# Análisis de Señales-Curso 2020

Serie de Fourier en TD
Transformada de Fourier en TD
Transformada discreta de Fourier
Transformada rápida de Fourier (FFT)

## Señales periódicas en TD:Series de Fourier

- Si x(t) es periódica y cumple las condiciones de Dirichlet.., su desarrollo en SFTC es :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk w_0 t}$$

- Al igual que en TC una señal x[n] discreta y periódica puede representarse como una superposición de exponenciales complejas discretas con frecuencias múltiplos de la fundamental.

- Si la señal en TD es periódica x[n]=x[n+N], su representación mediante la SF es:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\Omega_0 n}$$

- Donde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ es la frecuencia "digital" fundamental de la señal periódica, y la frecuencia de la componente k-ésima es $k\Omega_0$

- Ahora podemos preguntarnos: ¿cuántos términos deben considerarse en la suma para el caso de una secuencia discreta periódica de período N?
- Recordando la propiedad de las exponenciales complejas discretas

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jN\Omega_0 n}\, e^{jk\Omega_0 n} = e^{j\cancel{N}\frac{2\pi}{\cancel{N}}n}\, e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$$

- Como habíamos visto antes exponenciales complejas con f ≠ no son todas diferentes como ocurría en TC. Sólo hay N exponenciales complejas distintas (empiezan a repetirse).

- En consecuencia se puede escribir la SF de una señal periódica discreta :

$$x[n] = \sum_{k=<N>} C_k \, e^{j\Omega kn}$$

## SFTC ➡ SFTD

- En TC:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

- Para discretizar x(t) tomamos N muestras durante un período a intervalos $T_S \Rightarrow N.T_S = T$
- Los coeficientes serán :

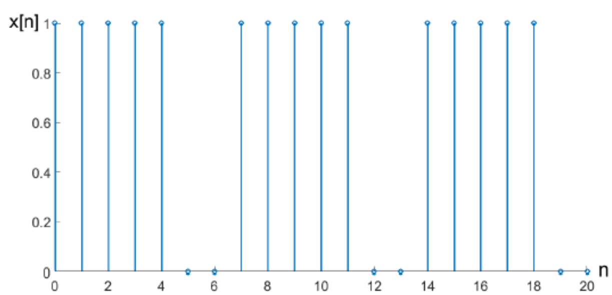
$$C_k = \frac{1}{N T_S} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi k f_0 n T_s} . T_S = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi k f_0 n T_s}$$

- La representación en SFTD será :

$$x[n] = \sum_{k=<N>} C_k \, e^{j\Omega kn}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-jk\Omega n}$$

# Ejemplo




$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6} x[n]e^{-jk(2\pi/7)n}$$

$$a_k = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk(2\pi/7)n}$$

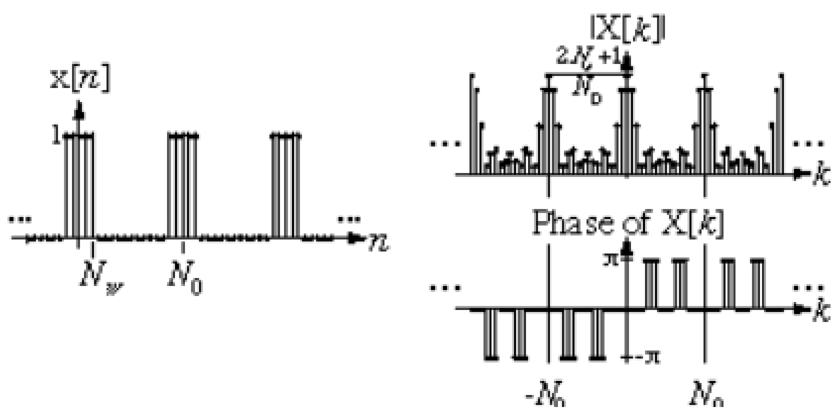
*La función tiene valores* $\neq 0$
*para* $0 \leq n \leq 4$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

$$a_k = \frac{1}{7}\frac{\left(1-e^{-jk(2\pi/7)5}\right)}{\left(1-e^{-jk(2\pi/7)}\right)} = \frac{1}{7}\frac{\left(e^{jk5\pi/7}-e^{-jk5\pi/7}\right)e^{-jk5\pi/7}}{\left(e^{jk\pi/7}-e^{-jk\pi/7}\right)e^{-jk\pi/7}}$$

$$a_k = \frac{1}{7}e^{-jk4\pi/7}\frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)}$$

$$x[n] = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)}e^{jk2\pi(n-2)/7}$$

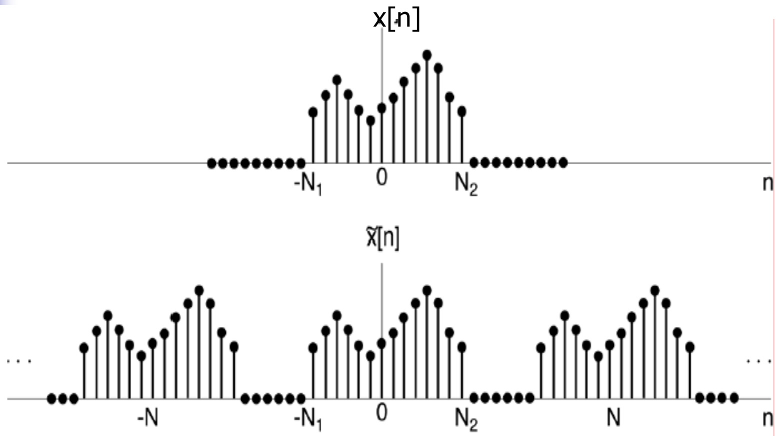


## TFTD

- Derivación : igual que en TC

- x[n] – aperiódica de duración finita
- $\tilde{x}[n]$ – periódica de período N
- $\tilde{x}[n]$ = x[n] en N

## Derivación (continuación)



## Derivación (continuación)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} C_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

*Escribimos la SFTD para la señal periódica*

*Recordando* $x[n] = \lim_{N\to\infty} \{\tilde{x}[n]\}$

## Si definimos X(e^jΩ)

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$C_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

- para N $\longrightarrow$ $\infty$
- $\tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$
- $\Omega_0 \longrightarrow 0$
- $\sum \Omega_0 \longrightarrow \int d\Omega$

## Par TF en TD

También llamada espectro de x[n] ya que proporciona información de amplitud y fase en frecuencia de las exponenciales complejas que componen x[n].

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

TFTD – Ecuación de análisis

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

TFITD – Ecuación de síntesis

Expresa que x[n] es una sumatoria continua de exponenciales complejas calculadas en el intervalo 2π

# Convergencia

Ecuación de síntesis: ninguna, ya que se integra sobre un intervalo finito

Ecuación de análisis: son necesarias condiciones análogas a la TF en tiempo continuo, por ejemplo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$ — Energía finita

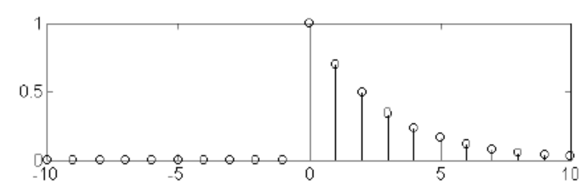
or

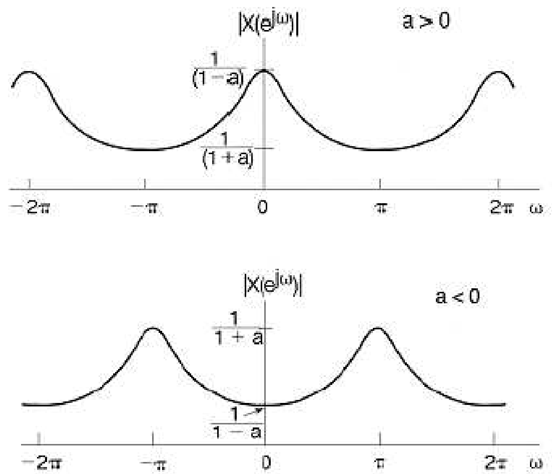
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$ — Completamente sumable

# Ejemplo

$$x[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\,e^{-jw})^n = \frac{1}{1 - a\,e^{-jw}}$$

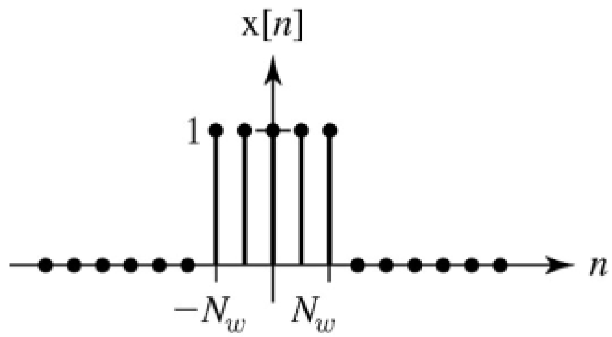


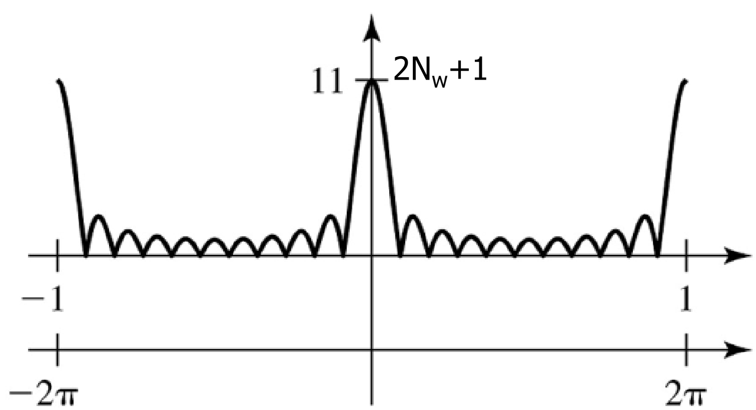



## Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_w \\ 0 & |n| > N_w \end{cases}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_w}^{N_w} e^{-jwn} = \frac{sen w(N_w + 1/2)}{sen(w/2)}$$


x[n]
1
n
−N_w
N_w


11
2N_w+1
−1
1
−2π
2π

## Propiedades de la TFTD

- Periodicidad: la TFTD siempre es periódica en w con período 2π.

$$X(e^{j(w+2\pi)}) = X(e^{jw})$$

- Linealidad

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{jw})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{jw})$$

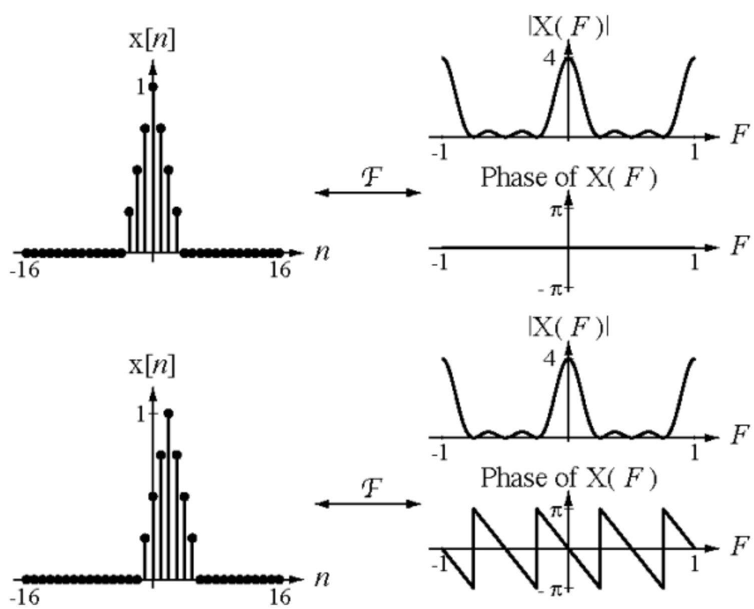
$$a\,x_1[n] + b\,x_2[n] \xleftrightarrow{F} a\,X_1(e^{jw}) + b\,X_2(e^{jw})$$

- Desplazamiento en t y f

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jw})$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-jwn_0} X(e^{jw})$$

$$e^{jw_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(w-w_0)})$$



## Frecuencia contínua y discreta

- Para tc  $x_a(t)=A\cos(wt)$  $-\infty<t<\infty$
- $w=2\pi f= 2\pi/T$

- Para td  $x[n]=A\cos[\Omega n]$  $-\infty<n<\infty$
- $\Omega= 2\pi F= 2\pi/N$

## Muestreo de señales analógicas

- Si muestreamos al cos cada $T_m$
- $\Rightarrow$ $x(n)=x_a(nT_m)=A\cos(2\pi fnT_m)$
- Comparando $x(n)=A\cos(2\pi Fn)$
- $\Rightarrow$ $F=fT_m=f/f_m$
- Se denomina frecuencia normalizada ó relativa.

## Recordando

- Las sinusoides en td cuyas f están separadas por un múltiplo entero de $2\pi$ son idénticas. Ej.
- $\cos[(w+ 2\pi )n]=\cos(wn+ 2\pi n)=$
  $\cos(wn)$
- Por tanto existen señales discretas iguales con f distintas. Es decir cualquier secuencia con $|\Omega|>\pi$ tiene una secuencia idéntica en $|\Omega|<\pi$

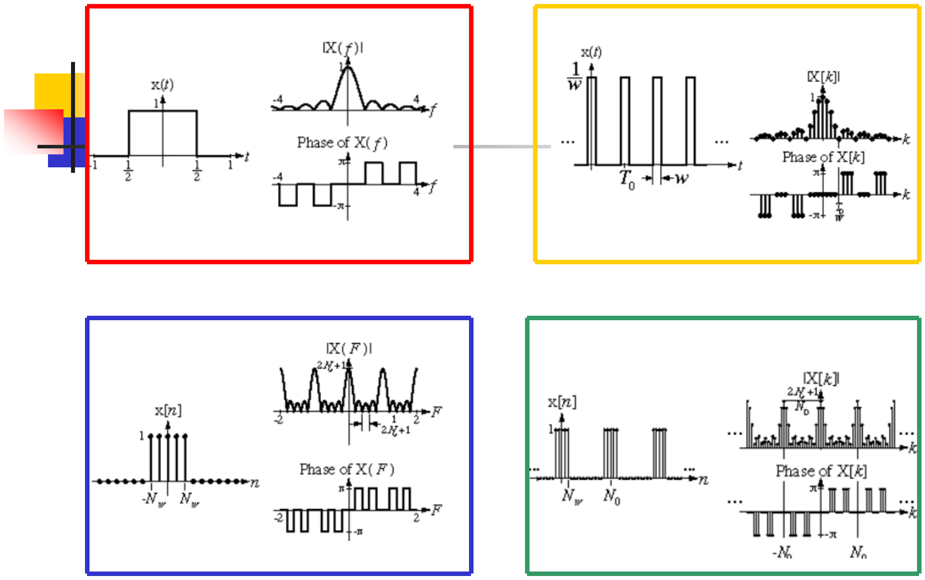
## Resumiendo

- Los rangos analógicos son
- $-\infty<f<\infty$ $-\infty<w<\infty$
- Los rangos digitales son
- $-1/2<F<1/2$ $-\pi<\Omega< \pi$

# Los 4 métodos de Fourier

| | Frec. discreta | Frec. continua |
|---|---|---|
| TC | SFTC | TFTC |
| TD | SFTD | TFTD |

| Dominio de tiempo | Periódica | No periódica | |
|---|---|---|---|
| Continua | FS : Serie de Fourier<br>$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]e^{jk\omega_0 t}$<br>$X[k]=\frac{1}{T}\int_{<T>}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ | FT: Transformada de Fourier<br>$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$<br>$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ | No periódica |
| Discreta | DTFS: Serie de Fourier en tiempo discreto<br>$x[n]=\sum_{k=<N>}X[k]e^{jk\hat{\omega}_0 n}$<br>$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\hat{\omega}_0 n}$ | DTFT: Transformada de Fourier en tiempo discreto<br>$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\hat{\omega}n}d\omega$<br>$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$ | Periódica |
| | Discreta | Continua | Dominio de la frecuencia |




# Dualidad : SFTC y TFTD

- Tenemos una señal periódica contínua $x_p(t)$. Mediante las SF (obtengo los coeficientes) transformamos esta señal periódica contínua en una función aperiódica y discreta (los coeficientes espectrales separados 1/T).
- De forma dual, podemos intercambiar tiempo y frecuencia, y tenemos una señal aperiódica discreta en el tiempo (muestreada a $1/f_m$) y la transformamos en una señal periódica, (período $f_m$) contínua en f mediante TFTD.

# Transformada de Fourier Discreta (TFD)

- Sin embargo a la hora de realizar operaciones tenemos los mismos problemas que en las SF ya que seguimos tratando con señales contínuas ó con serie de datos de longitud infinita. La "electrónica" nos obliga a trabajar con un número finito de datos discretos que además tienen una precisión finita.
- Se trata de conseguir discretizar las variables contínuas y de limitar el número de muestras en los dos dominios : temporal y frecuencial.

# De la TFTD → TFD

- Tenemos una señal x[n] limitada a N muestras con un período de muestreo $t_s$
- Se define la TFTD :

$$X_p(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n f t_s}$$

- $X_p(f)$ es periódica con período $t_s$. Muestreamos la señal N veces sobre un período por tanto $X_T[k]$ (sustituir f por $k/Nt_s$)

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi n k t_s}{N t_s}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi n k}{N}} \qquad k = 0,1 \ldots N-1$$

- Podemos interpretar los resultados de la TFD de una secuencia x[n] desde dos puntos de vista :
  - Como coeficientes espectrales (SF) de una señal periódica discreta cuyos muestreos coinciden con la secuencia x[n].
  - Como el espectro de una señal aperiódica discreta cuyos muestreos corresponden a la secuencia x[n].
- La TFD es una aproximación al espectro de la señal analógica original.

# ¿Cómo hacer TFD?

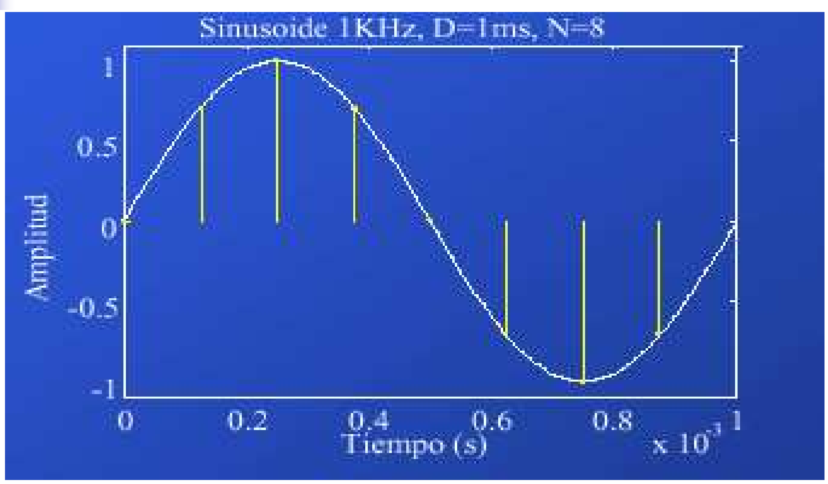
- Elegir el intervalo de muestreo $t_s$, de tal manera que se cumpla el T. de Muestreo.
- Crear una expansión periódica $x_p(t)$ de x(t) con período D (tiempo total de muestreo).
- Tomar N muestras de $x_p(t)$ y calcular TFD.

## Resumen de Series y Transformadas de Fourier

- Series de Fourier
  - Señal Continua Periódica (periodo *T*), Espectro Discreto Aperiódico (intervalo de discretización *1/T*)
- Transformada de Fourier
  - Señal Continua Aperiódica, Espectro Continuo Aperiódico.
- Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo
  - Señal Discreta Aperiódica (intervalo de discretización $t_s$), Espectro Continuo Periódico (periodo $1/t_s$)
- Transformada Discreta de Fourier
  - Señal Discreta Periódica (intervalo de discretización $t_s$, periodo *T*), Espectro Discreto (intervalo de discretización *1/T*)

Ej.

$X(t)=sen(2\pi f_0 t)$; $f_0=1kHz$ D=1mSeg N=8



- x[n]={0, 0.707, 1, 0.707, 0, -0.707, -1, -0.707}

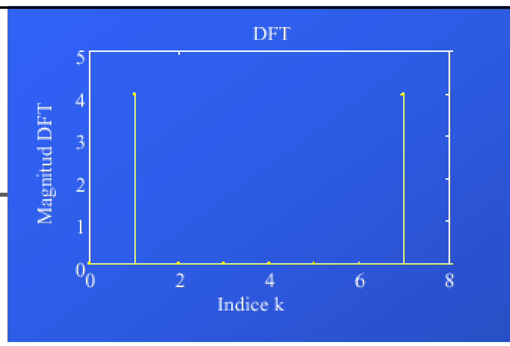
$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(nk/N)}$$

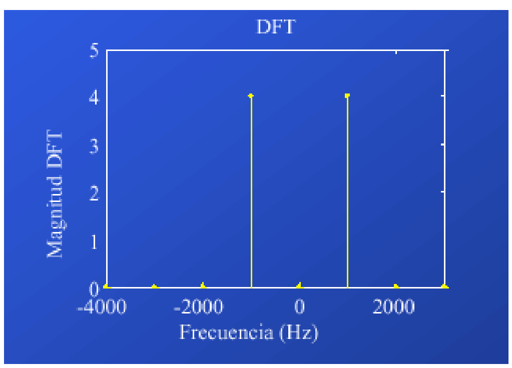
$$X[0]=\sum_{n=0}^{7} x[n]=0$$

$$X[1]=\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j2\pi n/8}=-4j$$

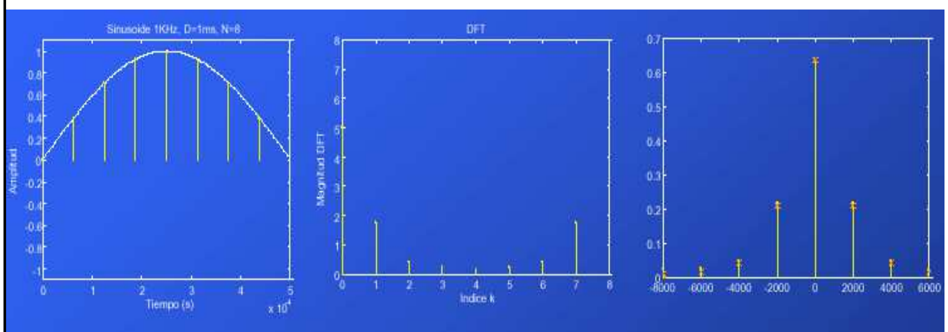
$$X[2]=X[3]=X[4]=X[5]=X[6]=0$$

$$X[7]=4j$$

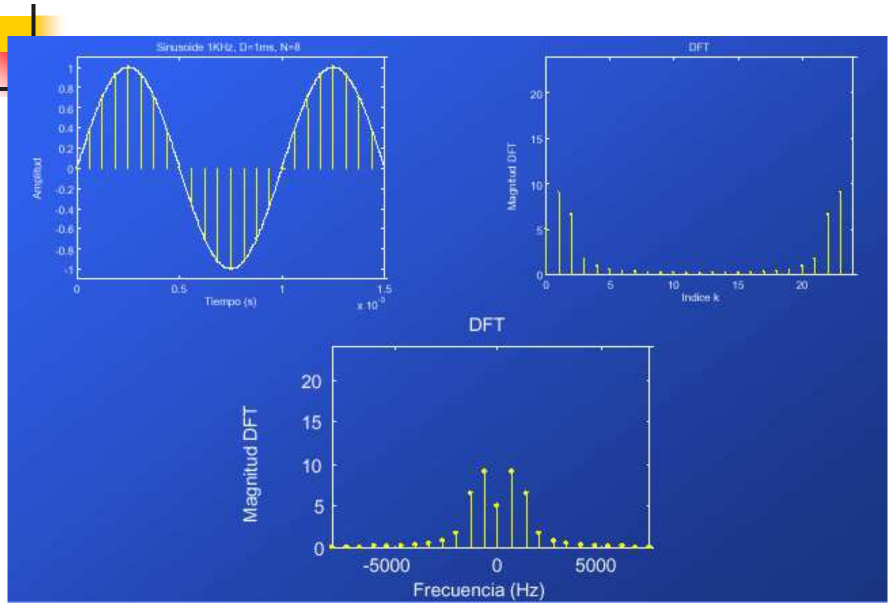


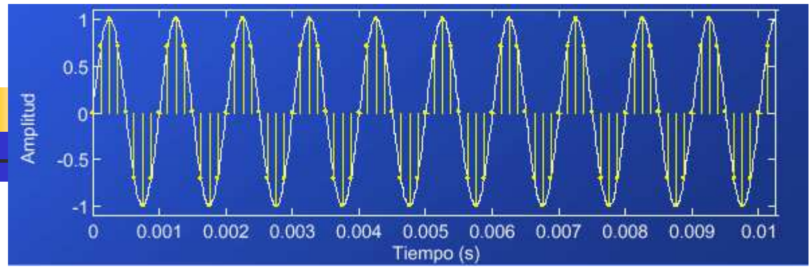



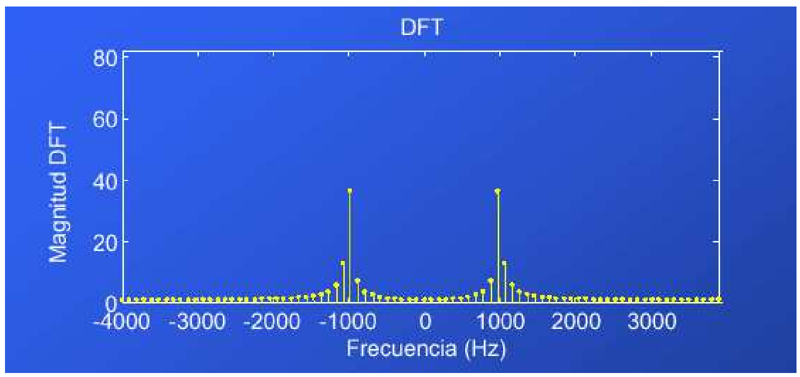
# Ahora f=1kHz D=0.5mSeg N=8




D=1.5 mSeg    N=24






- En general, el DFT es una aproximación a las series o a la transformada de Fourier. Es muy importante elegir correctamente los parámetros del DFT (frecuencia de muestreo $f_s=1/t_s$, resolución de frecuencia $f_0=1/D$).
- La frecuencia de muestreo se determina a partir del teorema de muestreo. Si queremos detectar el espectro de una señal hasta una máxima frecuencia $B$ , la frecuencia de muestreo deberá ser $2B$.
- La duración del muestreo se elige para una determinada resolución de frecuencia.
- Una regla de diseño muy útil es: Si queremos los $M$ primeros armónicos de una señal con un error máximo del 5%, el número de muestreos $N=8M$.