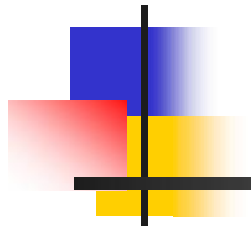


Análisis de Señales

Curso 2017



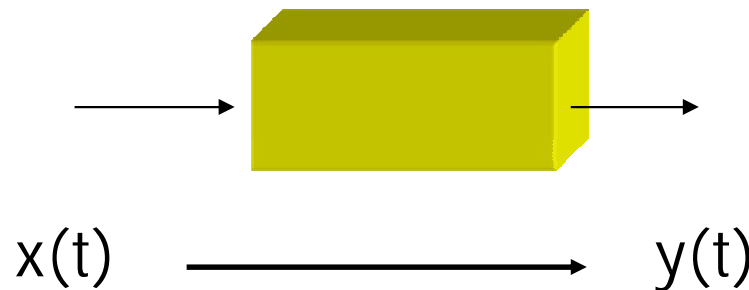
Sistemas Lineales



Sistemas

- Un sistema opera con señales en una ó más entradas para producir señales en una ó más salidas. Los representamos mediante diagrama en bloques

Señal de
entrada ó
excitación



Señal de
salida ó
respuesta



Sistema continuo y discreto

- Un sistema continuo transforma las señales de entrada continuas, en señales continuas de salida.

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

- Un sistema discreto transforma las señales discretas de entrada, en señales de tiempo discreto de salida.

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$



Propiedades de los sistemas

- Sistema estático ó sin memoria : si su salida en cualquier valor de la variable independiente (t ó n), depende a lo sumo de la entrada en ese mismo instante.

- ✓
$$y(t) = Ax(t)$$

- ✓
$$y[n] = x^2[n] + x[n]$$



Propiedades de los sistemas

- Sistema dinámico ó con memoria :
cuando su salida en un instante
depende del valor de la entrada en
otros instantes.
- ✓ $y(t) = 1/C \int x(t) dt$ tensión en un C
- ✓ $y[n] = x[n-1]$ retardo



Propiedades de los sistemas

- Linealidad : si una excitación $x_1[n]$ ocasiona una respuesta $y_1[n]$ y una excitación $x_2[n]$ provoca una respuesta $y_2[n]$, entonces una excitación

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

causará la respuesta

$$y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

donde a y b son ctes. arbitrarias



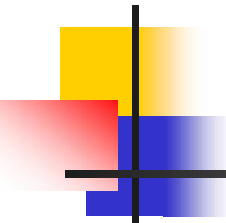
Propiedades de los sistemas

- Estas características de los sistemas lineales se llama **superposición**.
- Un sistema lineal además debe cumplir que para excitación 0, $x[n]=0$ deberá ser $y[n]=0$
- Para tiempo continuo
- $ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$



Propiedades de los sistemas

- Entonces un sistema es lineal si :
- la respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$
- la respuesta a $ax_1(t) + bx_2(t)$ es $ay_1(t) + by_2(t)$ donde a y b son ctes. complejas cualesquiera.
- Propiedad de aditividad
- Propiedad de escalamiento



Ej. $y(t) = tx(t)$ ¿es lineal?

✓ $x_1(t)$ $y_1(t) = tx_1(t)$

✓ $x_2(t)$ $y_2(t) = tx_2(t)$

✓ $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

✓ $y_3(t) = tx_3(t) = t(ax_1(t) + bx_2(t)) =$

✓ $atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ ←

✓ Concluimos que el sistema es lineal.



Ej. $y[n] = 2x[n] + 3$ ¿es lineal?

✓ $x_1[n]$ $y_1[n] = 2x_1[n] + 3$

✓ $x_2[n]$ $y_2[n] = 2x_2[n] + 3$

✓ $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$

✓ $y_3[n] = 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3$

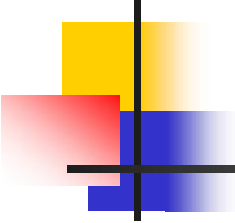
✓ $y_1[n] + y_2[n]$

✓ No es lineal. No cumple $y[n] = 0$ para $x[n] = 0$



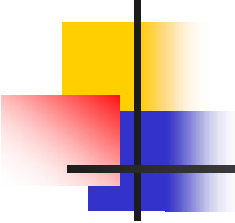
Invariancia en el tiempo

- Un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo no cambian con el tiempo.
- Si se aplica una señal $x[n]$ la salida es $y[n]$, si aplicamos $x[n-n_0]$ la salida será $y[n-n_0]$ pues el sistema es invariante en el tiempo. Un desplazamiento en tiempo de la señal de entrada produce un corrimiento en tiempo de la señal de salida.
- En TC $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$



Ej. $y[n] = 2x[n]$

- Si retardamos la secuencia de entrada k muestras
- $y_r[n] = 2x[n-k]$
- Ahora retardemos la salida original
- $y[n-k] = 2x[n-k]$ ←
- Como $y_r[n] = y[n-k]$ el sistema es invariante en el tiempo. ←



Ej. $y(t) = tx(t-3)$

- Si retardamos la entrada
- $y_r(t) = tx(t-3-t_0)$
- Si retardamos la salida original
- $y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-3-t_0)$
- $y_r(t) \neq y(t-t_0)$ ←
- El sistema no es invariante en el tiempo.



Causalidad

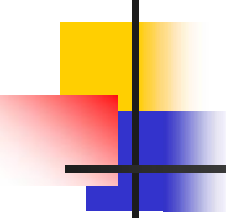
➤ Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado. También se le suele llamar sistema no anticipativo.

- $y[n]=x[n]-x[n-1]$ ←||| causal
- $y(t)=x(t-1)$ ←||| causal
- $y(t)=x(t-2)+x(t+4)$ ←||| no causal




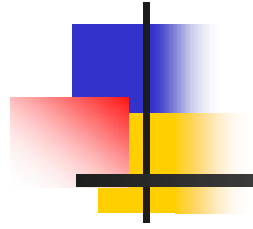
Estabilidad

- Definimos un sistema estable como aquél en el que cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Es decir
- $|x(t)| \leq M_x < \infty \implies |y(t)| \leq M_y < \infty$
- Si para alguna entrada acotada $x(t)$ la salida no está acotada (es infinita) el sistema no es estable (inestable).



Ej. $y[n] = nx[n-3]$

- Si consideramos que la entrada es $x[n] = u[n]$ que es acotada, la salida será una rampa que no está acotada
- $y[n] = nu[n-3]$ 
- En consecuencia el sistema no es estable

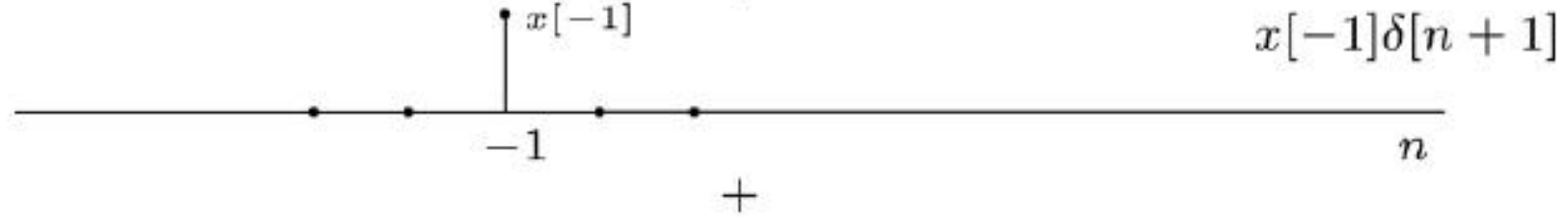
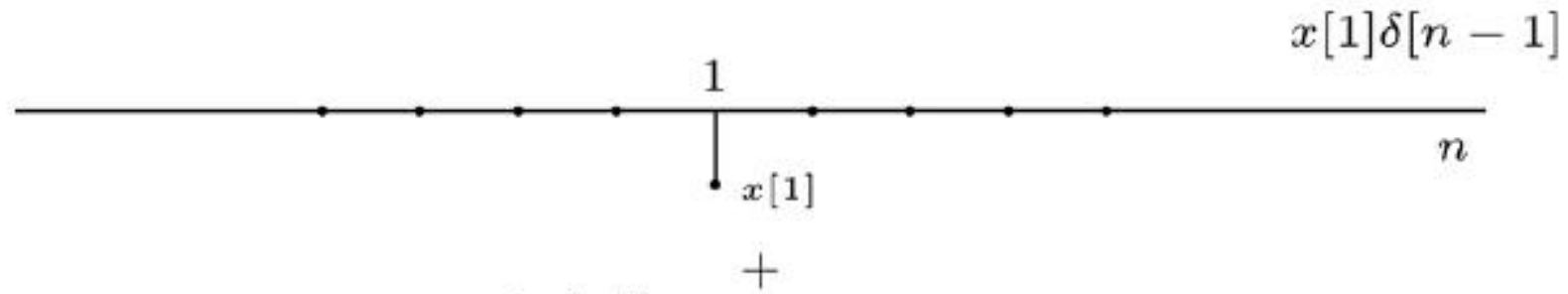
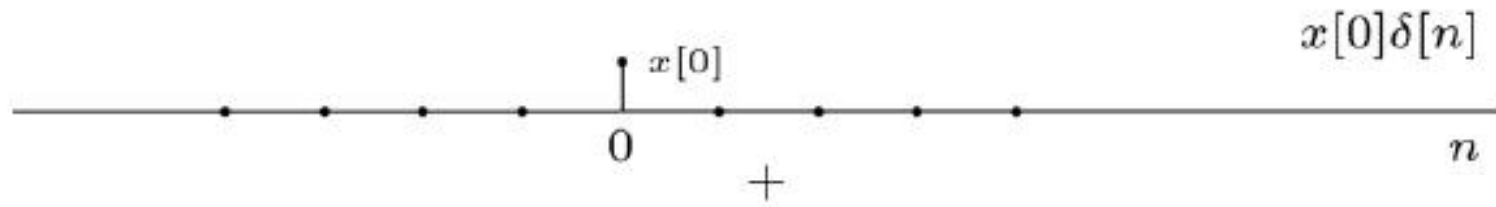
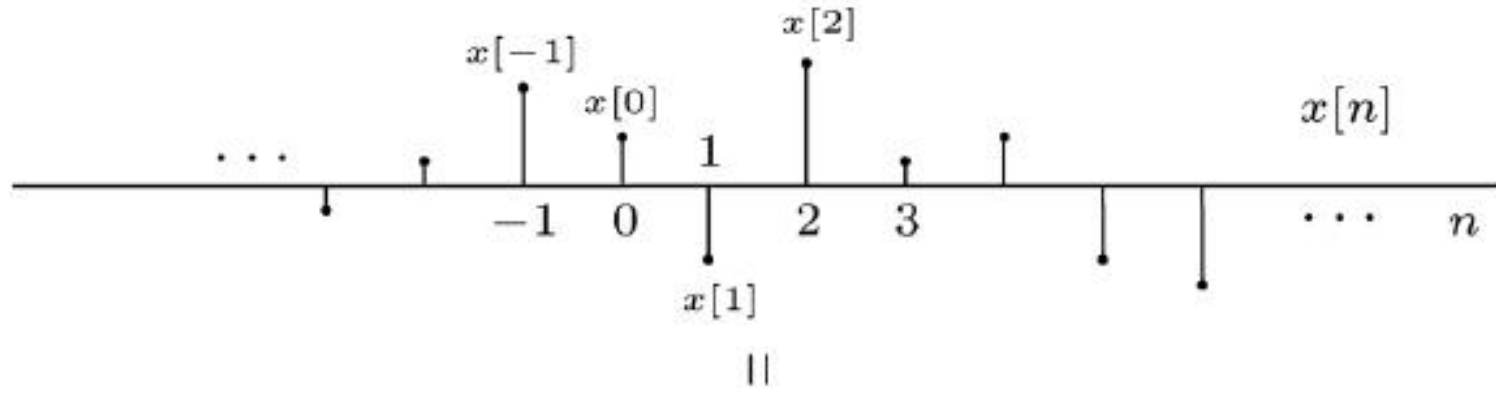


SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO (LIT)



Sistemas LIT discretos : la suma de convolución

- Nos preguntamos si existe un conjunto de señales tales que:
 - ✓ Podemos representar otras señales como combinación de estas funciones básicas
 - ✓ La respuesta a estas señales de los sistemas LTI será simple ?
- La idea es ver como cómo se puede utilizar el impulso unitario discreto para representar cualquier señal discreta.





TD muestras unitarias desplazadas

 Es decir

$$x[n] = \dots + x[-1]u[n+1] + x[0]u[n] + x[1]u[n+1] + \dots$$

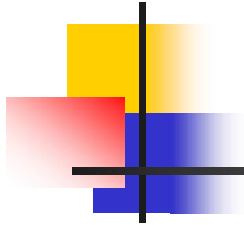
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k]$$



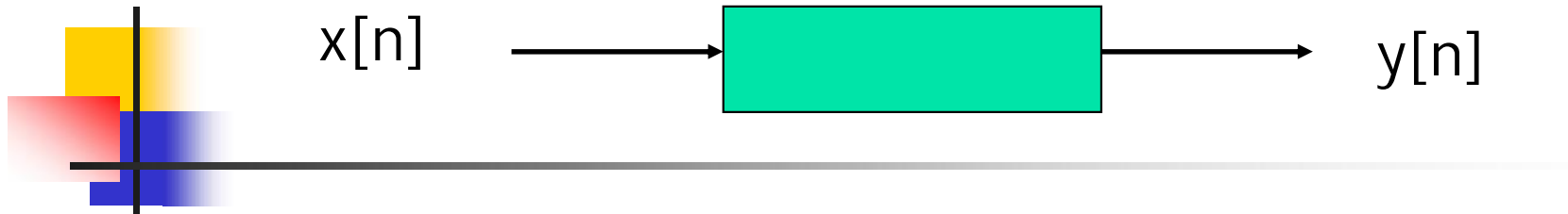
Coeficientes



Funciones básicas



- ✓ Representamos una secuencia arbitraria como combinación lineal de impulsos unitarios desplazados, con pesos $x[k]$.
- ✓ La ecuación anterior se la suele llamar **propiedad de selección** del impulso unitario discreto.
- ✓ $u[n - k]$ es distinta de cero para $n=k$ y selecciona el valor de la función $x[k]$ para $k=n$.

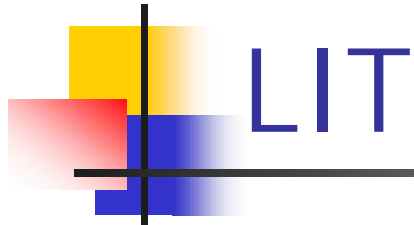


- Supongamos un sistema lineal y definamos como $h_k[n]$ a la respuesta del sistema a $u[n-k]$

- Por superposición

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

- De acuerdo a la expresión anterior: si conocemos la respuesta de un sistema lineal al conjunto de impulsos desplazados, podemos construir la respuesta a una entrada arbitraria.



- Supongamos un sistema IT (invariante en el tiempo), entonces :

$$\begin{array}{l} u[n] \quad \Rightarrow \quad h[n] \\ u[n-k] \quad \Rightarrow \quad h[n-k] \end{array}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Suma de convolución ó suma de superposición



Convolución

- La operación anterior la llamamos convolución de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$. De manera simbólica :

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Por tanto el sistema LIT queda completamente caracterizado por la respuesta a una sola señal, su respuesta al impulso unitario.



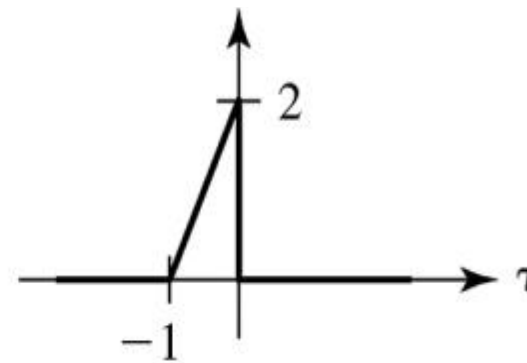
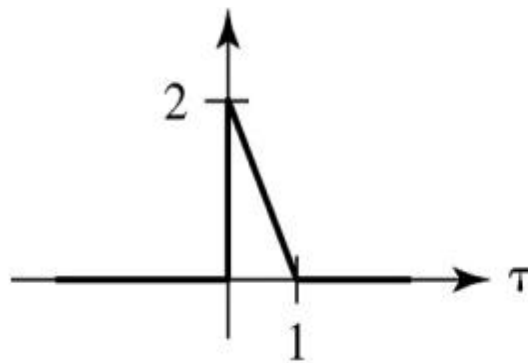
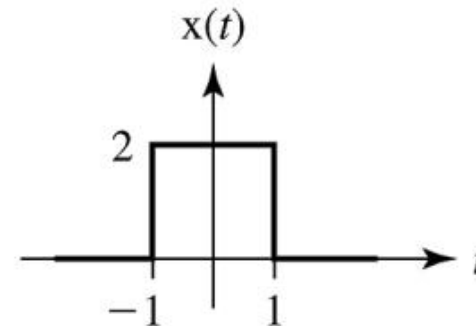
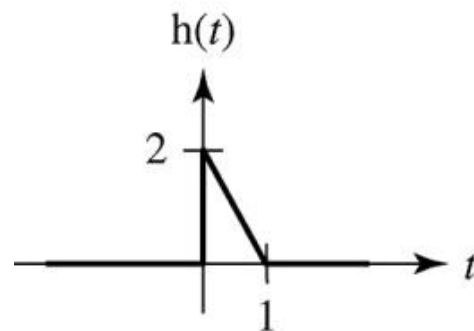
Para TC

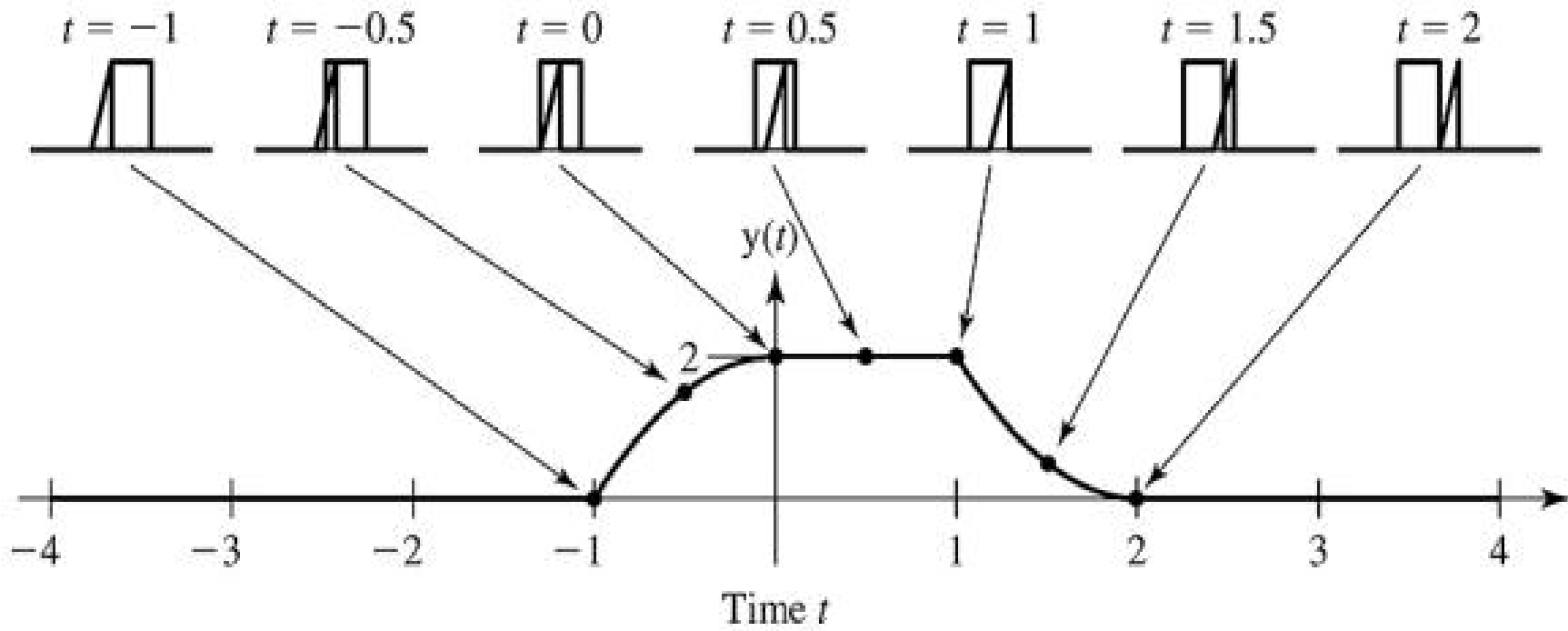
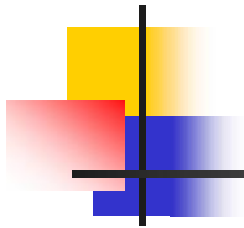
- Con un razonamiento análogo al caso de TD, podemos obtener una caracterización completa de un sistema LIT de TC en término de su respuesta al impulso unitario.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- Integral de convolución o de superposición

Interpretación gráfica de la convolución







Propiedades de los sistemas LIT

➤ Conmutativa

$$✓ x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$✓ x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

➤ Distributiva

$$✓ x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$✓ x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



Propiedades

➤ Asociativa

✓ $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$

✓ $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$



Sistemas LIT descritos por ecuaciones diferenciales

➤ Son aquellos sistemas para los cuales la salida y la entrada están relacionadas por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

➤ Ej.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$



Solución

- La solución consistirá de la suma de la solución particular y una solución a la homogénea (entrada cero).
- A la homogénea se la llama respuesta natural del sistema.
- Es necesaria por las condiciones iniciales.



Solución

- En general, una ecuación diferencial de orden N :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k}$$

- Para el caso que $N=0$

$$y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k}$$

- $y(t)$ es una función explícita.



Sistemas LIT descritos por ecuaciones de diferencias

➤ Es la contraparte de TD.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad \text{Recursiva}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k] \quad \text{No recursiva}$$