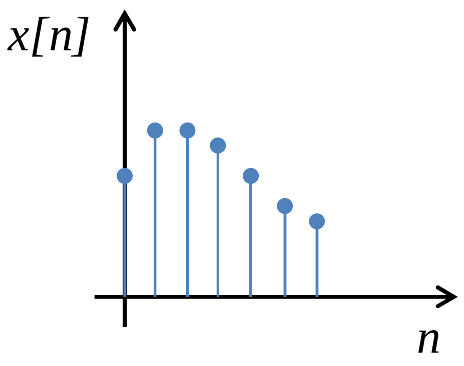
Transformada Discreta de Fourier

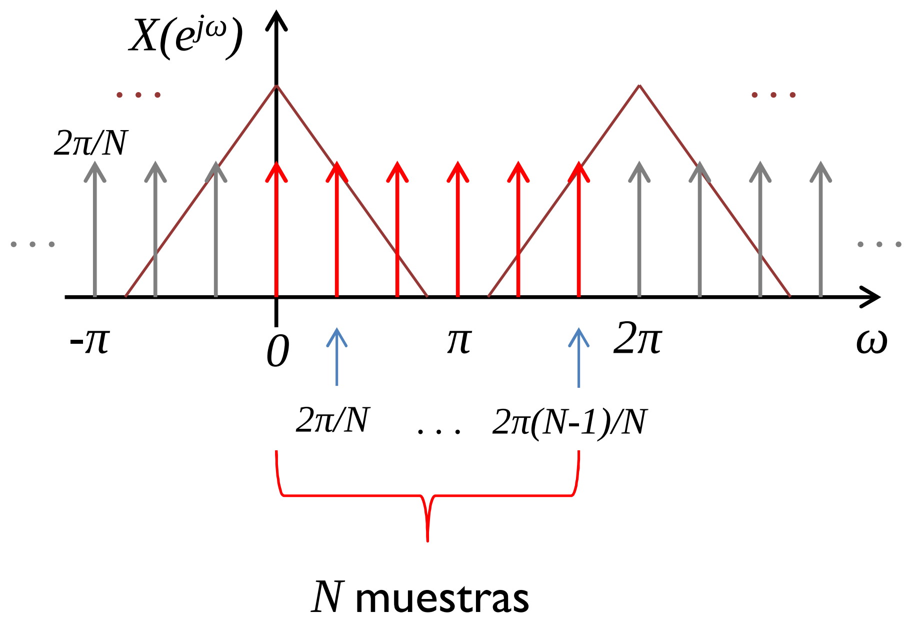
- Podremos utilizar algo como el teorema del muestreo pero en frecuencia?
- Ya que la TFTD es continua pero periódica (de periodo 2π), podremos muestrear un periodo (no hay más información).
- Bajo qué condiciones esas muestras serán suficientes para reconstruir mi señal discreta?

Transformada Discreta de Fourier

Muestreamos el espectro de $x[n]$, $X(e^{j\omega})$, con un tren de deltas y sólo me van a interesar las N muestras que caen en un periodo. Las demás se repiten.

Las N muestras quedan en las frecuencias $2\pi k/N$, con $k=0..N-1$.





Transformada Discreta de Fourier

Vamos a llamar $X_N(e^{j\omega})$ al espectro resultante de multiplicar al espectro de $x[n]$ por el tren de deltas:

$$X_N(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$$

Si queremos encontrar la señal $x_N[n]$ sabemos que es la convolución de $x[n]$ y de la antitransformada del tren de deltas:

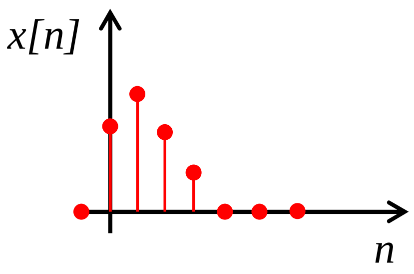
$$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{N}) \xrightarrow{F^{-1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$

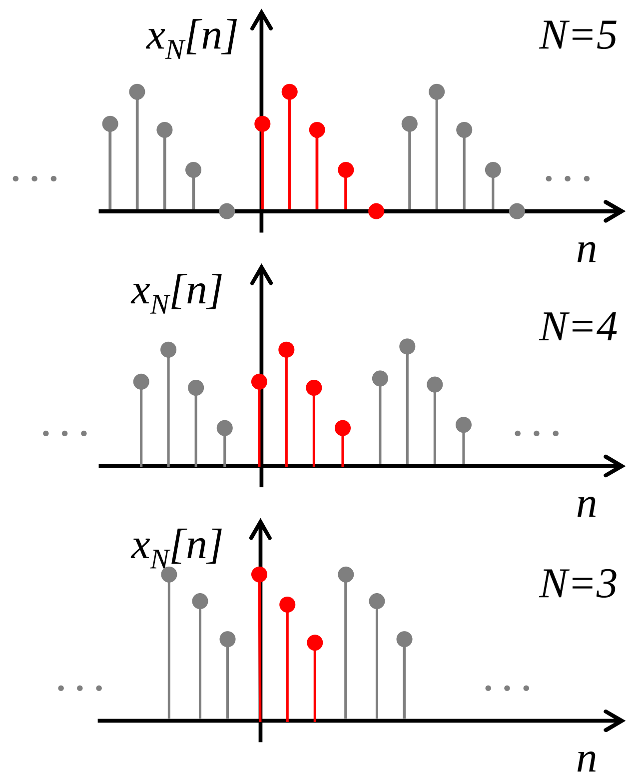
$$x_N[n] = x[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-kN]$$

Notar que la señal $x_N[n]$ es periódica de periodo N. *(Extensión periódica de $x[n]$).*

Transformada Discreta de Fourier

Bajo qué condiciones la extensión periódica $x_N[n]$ (resultante de muestrear el espectro y quedarme con N muestras) me permite obtener mi señal original $x[n]$?





$$x_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

Transformada Discreta de Fourier

$$x_N[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_N(e^{j\theta})\, e^{j\theta n}\, d\theta = \frac{1}{N}\int_{2\pi} X(e^{j\theta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k\frac{2\pi}{N})\, e^{j\theta n}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \int_{-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta(\theta - k\frac{2\pi}{N})\, e^{j\theta n}\, d\theta$$

$$= \boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

Ecuación I

Transformada Discreta de Fourier

Ahora necesitamos ir en el otro sentido para encontrar la transformación inversa.

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

TFTD evaluada en los puntos $\omega=2\pi k/N$

Haciendo el cambio de variables: $m = n - lN,\ 0 \leq n < N,\ -\infty < l < \infty$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-lN]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-lN)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \boxed{\sum_{n=0}^{N-1} x_N[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

Ecuación 2

Transformada Discreta de Fourier

Entonces podemos finalmente formalizar de la siguiente manera:

Sea $x[n]$ tal que $x[n]=0$ para $n<0$ y $n \geq N$ entonces $X[k]$ es la DFT de N puntos de $x[n]$ donde $X[k]$ es el conjunto de N valores tomados de la TFTD $X(e^{j2\pi k/N})$, con $0 \leq k < N$.

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$ *para $0 \leq n < N$ y 0 en otro caso* — Ecuación de síntesis

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ *para $0 \leq k < N$ y 0 en otro caso* — Ecuación de análisis

Transformada Discreta de Fourier

En MATLAB existen funciones para calcular la TDF y su inversa.

`X=fft(x)` calcula la TDF del vector x de N componentes y devuelve el vector X del mismo tamaño.

`x=ifft(X)` calcula la TDF inversa del vector X de N componentes y devuelve el vector x del mismo tamaño.

`fftshift(X)` reordena las componentes de frecuencia entre positivas y negativas. Lleva la componente de frecuencia 0 ($k=0$) al centro del espectro.

Ojo que MATLAB numera los índices de 1 a N !!

Transformada Discreta de Fourier

La TDF es periódica de período N.

$$X[k+N]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi(k+N)n/N}=\overbrace{e^{-j2\pi n}}^{1}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}=X[k]$$

Y puede representar señales aperiódicas como periódicas (cero fuera del intervalo *0..N-1* o extensión periódica).

Las demás propiedades son similares a las SFTC y TFTC (ver tabla siguiente) pero teniendo en cuenta el largo N de las secuencias.

Transformada Discreta de Fourier

Linearity	$\alpha\,x[n]+\beta\,y[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} \alpha\,X[k]+\beta\,Y[k]$
Time Shifting	$x[n-n_0] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} X[k]e^{-j2\pi k n_0/N}$
Frequency Shifting	$x[n]e^{j2\pi k_0 n/N} \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} X[k-k_0]$
Time Reversal	$x[-n]=x[N-n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} X[-k]=X[N-k]$
Conjugation	$x^*[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} X^*[-k]=X^*[N-k]$
⋮	$x^*[-n]=x^*[N-n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} X^*[k]$
Time Scaling	$z[n]=\begin{cases} x[n/m], & n/m \text{ an integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
⋮	$N \to mN,\quad Z[k]=X[k]$
Change of Period	$N \to qN,\ q$ a positive integer
⋮	$X_q[k]=\begin{cases} q\,X[k/q], & k/q \text{ an integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Multiplication-Convolution Duality	$x[n]y[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} (1/N)\,Y[k]\circledast X[k]$
⋮	$x[n]\circledast y[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} Y[k]X[k]$
⋮	where $x[n]\circledast y[n]=\sum_{m=\langle N\rangle} x[m]y[n-m]$
Parseval's Theorem	$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k=\langle N\rangle} \lvert X[k]\rvert^2$

Frecuencia contínua y discreta

Para TC: *x(t)=Acos(wt)* -ã<*t*<ã

w=2®f=2®/T

Para TD: *x[n]=Acos(* t *n)* -ã<*n*<ã

t = *2®F= 2®/N*

Los rangos en TC son:

-ã <*f* <ã -ã <*w* <ã

Los rangos en TD son:

-1/2 < F <1/2 -® < t <®

Muestreo de señales analógicas

Si muestreamos a $x_a(t)=cos(2®ft)$ cada T_s

$$x[n]=x_a(nT_s)=Acos(2®fnT_s)$$

Comparando $x[n]=Acos(2®Fn)$

$$F = fT_s = f/f_s$$

Se denomina frecuencia normalizada ó relativa.

Los 4 métodos de Fourier

Dominio de tiempo	Periódica	No periódica	
Continua	FS : Serie de Fourier $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}$ $X[k]=\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	FT: Transformada de Fourier $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	No periódica
Discreta	DTFS: Serie de Fourier en tiempo discreto $x[n]=\sum_{k=<N>} X[k]e^{jk\hat{\omega}_0 n}$ $X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\hat{\omega}_0 n}$	DTFT: Transformada de Fourier en tiempo discreto $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\hat{\omega}n}d\omega$ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$	Periódica
	Discreta	Continua	Dominio de la frecuencia

Los 4 métodos de Fourier