Análisis de Señales-Curso 2020

Procesos Aleatorios
Correlación y Densidad Espectral
Ruido

Energía de la señal(1)

- Debido a los distintos tipos de señales físicas que actúan en los sistemas, se definió el término energía de la señal, para TC:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Si x(t) es una tensión, las unidades son V^2.S, falta dividir por R para ser la energía. Es decir la *energía de la señal* es proporcional a la *energía física*.

Energía de la señal(2)

- De acuerdo a lo anterior la energía de la señal es proporcional a la energía real y la constante de proporcionalidad es R. Para un tipo diferente de señal, la cte. de proporcionalidad será diferente.
- Para el caso discreto

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Potencia de la señal(1)

- En muchas señales ni la integral ni la sumatoria anterior convergen, la energía de la señal es infinita pues no está limitada en tiempo.
- En estas señales es conveniente tratar con la potencia promedio de la señal en vez de con la energía

Potencia de la señal(2)

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$ Tiempo continuo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$ Tiempo discreto

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$ Señales periódicas

Señales de Energía → Energía finita

Señales de Potencia → Potencia promedio finita (no nula)

Señales de Energía → Potencia promedio nula

Señales de Potencia → Energía total infinita

No periódicas → Señales de Energía

Aleatorias y periódicas → Señales de Potencia

Correlación

- Señales de Energía
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ y\ (t+\tau)dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y\ [n+m]$$

Correlación

- Señales de Potencia
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x(t)\ y\ (t+\tau)dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, y\ [n+m]$$

Autocorrelación

- Señal de Energía

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x\,(t+\tau)dt$$

$$R_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \qquad R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

Autocorrelación

- Señal de Potencia

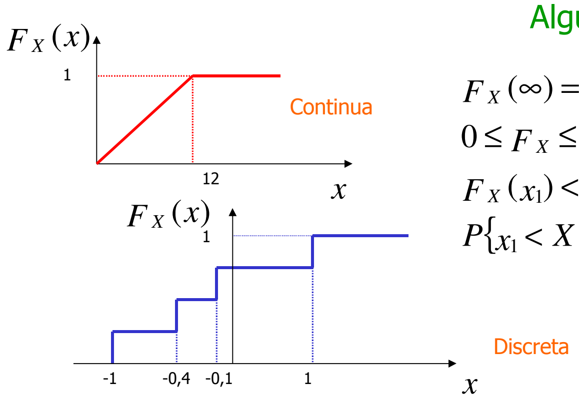
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x^2(t)dt \qquad R_{xx}[0] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^2[n]$$

Función Distribución

$$F_x(x_1) = P\{X \leq x_1\}$$



Algunas propiedades

$$F_X(\infty) = 1$$

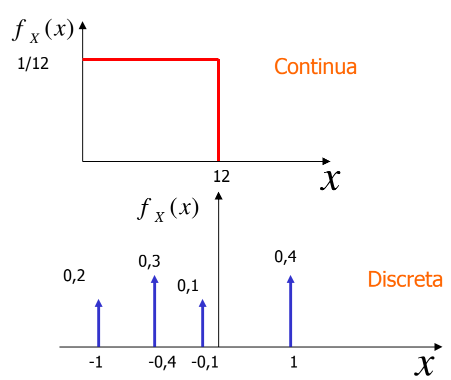
$$0 \leq F_X \leq 1$$

$$F_X(x_1) < F_X(x_2) \;\; con \; x_1 < x_2$$

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Función densidad

$$f_x(x) = d\,F_x(x)/d\,x$$



Algunas propiedades

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

Operaciones de una variable aleatoria

- Valor esperado

$$E[x]=\overline{X}=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx \quad \textit{variable aleatoria continua}$$

$$E[x]=\sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \quad \textit{variable aleatoria discreta}$$

- Momentos
  - Momentos alrededor del origen

$$m_n=E[x^n]=\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$$

m_0=1 Area bajo la curva

m_1= $\overline{X}$

- Momentos centrales

$$\mu_n=E[\left(X-\overline{X}\right)^n]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\overline{X}\right)^n f_X(x)dx$$

μ_0=1 Area bajo la curva μ_1=0

- Varianza

$$\sigma_X^2=E[\left(X-\overline{X}\right)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(X-\overline{X}\right)^2 f_X(x)dx=$$

$$=E[(X^2-2X\overline{X}+\overline{X}^2)]$$

$$=E[X^2]-\overline{X}^2=m_2-m_1^2$$

Función distribución y densidad conjunta

- Las probabilidades de 2 eventos (c/u)

$$A = \{X \leq x\} \quad y \quad B = \{Y \leq y\}$$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad y \quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

- Definimos el evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$ Función distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$ Función densidad conjunta

Independencia estadística

- Dos eventos x e y son estadísticamente independientes si:

$$P\{X \leq x; Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

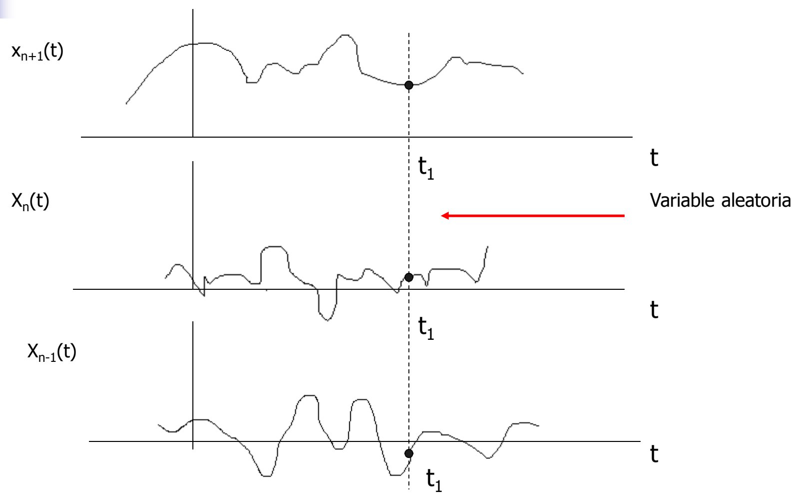
Motivación

- Encontramos señales aleatorias
- Deseadas (comunicación bits)
- No deseadas (ruido)
- Deseamos trabajar en el tiempo
- ¿ Cómo describimos estas señales en el tiempo ?

Procesos aleatorios.Concepto

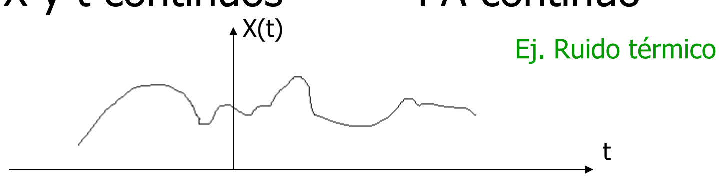
- Una variable aleatoria X función de las salidas s de un experimento.
- Ahora función de s y t   x(t,s)
- La familia de funciones X(t,s) es llamado un proceso aleatorio.
- Si t es fijo (t_1) y s variable, tenemos una variable aleatoria.

Proceso aleatorio

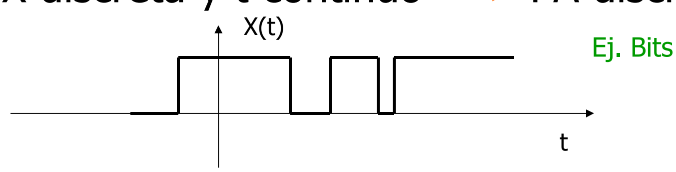


Clasificación de PA (1)

- X y t contínuos ➡ PA contínuo

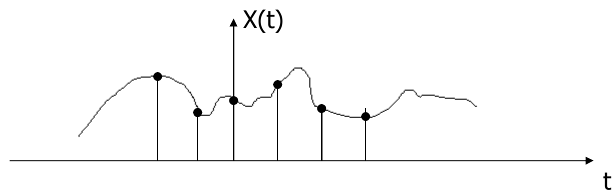


- X discreta y t contínuo ➡ PA discreto



Clasificación de PA (2)

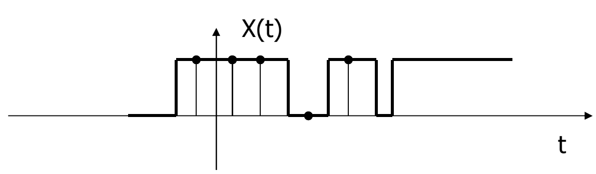
- X continuo y t discreto ➡ secuencia aleatoria contínua



Ej. Ruido térmico muestreado

Clasificación de PA (3)

- X discreto y t discreto ➡ secuencia aleatoria discreta



Ej. Bits muestreados

Procesos determinísticos y no determinísticos

- ✓ Si los valores futuros de cualquier muestra del PA no se pueden "predecir" de sus valores pasados, entonces el PA es llamado no-determinístico
- ✓ En cambio cuando los valores futuros se pueden predecir de sus valores pasados entonces el PA es llamado determinístico.

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$
$$A, \omega_0, ó\ \theta\ \ pueden\, ser\, VA$$

Funciones densidad y distribución

$$F_x(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$
$$F_x(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

$$f_x(x_1;t_1) = d\,F_x(x_1;t_1)/d\,x_1$$
$$f_x(x_1,x_2;t_1,t_2) = \partial\,F_x(x_1,x_2;t_1,t_2)/(\partial\,x_1 \partial\,x_2)$$

PA independiente
PA estacionario

- En un PA si fijamos el tiempo, tenemos una VA. Esta tiene propiedades estadísticas: valor medio, varianza,etc.
- Si hacemos esto para N t distintos obtenemos N VA con sus propiedades estadísticas.
- Decimos que el PA es estacionario si sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

PA independiente

- Dos PA X(t) e Y(t) son estadísticamente independientes si:

$$f_{X,Y}(x_1,t_1;y_1,t_1^{'}) = f_X(x_1,t_1)\,f_Y(y_1,t_1^{'})$$

Proceso Estacionario de primer orden

$$f_X(x_1;t_1) = f_X(x_1;t_1+\Delta)$$

Para cualquier t_1 y Δ.

En consecuencia $f_X(x_1;t_1)$ es independiente de t_1

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante}$$

PE de segundo orden

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+\Delta,t_2+\Delta)$$

Para todo t_1, t_2 y Δ. Consecuencia de lo anterior

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \qquad \tau = t_1 - t_2$$

$$R_{XX}(t_1,t_1+\tau) = E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

PE en sentido amplio

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante}$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Un PE de orden 2 es estacionario en sentido amplio.

Autocorrelación

- Si el proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

- Y tiene las siguientes propiedades

Propiedades

$$(1)\ |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$

$$(2)\ R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$

$$(3)\ R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$$

Otras propiedades

$$(4)\ E[X(t)] = \overline{X} \neq 0$$

➡ tiene un término cte = $\overline{X}^2$

$(5)\ X(t)$ Si tiene una componente periódica

➡ $R_{XX}(\tau)$ también tiene una componente periódica con el mismo período

$(6)\ X(t)$ Si es ergódico, valor medio 0 y sin componente periódica

➡ $\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = 0$

Ejemplo

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

$$E[X(t)] = \overline{X} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = 29 - 25 = 4$$

Promedios en el tiempo y Ergodicidad

- Definimos

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

- Consideremos los siguientes promedios

$$\overline{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Promedios en el tiempo y Ergodicidad

- Para una muestra del proceso, las dos integrales dan 2 números como resultado. Si todas las funciones del proceso son consideradas, entonces
- $\mathrm{R}_{xx}(\tau)$ $\overline{x}$ son va y

$$E[\overline{x}] = \overline{X}$$

$$E[\mathrm{R}_{xx}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

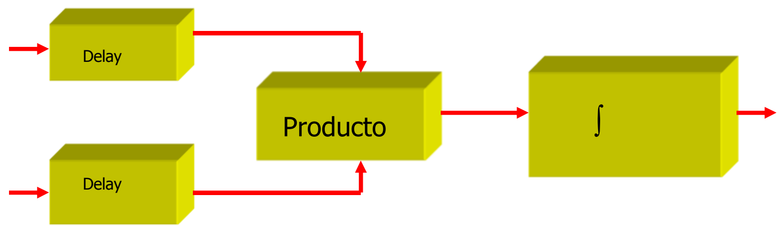
Ergodicidad

$$\overline{x} = \overline{X}$$

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Promedios temporales iguales a promedios estadísticos

Medida de funciones de correlación



Motivación

- Vimos Correlación
- Antes trabajamos en t y f para señales determinísticas y sis. lineales
- Ahora con señales aleatorias
- ¿ Dominio de f ?
- Propiedades espectrales $\longrightarrow$ TF para señales determinísticas

Densidad Espectral de Potencia

- Para un pa X(t), siendo

$$x_T(t)\begin{cases} x(t) & -T<t<T \\ 0 & \text{en otra parte}\end{cases}$$

Satisface $\int_{-T}^{T} |x_T(t)|dt < \infty$ con T finito, tiene TF y aplicando el T. de Parseval

$$E(T)=\int_{-T}^{T} x_T^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|X_T(w)\right|^2 dw$$

DEP(2)

- Dividiendo por 2T

$$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|X_T(w)\right|^2}{2T} dw$$

- Haciendo T $\longrightarrow \infty$ y tomando valor esperado

$$P_{XX}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X^2(t)]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{\left|X_T(w)\right|^2}{2T} dw$$

DEP(3)

- Finalmente definimos la DEP

$$S_{XX}(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\left|X_T(w)\right|^2]}{2T}$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)dw$$

Propiedades

(1) $S_{XX}(w) \geq 0$

(2) $S_{XX}(-w) = S_{XX}(w) \qquad X(t) \quad real$

(3) $S_{XX}(w) \quad es\ real$

(4) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)dw = A\{E[X^2(t)]\}$

Relación entre Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia

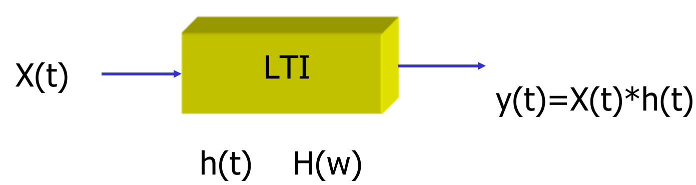
$$S_{XX}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\, e^{-jw\tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)\, e^{jw\tau}\, dw$$

$$o \quad R_{XX}(\tau) \leftrightarrow S_{XX}(w)$$

Sistemas lineales con entradas aleatorias

x(t) estacionario en sentido amplio



$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t) * h(t)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(t)$$

$$R_{YY}(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[\int_{-\infty}^{\infty}h(u)X(t-u)du\int_{-\infty}^{\infty}h(v)X(t+\tau-v)dv]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t-u)X(t+\tau-v)]h(u)h(v)dudv$$

$$R_{YY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv$$

$$R_{YY}(\tau)=R_{XX}(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

$$S_{YY}(f)=\left|H(f)\right|^{2}S_{XX}(f)$$

DEP de la respuesta

$$S_{YY}(w)=S_{XX}(w)\left|H(w)\right|^{2}$$

Ruido Blanco

- Tiene todas las f, como la luz blanca, es estacionario en sentido amplio :

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} = K = cte$$

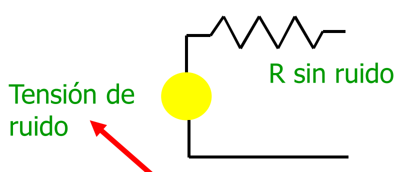
$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- No es realizable

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(f)df = \infty$$

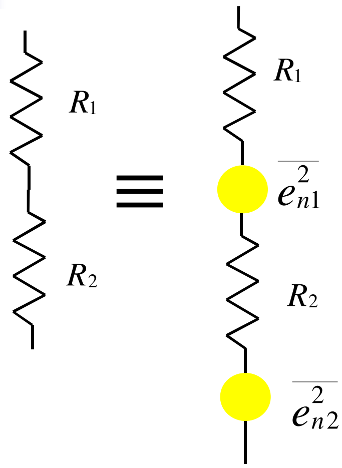
Ruido térmico

- Debido a la agitación térmica
- Resistencia "ruidosa"
- Su circuito equivalente



$$\overline{e_n^2} = \frac{2KT\Delta f}{\pi}R$$

Ej. 2 R en serie



$$R_{equi} = R_1 + R_2$$

$$\overline{e_n^2} = \overline{e_{n1}^2} + \overline{e_{n2}^2}$$

$$2K\,[T_1 R_1 + T_2 R_2]\,\Lambda f = 2K[T_{equi}\,(R_1 + R_2)\Lambda f$$

$$T_{equiv} = \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2}{R_1 + R_2}$$

Temperatura equivalente de ruido