ANÁLISIS DE SEÑALES
CURSO 2020

TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROF. JORGE RUNCO

MOTIVACIÓN

- Existen señales que no tienen TFTC.
- La TFTC expresa señales como combinaciones lineales de exponenciales imaginarias.
- La TL expresa señales como combinaciones lineales de exponenciales complejas.
- Podemos decir que la TL es más general que la TF.
- Muchas de las propiedades de la transformada de Fourier se conservan si en vez de utilizar una frecuencia puramente imaginaria, se utiliza una frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$

- Así la frecuencia pasa de ser un valor en una recta, a un valor en el plano complejo s.
- Las funciones exponenciales complejas e^{st} siguen siendo funciones propias de un sistema LTI, hecho en el cual se basa toda la aplicación práctica de esta transformada.
- Se distinguen dos versiones de la transformada de Laplace: bilateral y unilateral.
- La primera está directamente relacionada con la transformada de Fourier, y la segunda es la herramienta ampliamente utilizada en ingeniería para señales causales.

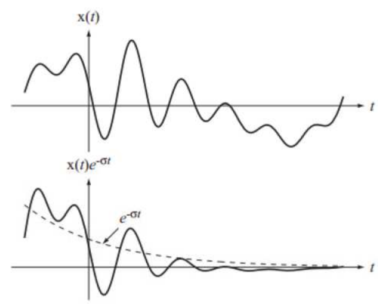
DEFINICIÓN

- $X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\, dt =$
- $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt$
- La función X (s) se expresa en términos de la variable compleja *s* y se denomina la transformada de Laplace bilateral por abarcar el intervalo de a .
- En la práctica, el análisis de los sistemas y las funciones del tiempo comienzan en un tiempo finito y en los sistemas invariantes en el tiempo, por conveniencia, se elige que éste sea *t* = 0.

- Así, para sistemas causales la transformada de Laplace que resulta es la *Transformada de Laplace unilateral* que se define como
- $$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}\, dt$$
- Como se puede observar la transformada de Laplace unilateral sólo depende de los valores para $t \geq 0$. Si se aplica la transformada de Laplace a funciones en las que sus valores para $t < 0$ son iguales a cero, la transformada de Laplace bilateral y la transformada de Laplace unilateral serán iguales.
- Puesto que en el estudio de los sistemas y las señales se consideran sus comportamientos a partir de $t \geq 0$, es decir, que son nulos para $t < 0$ bastará con considerar el análisis de la transformada de Laplace unilateral.

- $X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt =$
- $=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt =$
- $= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)\, e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = F\{x(t)\, e^{-\sigma t}\}$
- Quiere decir que la transformada de Laplace puede interpretarse como la TF de la función x(t) multiplicada por una señal exponencial real $e^{-\sigma t}$ que será creciente o decreciente dependiendo del signo de σ . Este producto entre x(t) y la función "de convergencia" $e^{-\sigma t}$, fue el punto de partida para la propuesta inicial (Heaviside): si x(t) no tiene directamente transformada de Fourier, puede calcularse la TL como mostramos.

DEFINICIÓN



Efecto de un factor de convergencia exponencial real decreciente.

Calcular la TL de x(t) = e^{-at} u(t)

- $L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\, u(t) e^{-st}\, dt$
- $= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\ e^{-st}\, dt$
- $= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+s)t}\, dt$
- $= -\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \Big|_{0}^{+\infty}$
- $= \frac{1-e^{-(a+s)\infty}}{a+s}$

$$L\{x(t)\} = \frac{1}{a+s} \qquad con\ Re\{a\} + \sigma > 0 \quad ó \quad \sigma > -Re\{a\}$$

- Descomponiendo el exponente en partes real e imaginaria
- $e^{-(a+s)\infty} = e^{-(Re\{a\}+\sigma)\infty}\ e^{-j(Im\{a\}+\omega)\infty}$

Si $Re\{a\} + \sigma$>0 el término converge a cero. Si no diverge a ∞.

Este término tiene módulo 1. La convergencia depende del primer término.

Prof. Jorge Runco — Curso 2020

Calcular la TL de x(t) = - e^{-at} u(-t)

$$L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} - e^{-at}\ u(-t)\ e^{-st}\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} - e^{-at}\ e^{-st}\ dt$$

$$= \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1 - e^{(a+s)\infty}}{a+s}$$

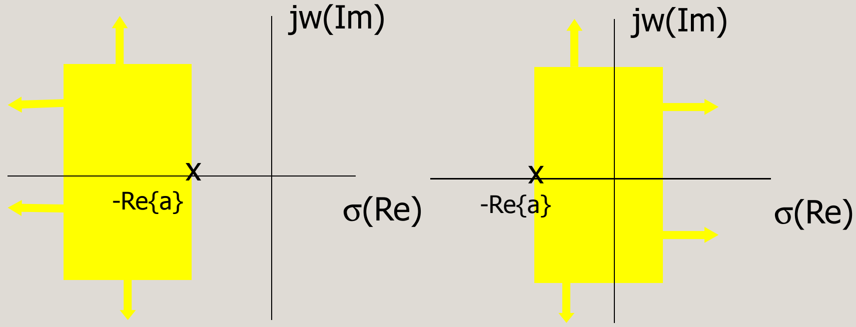
$$e^{(a+s)\infty} = e^{(Re\{a\}+\sigma)\infty}\ e^{j(Im\{a\}+\omega)\infty}$$

$$Si\ Re\{a\} + \sigma < 0\ converge\ el\ primer\ término$$

$$L\{x(t)\} = \frac{1}{a+s} \qquad con\ Re\{a\} + \sigma < 0 \quad ó \quad \sigma < -Re\{a\}$$

Prof. Jorge Runco — Curso 2020

- Los ejemplos anteriores muestran un hecho fundamental en el manejo de la transformada de Laplace: la misma expresión algebraica en el dominio s puede representar funciones diferentes en el dominio temporal, dependiendo de la región de convergencia utilizada.

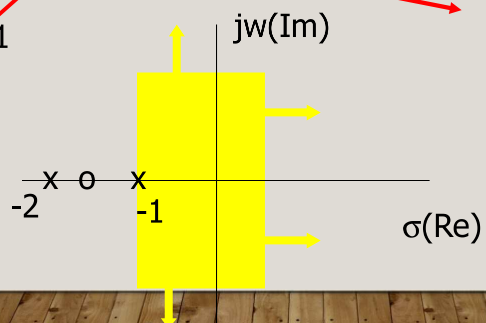


Otro ej. $x(t) = e^{-t}\,u(t) + e^{-2t}\,u(t)$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

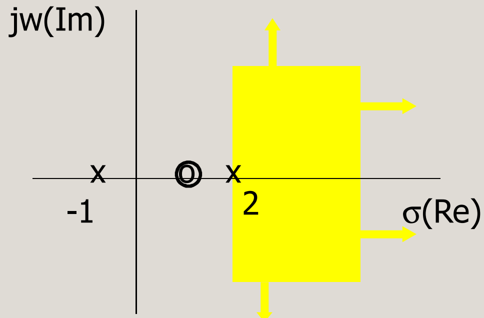
Re(s)>-1

Re(s)>-2

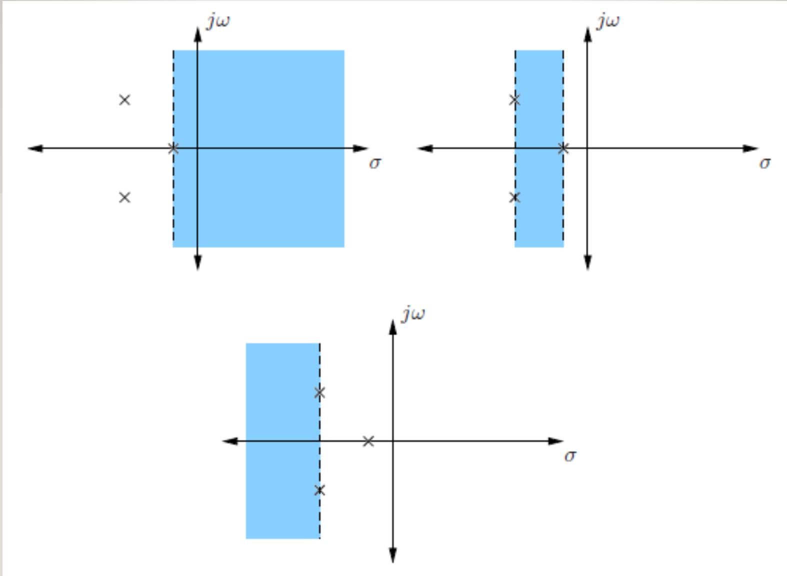


Otro ej. $x(t) = \delta(t) - 4/3\, e^{-t} u(t) + 1/3\, e^{2t} u(t)$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}$$



- Los ejemplos anteriores son casos particulares donde la transformada de Laplace es una función racional, es decir, un cociente de polinomios N(s) y D(s) de variable compleja s
- X(s) =N(s)/D(s)
- En los casos en que X(s) es racional, x(t) es siempre una combinación lineal de exponenciales reales o complejas. Este tipo de funciones racionales aparecen cuando se describen sistemas especificados a través de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
- En las funciones racionales, los ceros corresponden a las raíces de N(s) y los polos a las raíces de D(s). Puesto que la ubicación de estas raíces, excepto por un factor de escala, son suficientes para especificar X(s), se acostumbra utilizar un diagrama de polos y ceros para indicar la transformada de Laplace, donde con “x” se demarcan los polos, y con “o” los ceros, y se denota además la región de convergencia.



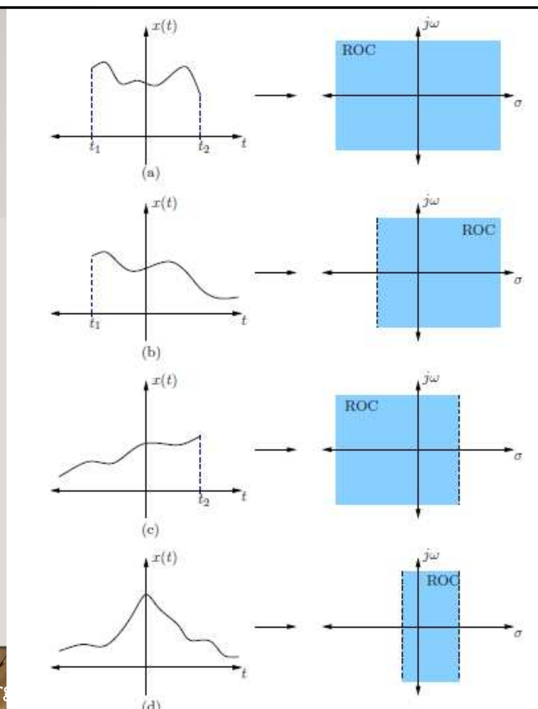
Regiones de convergencia limitadas por polos

ROC (ALGUNAS DEFINICIONES)

- Una señal acotada por su izquierda, también llamada una señal derecha donde $x(t)=0$ para $t<t_I$, se puede demostrar que su ROC contiene al semiplano derecho a partir de un cierto valor de σ.
- Para señales izquierdas, acotadas por derecha, la TL converge para el semiplano izquierdo delimitado por una recta en algún valor de σ.

ROC (ALGUNAS DEFINICIONES)

- Una señal bilateral es aquella de extensión infinita tanto a izquierda como a derecha. Se puede pensar como una señal izquierda + una señal derecha, entonces la ROC será la intersección de ambas ROC.
- Si x(t) es una señal de duración finita, se puede demostrar que la ROC es todo el plano s.
- La figura siguiente muestra estos conceptos (en forma gráfica)



Señal finita

Señal derecha

Señal izquierda

Señal bilateral

ROC PARA TL

- Propiedad 1: la ROC de X(s) consiste en bandas paralelas al eje jw en el plano s.
- Propiedad 2: para TL racionales, N(s)/D(s), la ROC no contiene ningún polo.
- Propiedad 3: si x(t) es de duración finita y si hay al menos un valor de s para la cual la TL converge, entonces la ROC es el plano s completo.

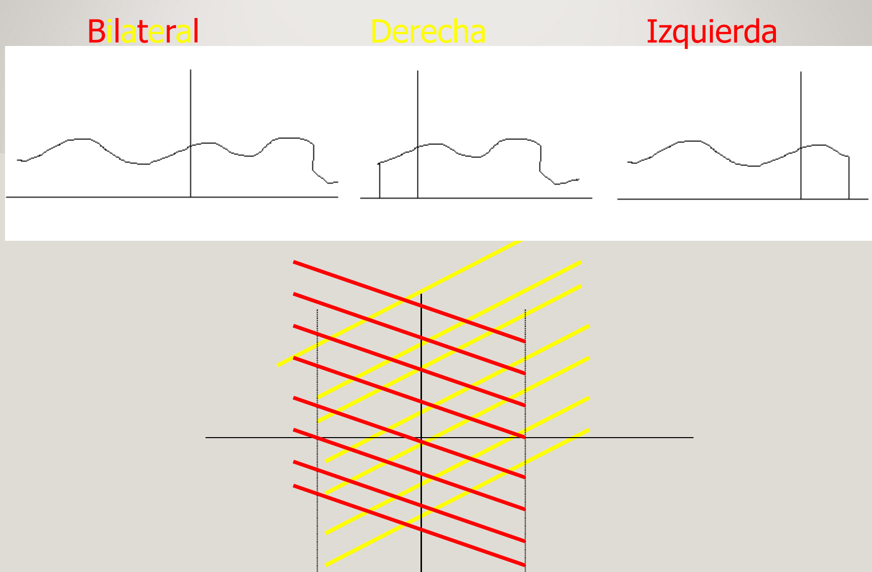
ROC PARA TL

- Propiedad 4: si x(t) es derecha y si la línea $Re(s)=\sigma_o$ está en la ROC, entonces los valores de s para los cuales $Re(s)>\sigma_o$ también están en la ROC.
- Propiedad 5: si x(t) es izquierda y si la línea $Re(s)=\sigma_o$ está en la ROC, entonces los valores de s para los cuales $Re(s)<\sigma_o$ también están en la ROC.

ROC PARA TL

- Propiedad 6: si x(t) es bilateral y la línea Re(s)=σ_o está en la ROC, entonces la ROC consistirá de una banda en el plano s, la cual incluye la línea Re(s)= σ_o.

Prof. Jorge Runco Curso 2020



Prof. Jorge Runco Curso 2020

RESUMEN ROC

- Cualquier señal, o no tiene TL ó cae en una de las 4 categorías de las propiedades 3 a 6.
- Para cualquier señal que tenga TL la ROC debe ser el plano s completo (señales de longitud finita), ó el medio plano izquierdo (señales de lado izquierdo), ó el medio plano derecho (señales de lado derecho) ó una banda (señales bilaterales)
- ROC: está limitada por los polos ó se extienden hasta ∞.

Propiedades TL

Propiedad	Señal	Transformada de Laplace
Linealidad	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
Desplazamiento en el tiempo	$f(t-a)\,u_{-1}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Convolución	$\int_{0^-}^{t} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$	$F(s)\,G(s)$
Integración en t	$\int_{0}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Derivación	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s)-\sum_{m=1}^{n} s^{n-m} f^{(m-1)}(0^-)$
Multiplicación por t^n	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
Valor inicial	$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Valor final	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Secuencia periódica	$f(t)=f(t+T)$	$\frac{\mathscr{L}\{\text{Primer ciclo}\}}{1-e^{-Ts}}$
Escalamiento	$f(at)\,,\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
División por t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(u)\,du$

RESPUESTA DE UN SISTEMA POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Representación General

$x(t) \leftrightarrow L\{x(t)\}=X(s)$ → **Sistema Lineal e Invariante en Tiempo (LIT)** → $y(t) \leftrightarrow L\{y(t)\}=Y(s)$

Recordemos $y(t) = x(t) * h(t)$

- La salida de un sistema a una señal de entrada se puede calcular a través de la convolución de dicha señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema.
- Debido a la propiedad de convolución de la transformada de Laplace, es posible simplificar como lo hicimos con la transformada de Fourier.
- $y(t) = h(t) * x(t) \leftrightarrow Y(s) = H(s)\,X(s)$
- Así como a H(jw) la llamamos respuesta en frecuencia del sistema, H(s) se la denomina función de transferencia del sistema.

TRANSFORMADA DE LAPLACE : DEFINICIÓN

Dada una función $x(t)$ su Transformada Bilateral de Laplace será

$$x(t) \leftrightarrow X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

mientras que la anti - Transformada Bilateral de Laplace será

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X_B(s) e^{st} ds \leftrightarrow X_B(s)$$

De igual manera se define la Transformada Unilateral de Laplace

$$x(t) \leftrightarrow X_U(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

y la anti - Transformada Unilateral de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X_U(s) e^{st} ds \leftrightarrow X_U(s)$$

Transformada de Laplace : propiedades

Se usará el operador L para denotar la transformación

$$X_U(s) = L\{x(t)\}$$

mientras que el operador L^{-1} se usará para denotar la anti - transformación

$$x(t) = L^{-1}\{X_U(s)\}$$

Algunas propiedades de interés serán

1) Linealidad

$$L\{a x_1(t) + b x_2(t)\} = a X_1(s) + b X_2(s)$$

2) Desplazamiento en Tiempo

$$L\{x(t-\tau) u(t-\tau)\} = e^{-\tau s} X(s) \qquad \tau > 0$$

3) Desplazamiento en Frecuencia

$$L\{e^{at} x(t)\} = X(s-a)$$

4) Escalamiento en Tiempo y Frecuencia

$$L\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Transformada de Laplace : propiedades

5) Diferenciación en Tiempo

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$$

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \ldots - \left.\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

ej.

$$L\left\{\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right\} = s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$L\left\{\frac{d^3 x(t)}{dt^3}\right\} = s^3 X(s) - s^2 x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$$

6) Integración en Tiempo

$$L\left\{\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$$

$$L\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

7) Diferenciación en Frecuencia

$$L\{tx(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$$

$$L\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

8) Integración en Frecuencia

$$L\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u)du$$

9) Convolución en Tiempo

$$L\{x_1(t) * x_2(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\} = X_1(s)X_2(s)$$

10) Convolución en Frecuencia

$$L\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}(X_1(s) * X_2(s)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(u)X_2(s-u)du$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Algunos pares Transformados de Interés

1) $A\delta(t-t_0) \leftrightarrow Ae^{-st_0}$

2) $Au(t) \leftrightarrow \dfrac{A}{s}$

3) $Ae^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{A}{s+\alpha}$

4) $A\cos(\beta t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{As}{s^2+\beta^2}$

5) $A\,\mathrm{sen}(\beta t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{A\beta}{s^2+\beta^2}$

6) $Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{A(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

7) $Ae^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{A\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

8) $Atu(t) \leftrightarrow \dfrac{A}{s^2}$

9) $At^2e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{2A}{(s+\alpha)^3}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Teoremas de Valor Inicial y Valor Final

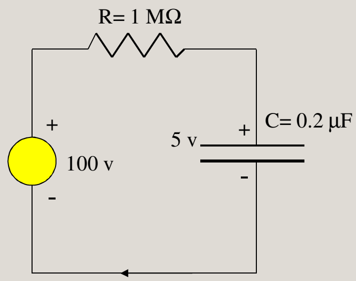
1) Teorema del Valor Inicial.

Si $\boldsymbol{L}\{x(t)\}=X(s)$ entonces $x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

2) Teorema del Valor Final.

Si $\boldsymbol{L}\{x(t)\}=X(s)$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

Solución de Ecuaciones Diferenciales (ejemplo)



La ecuación diferencial del sistema será

$$0.2\frac{dv(t)}{dt}+v(t)=100u(t)$$

se puede escribir como

$$\frac{dv(t)}{dt}+5v(t)=500u(t)$$

aplicando Transformada de Laplace

$$sV(s)-v(0^-)+5V(s)=\frac{500}{s}$$

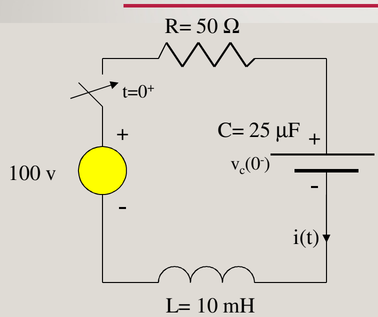
ya que $v(0^-)=5$, se obtiene

$$V(s)=\frac{\frac{500}{s}+5}{s+5}$$

aplicando anti - transformada de Laplace

$$v(t)=(100-95e^{-5t})u(t)$$

Solución de Ecuaciones Diferenciales (ejemplo)



Condiciones iniciales

$v_c(0^-) = 40$ v

$i(0^-) = 1$ A

La ecuación diferencial del sistema en términos de la corriente $i(t)$ será

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau=v(t)$$

aplicando Transformada de Laplace se obtiene

$$I(s)=\frac{V(s)+Li(0^-)-\frac{v_c(0^-)}{s}}{R+Ls+\frac{1}{Cs}}$$

sustituyendo los datos del problema

$$I(s)=\frac{s+6000}{s^2+5000s+4x10^6}=\frac{s+6x10^3}{(s+10^3)(s+4x10^3)}$$

aplicando anti - transformada de Laplace

$$i(t)=(\frac{5}{3}e^{-1000t}-\frac{2}{3}e^{-4000t})u(t)$$

Respuesta de un Sistema por Transformada de Laplace

Un sistema, que está inicialmente en reposo,

se explica por la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+8\frac{d^2y(t)}{dt^2}+37\frac{dy(t)}{dt}+50y(t)=x(t)$$

$en\ \ t=0$ se aplica una señal $x(t)=4e^{-3t}u(t)$

Hallar la respuesta a esta excitación.

Aplicando Transformada de Laplace

$$(s^3+8s^2+37s+50)Y(s)=\frac{4}{s+3}$$

$$Y(s)=\frac{4}{(s+3)(s^3+8s^2+37s+50)}=\frac{4}{(s+3)(s+2)(s^2+6s+25)}$$

$$Y(s)=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+6s+25}$$

Respuesta de un Sistema por Transformada de Laplace

Resolviendo para conocer estas constantes resulta

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=\frac{4}{17},\quad C=\frac{1}{68},\quad D=-\frac{7}{68},$$

aplicando anti - Transformada

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+6s+25}\}$$

$$y(t)=Ae^{-3t}u(t)+Be^{-2t}u(t)+L^{-1}\left\{\frac{Cs}{s^2+6s+9+16}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{D}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

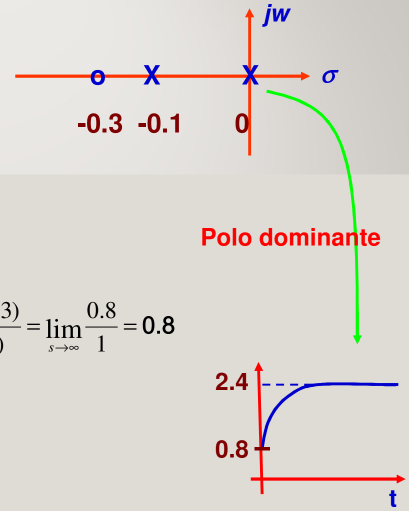
$$y(t)=Ae^{-3t}u(t)+Be^{-2t}u(t)+\frac{D}{4}e^{-3t}\,\mathrm{sen}(4t)u(t)+L^{-1}\left\{\frac{C(s+3)-3C}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

$$y(t)=Ae^{-3t}u(t)+Be^{-2t}u(t)+\frac{D-3C}{4}e^{-3t}\,\mathrm{sen}(4t)u(t)+Ce^{-3t}\cos(4t)u(t)$$

Obtención del valor inicial y final de y(t)

$$Y(s)=\frac{8s+2.4}{s(10s+1)}=\frac{0.8(s+0.3)}{s(s+0.1)}$$

$$Y(s)=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+0.1}=\frac{2.4}{s}-\frac{1.6}{s+0.1}$$



Teorema del valor inicial:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty} s.Y(s)=\lim_{s\to\infty} s.\frac{0.8(s+0.3)}{s(s+0.1)}=\lim_{s\to\infty}\frac{0.8(s+0.3)}{(s+0.1)}=\lim_{s\to\infty}\frac{0.8}{1}=0.8$$

Teorema del valor final:

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} s.Y(s)=\lim_{s\to 0} s.\frac{0.8(s+0.3)}{s(s+0.1)}=\lim_{s\to 0}\frac{0.8(s+0.3)}{(s+0.1)}=\frac{(0.8)(0.3)}{0.1}=2.4$$

RELACIÓN ENTRE TF Y TL

- La TL es en realidad sólo una generalización de la TFTC que analiza funciones como combinaciones lineales de exponenciales complejas generales en vez de cómo combinaciones lineales de un caso especial de exponenciales complejas : las senoides complejas. Si la ROC de la TL incluye al eje jw entonces la TF existe.