ANÁLISIS DE SEÑALES CURSO 2020

ANÁLISIS DE FOURIER

PROF. JORGE RUNCO

ANÁLISIS DE FOURIER EN TC

- Teorema de Fourier
- Serie de Fourier
- Transformada de Fourier
- Fórmulas de análisis y síntesis
- Respuesta en f de sistemas LTI

INTRODUCCIÓN

- En la clase anterior caracterizamos a los sistemas y encontramos las respuestas de los mismos en el dominio del tiempo, resolviendo ecuaciones diferenciales y/o haciendo la convolución de la señal de entrada y la respuesta al impulso.
- La Serie y la Transformada de Fourier son métodos alternativos para el análisis de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia.
- Transforman una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, en una expresión algebraica, permitiendo entre otras cosas, simplificar la determinación de la respuesta permanente de ese sistema, así como su respuesta en frecuencia.

DOMINIO DE FRECUENCIA

➢ Metodología

- Señales elementales a partir de las cuales se puede construir por combinación lineal cualquier señal.
- Construir la respuesta al sistema a partir de su respuesta a la señal elemental.

➢ Se introducen los siguientes conceptos :

- Exponenciales complejas como señal básica.
- Dualidad entre dominios de tiempo y frecuencia.
- Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

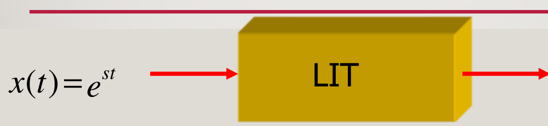
- Antes pensábamos ➡ impulsos
- Ahora pensamos ➡ funciones propias de los sistemas LIT

Entrada : función propia ➡ Salida : misma función multiplicada por una constante

A partir de la propiedad de superposición de los sistemas LIT

$x(t)=\Sigma\, a_k\, \phi_k(t)$ ➡ $y(t)= \Sigma\, k\, a_k\, \phi_k(t)$

¿CÓMO CALCULAMOS K?



Recordando la definición de convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)} d\tau = [\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau]\, e^{st} =$$

$$= H(s)\, e^{st}$$

Función propia

Fourier : con s=jw

Valor propio

- **L**as exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), ya que cumplen con la característica de que al aplicarlas a un sistema, la respuesta permanente es la misma entrada (tiene la misma forma) multiplicada por una constante compleja.
- Las exponenciales complejas son periódicas, la constante compleja es la función de transferencia o función del sistema $H(s)|s=jw_0$ evaluada a la frecuencia jw_0 de la señal de entrada.
- A esta constante se le denomina valor propio del sistema. Esto es, la respuesta permanente a una entrada exponencial compleja es

$$x(t) = e^{j\omega_o t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\ =\ j\omega o}\, e^{j\omega_o t}$$

Prof. Jorge Runco Curso 2020

- Como ejemplos para entender

$$x(t) = e^{j\omega_1 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\ =\ j\omega 1} e^{j\omega_1 t}$$

$$x(t) = 5e^{j\omega_2 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\ =\ j\omega 2}\, 5\, e^{j\omega_2 t}$$

$$x(t) = 2e^{j(\omega_2 t + \pi/4)} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s\ =\ j\omega 2}\, 2\, e^{j(\omega_2 t + \pi/4)}$$

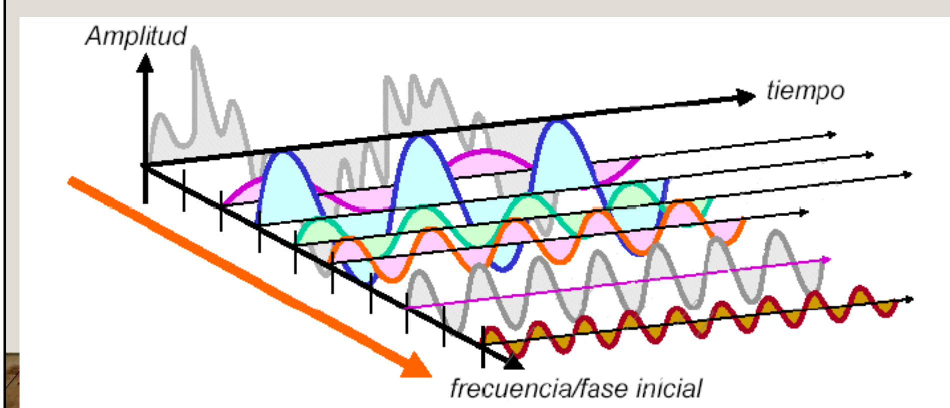
$$x(t) = 5e^{j\omega_1 t} + 2e^{j\omega_2 t} \rightarrow$$
$$y(t) = H(s)|_{s\ =\ j\omega 1} 5e^{j\omega_1 t} + H(s)|_{s\ =\ j\omega 2} e^{j\omega_2 t}$$

Prof. Jorge Runco Curso 2020

- Ya que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), una señal de entrada se puede definir como la superposición de un número infinito de exponenciales complejas, que pueden o no estar ponderadas y desplazadas. De manera general, la serie exponencial de $x(t)$ es:
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} = \ \ldots + c_{-2}\, e^{-j2\omega_0 t} + c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t} + c_0 + c_1\, e^{j\omega_0 t} + c_2\, e^{j2\omega_0 t} + \cdots$
- Donde los c_k pueden ser complejos.
- La salida ó respuesta permanente es:
- $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(kj\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

Representación de señales

Uno de los métodos de representar la señal x(t) es bajo la forma de componentes de ≠ f, c/u de ellas con una amplitud y fase inicial



SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada *Serie Trigonométrica de Fourier*

$f(t) = ½a_0 + a_1\cos(w_0t) + a_2\cos(2w_0t) + ... + b_1 sen(w_0t) + b_2 sen(2w_0t) + ...$

Donde $w_0 = 2\pi/T$.

Es decir,

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

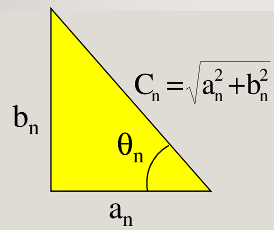
SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Es posible escribir de una manera ligeramente diferente la Serie de Fourier, si observamos que el término $a_n\cos(nw_0t)+b_n sen(nw_0t)$ se puede escribir como

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega_0 t)+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}sen(n\omega_0 t)\right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER



$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\theta_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \operatorname{sen}\theta_n$$

Con lo cual la expresión queda

$$C_n\left[\cos\theta_n \cos(n\omega_0 t) + \operatorname{sen}\theta_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= C_n\left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$$

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Si además definimos $C_0 = a_0/2$, la serie de Fourier se puede escribir como:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

- Así, una función periódica f(t) se puede escribir como la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias $w_n=nw_0$.
- A la componente sinusoidal de frecuencia nw_0: $C_n\cos(nw_0t+\theta_n)$ se le llama la enésima armónica de f(t).
- A la primera armónica (n=1) se le llama la componente fundamental y su periodo es el mismo que el de f(t)
- A la frecuencia $w_0=2\pi f_0=2\pi/T$ se le llama frecuencia angular fundamental.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO: FUNCIONES ORTOGONALES

- Un conjunto de funciones $\phi_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a<t<b$ si para dos funciones cualesquiera se cumple

$$\int_a^b \phi_m(t)\,\phi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & para \;\; m \neq n \\ r_n & para \;\; m = n \end{cases}$$

SENOS Y COSENOS: ORTOGONALIDAD

El siguiente es un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-T/2 < t < T/2$.

$1, \cos w_0 t, \cos 2w_0 t, \cos 3w_0 t, \ldots, \operatorname{sen} w_0 t, \operatorname{sen} 2w_0 t, \operatorname{sen} 3w_0 t, \ldots$

(para cualquier valor de $\omega_0 = 2\pi/T$).

Para verificar lo anterior podemos probar:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt = \left.\frac{\operatorname{sen}(m\omega_0 t)}{m\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\operatorname{sen}(m\omega_0 T/2)}{m\omega_0} = \frac{2\operatorname{sen}(m\pi)}{m\omega_0} = 0$$

Ya que m es un entero.

SENOS Y COSENOS: ORTOGONALIDAD

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = \left.\frac{-\cos(m\omega_0 t)}{m\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{-1}{m\omega_0}[\cos(m\omega_0 T/2) - \cos(m\omega_0 T/2)] = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

SENOS Y COSENOS: ORTOGONALIDAD

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0 \quad \text{para cualquier } m, n$$

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER

- Dada una función periódica f(t) ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

- Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

- Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

Multiplicando ambos miembros por cos($n\omega_0 t$) e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Similarmente, multiplicando por sen($n\omega_0 t$) e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Similarmente, integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Prof. Jorge Runco Curso 2020

✓El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.

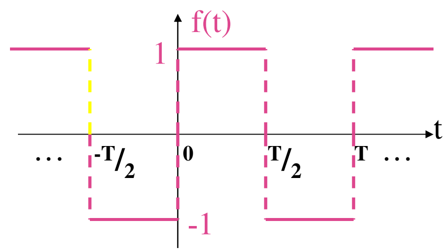
✓Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de –T/2 a T/2, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo:

(de t_0 a t_0+T, con t_0 arbitrario)

✓las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito

Prof. Jorge Runco Curso 2020

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Solución: La expresión para f(t) en $-{}^{T}/_{2} < t < {}^{T}/_{2}$ es

Coeficientes a_n:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{0} -\cos(n\omega_0 t) dt + \int_{0}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{0} + \frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_{0}^{T/2} \right]$$

$$= 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

Coeficientes b_n:

$$b_n = \tfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \tfrac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T/2} \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$= \tfrac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} - \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

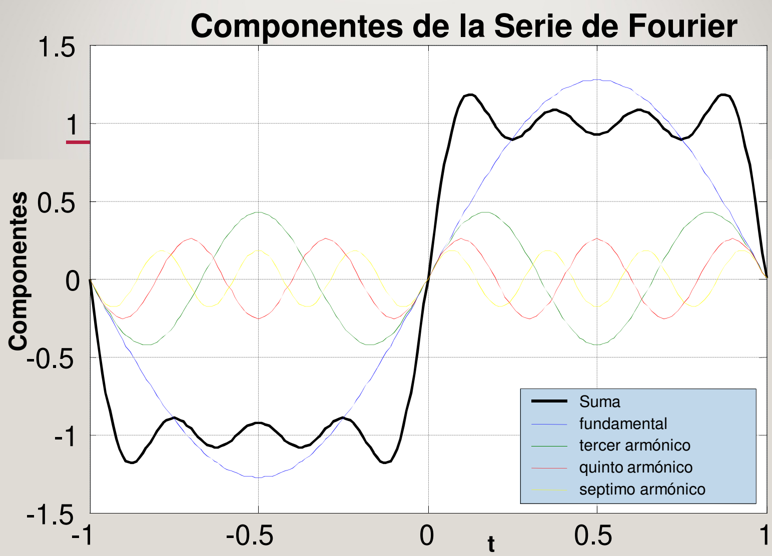
$$= \frac{1}{n\pi}\left[(1-\cos(n\pi)) - (\cos(n\pi)-1)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \quad \text{para } n \neq 0$$

Serie de Fourier: Finalmente la Serie de Fourier queda como

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}(3\omega_0 t) + \tfrac{1}{5}\mathrm{sen}(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

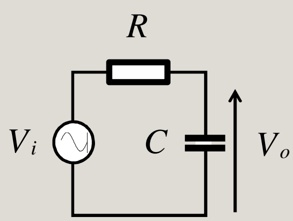
En la siguiente figura se muestran: la componente fundamental y los armónicos 3, 5 y 7 así como la suma parcial de estos primeros cuatro términos de la serie para $w_0=\pi$, es decir, T=2:



EJEMPLO. CIRCUITO RC CON ONDA CUADRADA

- Sabemos como resolver el circuito para excitación senoidal. Una sola frecuencia.
- Por Fourier la onda cuadrada podemos descomponerla en una suma de señales senoidales cada una de distinta frecuencia.
- La idea es calcular la respuesta (tensión de salida) para cada frecuencia senoidal y como el sistema es lineal sumarlas para obtener la respuesta total.
- Recordemos también que el concepto de impedancia es para f senoidales.

RC CON EXCITACIÓN SENOIDAL RESPUESTA PERMANENTE



$$V_o = I . X_c = \frac{V_i}{R + X_c} . X_c = \frac{V_i}{R + \frac{1}{j\omega C}} . \frac{1}{j\omega C}$$

$$= \frac{V_i}{1 + j\omega CR} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \Leftarrow$$

$$\varphi = arctag\ (-\omega CR) \Leftarrow$$

Prof. Jorge Runco Curso 2020

- *Calculamos H(jw) para ω_0, 3 ω_0, 5 ω_0…….*
- $H(j\omega_0) = \frac{1}{1 + jRC\omega_0}$
- $H(j3\omega_0) = \frac{1}{1 + jRC3\omega_0}$
- $H(j5\omega_0) = \frac{1}{1 + jRC5\omega_0}$
- Y multiplicamos este número complejo por cada coeficiente de Fourier de la señal de entrada para obtener el coeficiente de cada componente de la tensión de salida. (Para cada frecuencia).

Prof. Jorge Runco Curso 2020

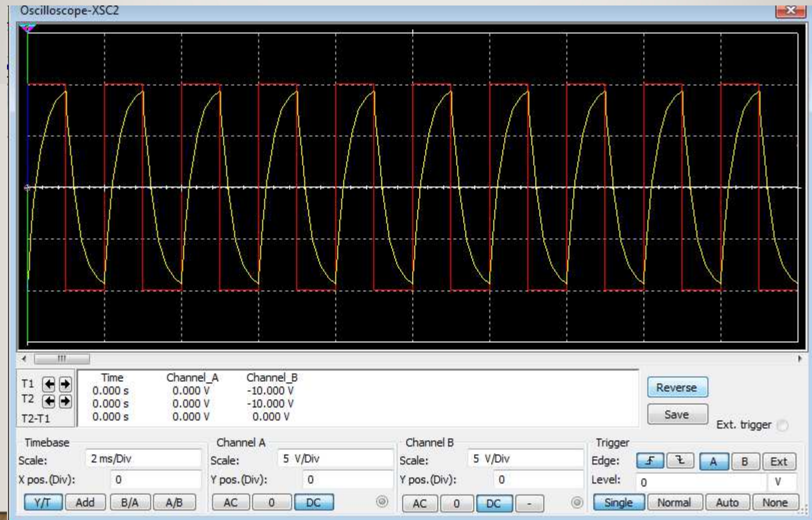
- De acuerdo a lo calculado en el ppt anterior, H depende de la frecuencia porque hay elementos que almacenan energía y su reactancia dependen de la frecuencia.
- En este caso H será un número complejo.
- Para resolver el problema:
- 1) Calculamos la Serie de Fourier de la onda cuadrada.
- 2) Para cada f (coeficiente) multiplicamos la amplitud del mismo por el módulo de H y desplazamos el seno una fase dada por el ángulo de H
- 3) Sumamos las respuestas individuales para obtener la respuesta total.

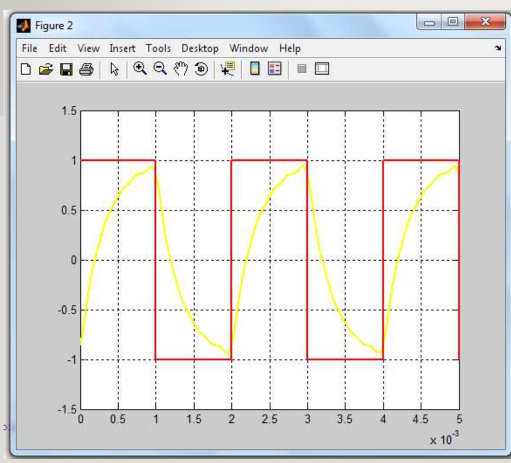
R=1000 OHMS C=0.3 UF EN OCTAVE/MATLAB

```
%Fundamental f=500 Hz
H1=1/(1+j*2*pi*500*1000*0.3*(10).^(-6));
H1M=abs(H1);
H1A=angle(H1);
f1=H1M*(4/pi).*sin(2*pi*500.*t+H1A);

%Tercer armónico f=1500 Hz = 3*500
H3=1/(1+j*2*pi*3*500*1000*0.3*(10).^(-6));
H3M=abs(H3);
H3A=angle(H3);
f3=H3M*(4/(3*pi)).*sin(2*pi*3*500.*t+H3A);
```

ONDA CUADRADA 500 HZ. R1=1KΩ C1=0.3UF





En rojo está dibujada la señal de entrada y en amarillo la señal de salida, obtenida con un programa Octave/Matlab. Comparar con la imagen anterior obtenida de la simulación de un osciloscopio (Multisim).

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Consideremos la serie de Fourier para una función periódica f(t), con periodo T=2pi/w_0.

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)]$$

Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

Donde $j = \sqrt{-1}$

$$\operatorname{sen}(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Sustituyendo

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \tfrac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \tfrac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})]$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t}]$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2} a_0, \quad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Y definiendo:

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

La serie se puede escribir como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

O bien,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Es decir,

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}$$

A la expresión obtenida

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}$$

Se le llama forma compleja de la serie de Fourier y sus coeficientes c_n pueden obtenerse a partir de los coeficientes a_n, b_n como ya se dijo, o bien:

Para n=0, ±1, ±2, ±3, ...

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}$$

Los coeficientes c_n son números complejos, y también se pueden escribir en forma polar:

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n}$$

Donde

$$|c_n| = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \phi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n})$$

Para todo n≠0,

Para n=0, c_0 es un número real: $c_0 = \tfrac{1}{2} a_0$

EXPONENCIAL COMPLEJA (LO MISMO QUE ANTES)

- Asociado a c/exponencial compleja existe un conjunto de señales relacionadas armónicamente, sus frecuencias son múltiplos enteros de una única frecuencia w_0
- Para c_k ϕ_k es una función periódica de frecuencia fundamental $|k|w_0$.

$$\phi_k(t) = e^{jw_0tk} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2.....$$

- Una combinación lineal de dichas señales :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{jk\,w_0 t}$$

- también es periódica con período T_0 y se conoce como representación por Series de Fourier de x(t). Expresa la descomposición de la señal x(t) como combinación lineal de k exponenciales complejas:
- Con amplitudes C_k discretas
- Para un conjunto discreto de frecuencias kw_0 relacionadas armónicamente

FORMAS ALTERNATIVAS

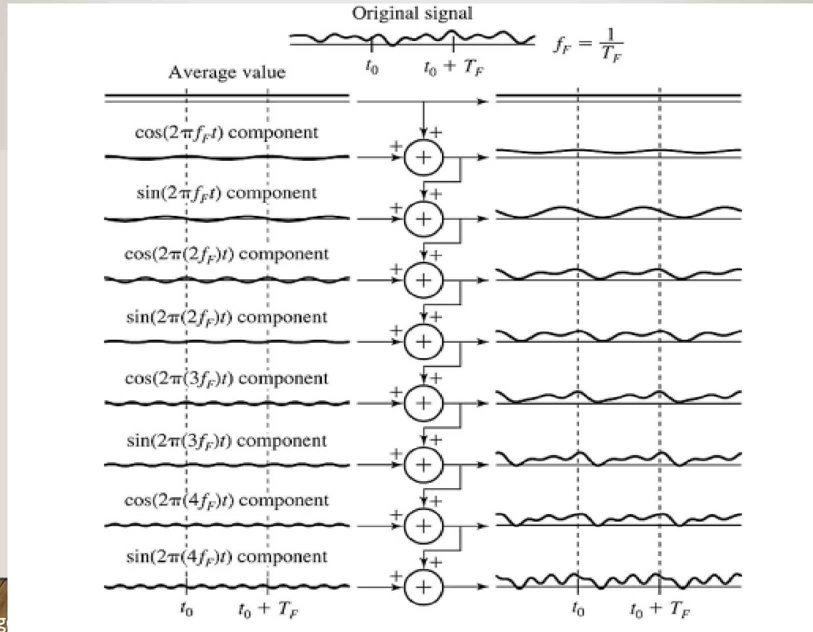
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\,w_0 t) - b_k \operatorname{sen}(k\,w_0 t)]$$

$$x(t) = a_0 + a_1\left(\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0}}{2}\right) + a_2\left(\frac{e^{j2w_0 t} + e^{-j2w_0 t}}{2}\right) + \ldots + b_1\left(\frac{e^{jw_0 t} - e^{-jw_0}}{2j}\right) + b_2\left(\frac{e^{j2w_0 t} - e^{-j2w_0 t}}{2}\right) + ..$$

$$x(t) = a_0 + e^{jw_0 t}\left(\frac{a_1}{2} - j\frac{b_1}{2}\right) + e^{-jw_0}\left(\frac{a_1}{2} + j\frac{b_1}{2}\right) + e^{j2w_0 t}\left(\frac{a_2}{2} - j\frac{b_2}{2}\right) + e^{-j2w_0 t}\left(\frac{a_2}{2} + j\frac{b_2}{2}\right) + \ldots$$

$$x(t) = \ldots + A_{-1} e^{-jw_0 t} + A_0 + A_1 e^{jw_0 t} + \ldots$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA



Prof. Jorg

TEOREMA DE FOURIER

- Toda señal periódica que cumpla las condiciones de Dirichlet :
  - Integrable en el período
  - Nº finito de máximos y mínimos en el período
  - Nº finito de discontinuidades
- Puede reproducirse como una superposición de componentes sinusoidales de frecuencias f_0, $2f_0$,...
- La componente con el mismo período que la función original se denomina *fundamental.*
- Las componentes con f superiores a la fundamental se denominan *armónicos.*

Prof. Jorge Runco Curso 2020

DETERMINACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE UNA SEÑAL PERIÓDICA CONTINUA

- Suponiendo que una señal periódica pudiera representarse con la serie anterior, necesitaríamos un procedimiento para determinar los coeficientes c_k:

$$x(t)\, e^{-jnw_0t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}\, e^{-jnw_0t}$$

- Integrando ambos miembros de 0 a T

Prof. Jorge Runco   Curso 2020

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k [\int_0^T e^{j(k-n)w_0t}\, dt]$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)w_0t}\, dt = \int_0^T \cos(k-n)\, w_0\, t dt + j\int_0^T sen(k-n)\, w_0\, t dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)w_0t}\, dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0t} dt$$

Este par de ecuaciones define la serie de Fourier de una señal periódica contínua :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0 t} dt$$

Ecuación de análisis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jkw_0 t}$$

Ecuación de síntesis

ESPECTROS DE FRECUENCIA

- ✓A la gráfica de la magnitud de los coeficientes c_n contra la frecuencia angular w de la componente correspondiente se le llama el espectro de amplitud de f(t).
- ✓A la gráfica del ángulo ϕ_n de fase de los coeficientes c_n contra w, se le llama el espectro de fase de f(t).
- ✓Como n sólo toma valores enteros, la frecuencia angular $w=nw_0$ es una variable discreta y los espectros mencionados son gráficas discretas.

ESPECTROS DE FRECUENCIA

- Dada una función periódica f(t), le corresponde una y sólo una serie de Fourier, es decir, le corresponde un conjunto único de coeficientes c_n.

- Por ello, los coeficientes c_n especifican a f(t) en el *dominio de la frecuencia* de la misma manera que f(t) especifica la función en el *dominio del tiempo.*

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER

- Linealidad

$$x(t) \longrightarrow a_k \qquad y(t) \longrightarrow b_k$$

$$Ax(t)+By(t) \longrightarrow c_k=Aa_k+Bb_k$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow a_k\, e^{-jk w_0 t_0}$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER

- Escalamiento de tiempo

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jka w_0 t}$$

- Relación de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Prof. Jorge Runco Curso 2020

SIMETRÍA DE LA FORMA DE ONDA

- ✓Función par
- ✓Función impar
- ✓Simetría de ½ onda

  f(t)=-f(t+T/2)

La porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada ½ período.

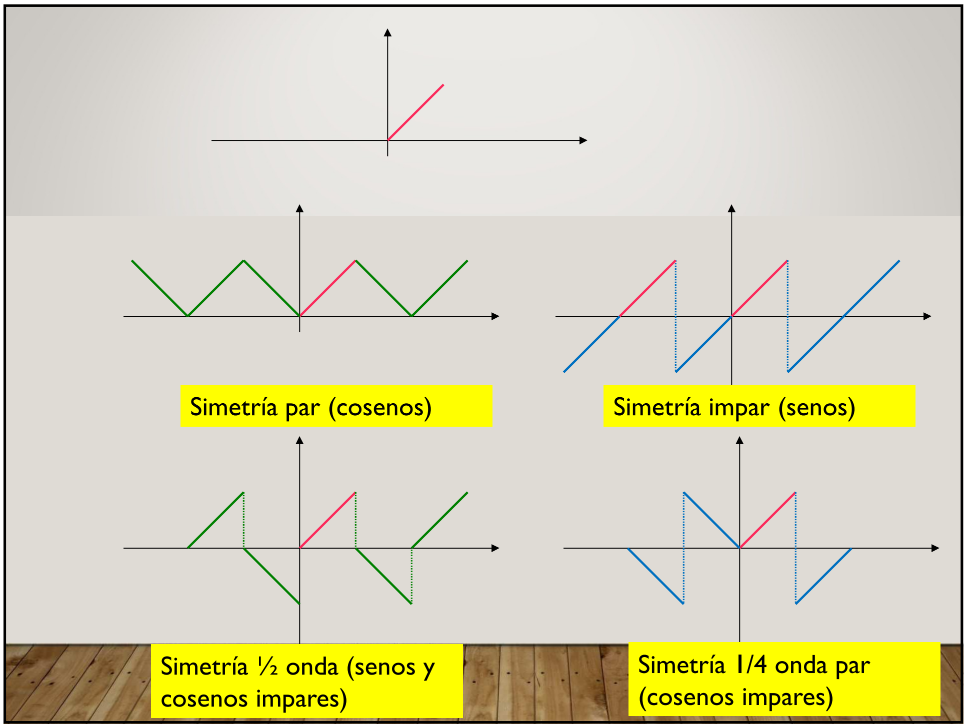
Prof. Jorge Runco Curso 2020

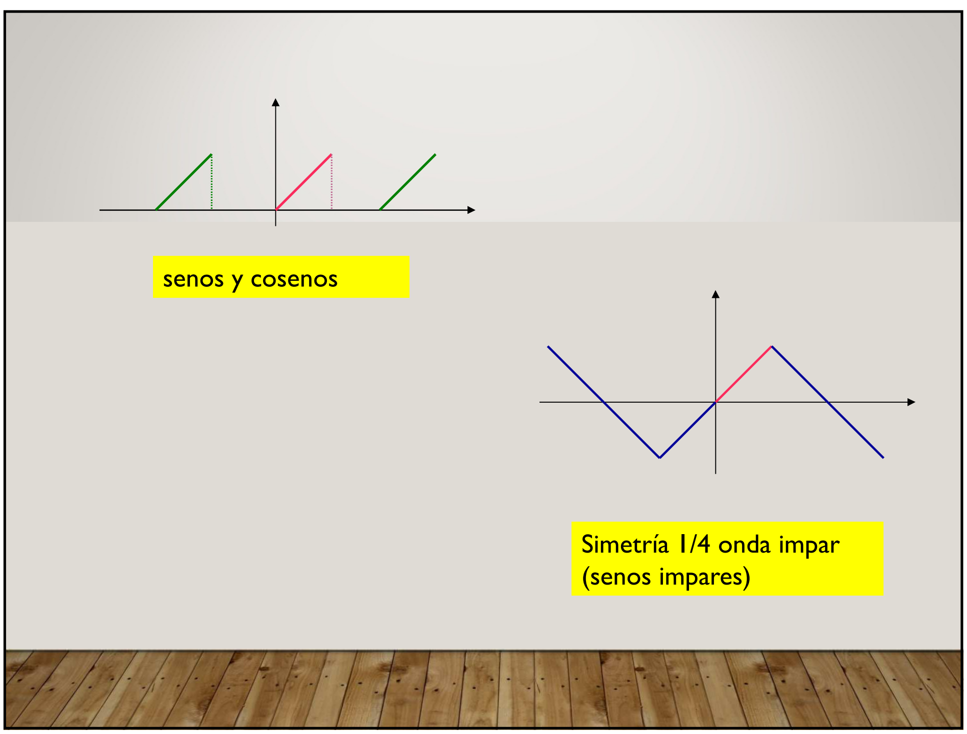
SIMETRÍA DE LA FORMA DE ONDA

- Simetría de cuarto de onda
- Si una función periódica f(t) tiene simetría de media onda y además es una función par ó impar, entonces f(t) tiene simetría de cuarto de onda par ó impar.

¿QUÉ PODEMOS DECIR DE LOS COEFICIENTES CON LA SIMETRÍA?

- Función par ➡ a_0 y a_n sólo cos
- Función impar ➡ b_n sólo senos
- Función con simetría de ½ onda ➡ armónicos impares
- Función con simetría de ¼ de onda par ➡ armónicas impares coseno
- Función con simetría de ¼ de onda impar ➡ armónicas impares senos


Simetría par (cosenos)
Simetría impar (senos)
Simetría ½ onda (senos y cosenos impares)
Simetría 1/4 onda par (cosenos impares)


senos y cosenos
Simetría 1/4 onda impar (senos impares)

SIMETRÍAS Y COEFICIENTES DE FOURIER

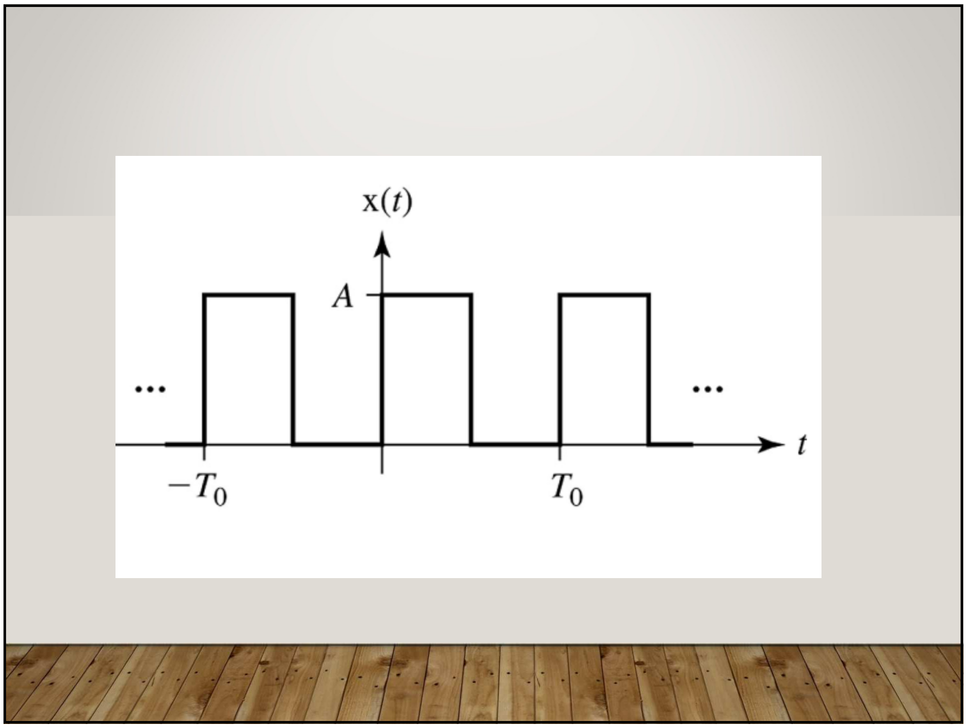
Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$	Senos y cosenos
Par	$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n=0$	únicamente cosenos
Impar	$a_n=0$	$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$	únicamente senos
media onda	$a_n = \begin{cases} 0 & n\ \text{par} \\ \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt & n\ \text{impar} \end{cases}$	$b_n = \begin{cases} 0 & n\ \text{par} \\ \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt & n\ \text{impar} \end{cases}$	Senos y cosenos impares

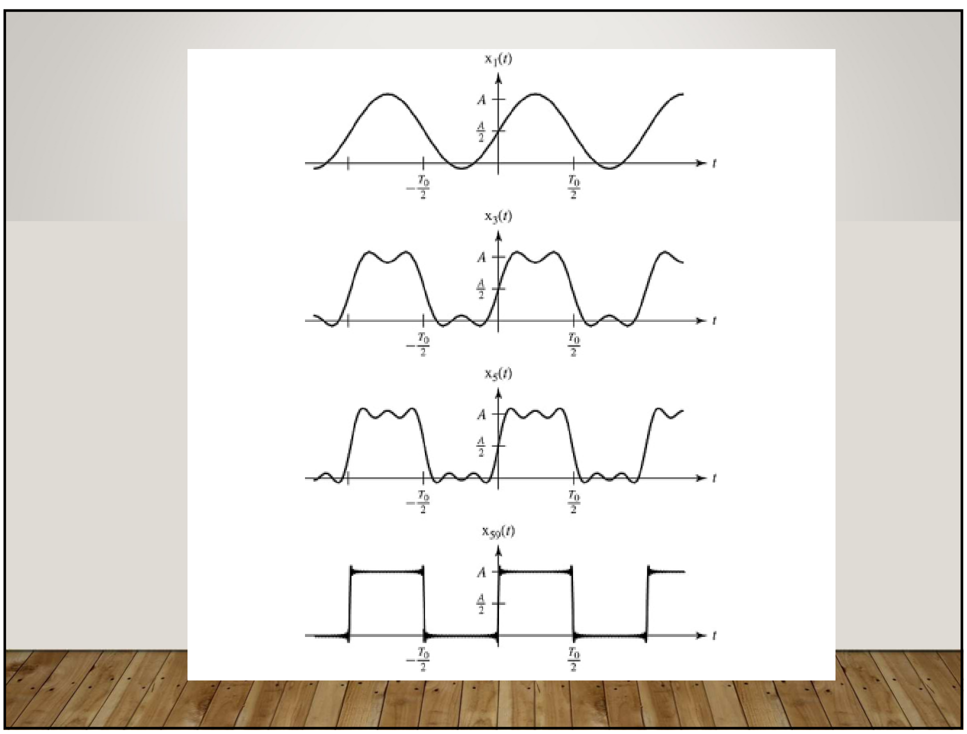
Prof. Jorge Runco Curso 2020

SIMETRÍAS Y COEFICIENTES DE FOURIER

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$	Senos y cosenos
¼ de onda par	$a_n=0$ (n par) $a_n = \frac{8}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ (n impar)	$b_n=0$	Sólo cosenos impares
¼ de onda impar	$a_n=0$	$b_n=0$ (n par) $b_n = \frac{8}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$ (n impar)	Sólo senos impares

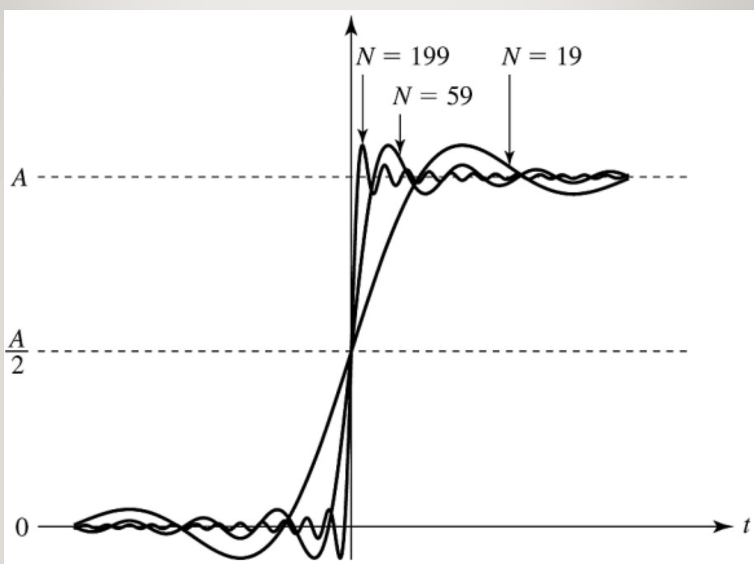
Prof. Jorge Runco Curso 2020

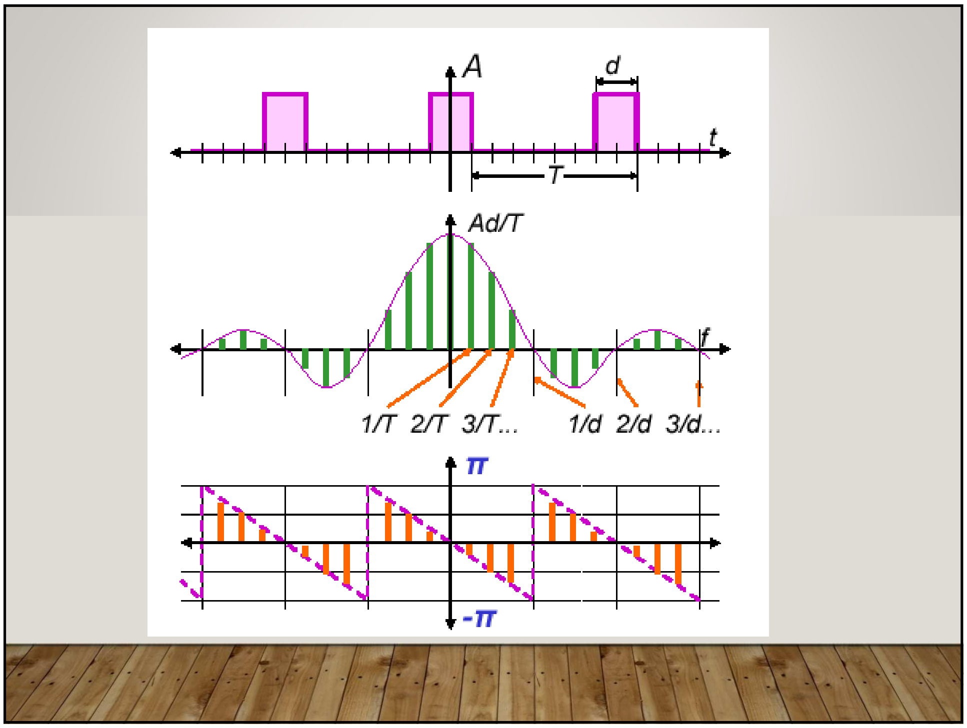

x(t)
A
...
...
t
−T0
T0


x1(t)
x3(t)
x5(t)
x59(t)

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

- Las señales que encontramos en el mundo real cumplen las condiciones de Dirichlet. Por lo tanto :
- Las series de Fourier=x(t) donde x(t) es continua
- Las series de Fourier="punto medio" en puntos de discontinuidad.
- Convergencia. Fenómeno de Gibbs en puntos de discontinuidad.




A
d
t
T
Ad/T
f
1/T 2/T 3/T...
1/d 2/d 3/d...
π
-π