

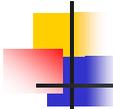


# Análisis de Señales-Curso 2021

---

Procesos Aleatorios  
Correlación y Densidad Espectral  
Ruido

1



## Energía de la señal(1)

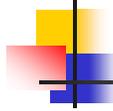
---

- Debido a los distintos tipos de señales físicas que actúan en los sistemas, se definió el término energía de la señal, para TC:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Si  $x(t)$  es una tensión, las unidades son  $V^2.S$ , falta dividir por  $R$  para ser la energía. Es decir la *energía de la señal* es proporcional a la *energía física*.

2

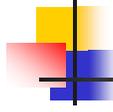


## Energía de la señal(2)

- De acuerdo a lo anterior la energía de la señal es proporcional a la energía real y la constante de proporcionalidad es R. Para un tipo diferente de señal, la cte. de proporcionalidad será diferente.
- Para el caso discreto

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

3



## Potencia de la señal(1)

- En muchas señales ni la integral ni la sumatoria anterior convergen, la energía de la señal es infinita pues no está limitada en tiempo.
- En estas señales es conveniente tratar con la potencia promedio de la señal en vez de con la energía

4

## Potencia de la señal(2)

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Tiempo continuo

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

Tiempo discreto

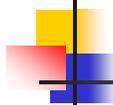
$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Señales periódicas

5

<p>Señales de Energía</p> <p>Señales de Potencia</p>		<p>Energía finita</p> <p>Potencia promedio finita (no nula)</p>
<p>Señales de Energía</p> <p>Señales de Potencia</p>		<p>Potencia promedio nula</p> <p>Energía total infinita</p>
<p>No periódicas</p> <p>Aleatorias y periódicas</p>		<p>Señales de Energía</p> <p>Señales de Potencia</p>

6



## Correlación

---

- Señales de Energía
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n + m]$$

7



## Correlación

---

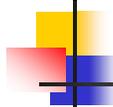
- Señales de Potencia
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) y(t + \tau) dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] y[n + m]$$

8



## Autocorrelación

➤ Señal de Energía

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \quad R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

9



## Autocorrelación

➤ Señal de Potencia

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau)dt$$

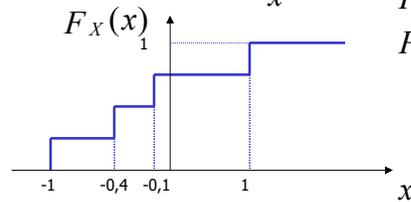
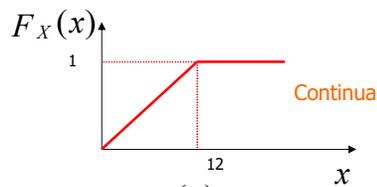
$$R_{xy}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t)dt \quad R_{xx}[0] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^2[n]$$

10

# Función Distribución

$$F_x(x_1) = P\{X \leq x_1\}$$



## Algunas propiedades

$$F_X(\infty) = 1$$

$$0 \leq F_X \leq 1$$

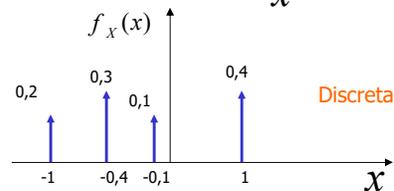
$$F_X(x_1) < F_X(x_2) \text{ con } x_1 < x_2$$

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

11

# Función densidad

$$f_x(x) = d F_x(x) / d x$$



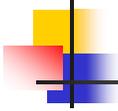
## Algunas propiedades

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

12



## Operaciones de una variable aleatoria

- Valor esperado

$$E[x] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{variable aleatoria continua}$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i) \quad \text{variable aleatoria discreta}$$

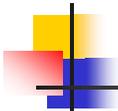
- Momentos

- Momentos alrededor del origen

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad \begin{array}{l} m_0=1 \text{ Area bajo la curva} \\ m_1=\bar{X} \end{array}$$

13

- Momentos centrales

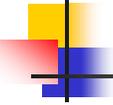

$$\mu_n = E[(X - \bar{X})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n f_X(x) dx$$

$$\mu_0=1 \text{ Area bajo la curva} \quad \mu_1=0$$

- Varianza

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[(X - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \bar{X})^2 f_X(x) dx = \\ &= E[(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2)] \\ &= E[X^2] - \bar{X}^2 = m_2 - m_1^2 \end{aligned}$$

14



## Función distribución y densidad conjunta

- Las probabilidades de 2 eventos (c/u)

$$A = \{X \leq x\} \quad y \quad B = \{Y \leq y\}$$

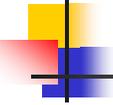
$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad y \quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

- Definimos el evento conjunto  $\{X \leq x, Y \leq y\}$

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \quad \text{Función distribución conjunta}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \text{Función densidad conjunta}$$

15



## Independencia estadística

- Dos eventos  $x$  e  $y$  son estadísticamente independientes si:

$$P\{X \leq x; Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

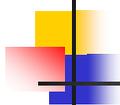
16



## Motivación

- Encontramos señales aleatorias
- Deseadas (comunicación bits)
- No deseadas (ruido)
- Deseamos trabajar en el tiempo
- ¿ Cómo describimos estas señales en el tiempo ?

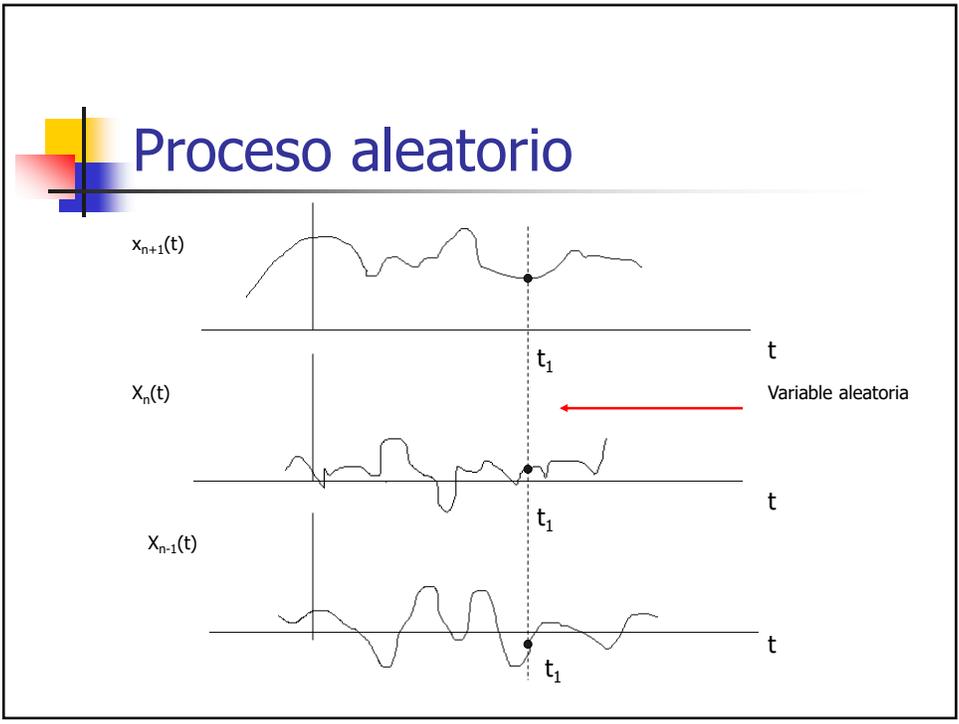
17



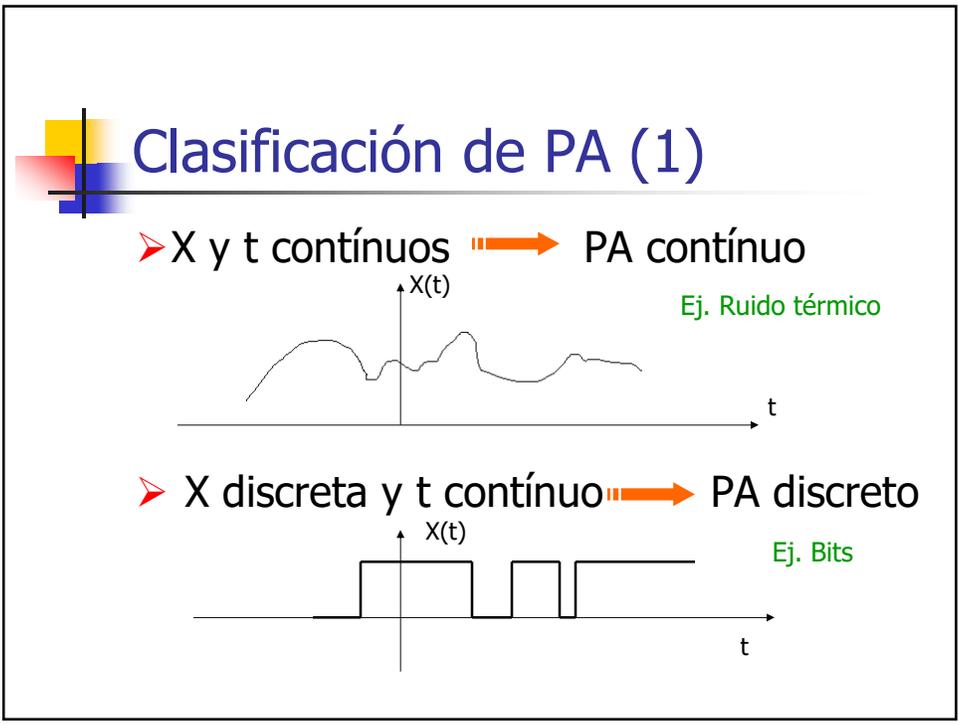
## Procesos aleatorios. Concepto

- Una variable aleatoria  $X$  función de las salidas  $s$  de un experimento.
- Ahora función de  $s$  y  $t$   $x(t,s)$
- La familia de funciones  $X(t,s)$  es llamado un proceso aleatorio.
- Si  $t$  es fijo ( $t_1$ ) y  $s$  variable, tenemos una variable aleatoria.

18



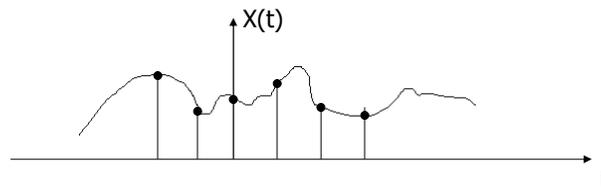
19



20

## Clasificación de PA (2)

- $X$  continuo y  $t$  discreto → secuencia aleatoria continua

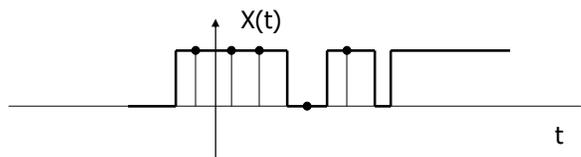


Ej. Ruido térmico muestreado

21

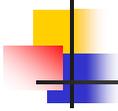
## Clasificación de PA (3)

- $X$  discreto y  $t$  discreto → secuencia aleatoria discreta



Ej. Bits muestreados

22



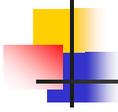
## Procesos determinísticos y no determinísticos

- ✓ Si los valores futuros de cualquier muestra del PA no se pueden "predecir" de sus valores pasados, entonces el PA es llamado no-determinístico
- ✓ En cambio cuando los valores futuros se pueden predecir de sus valores pasados entonces el PA es llamado determinístico.

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

*A,  $\omega_0$ , ó  $\theta$  pueden ser VA*

23



## Funciones densidad y distribución

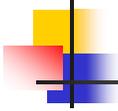
$$F_x(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

$$F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

$$f_x(x_1; t_1) = d F_x(x_1; t_1) / d x_1$$

$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = \partial F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) / (\partial x_1 \partial x_2)$$

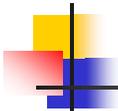
24



## PA independiente PA estacionario

- ❖ En un PA si fijamos el tiempo, tenemos una VA. Esta tiene propiedades estadísticas: valor medio, varianza, etc.
- ❖ Si hacemos esto para  $N$   $t$  distintos obtenemos  $N$  VA con sus propiedades estadísticas.
- ❖ Decimos que el PA es estacionario si sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

25

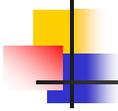


## PA independiente

- Dos PA  $X(t)$  e  $Y(t)$  son estadísticamente independientes si:

$$f_{X,Y}(x_1, t_1; y_1, t_1) = f_X(x_1, t_1) f_Y(y_1, t_1)$$

26



## Proceso Estacionario de primer orden

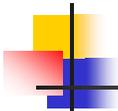
$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta)$$

Para cualquier  $t_1$  y  $\Delta$ .

En consecuencia  $f_X(x_1; t_1)$  es independiente de  $t_1$

⇒  $E[X(t)] = \bar{X} = \text{constante}$

27



## PE de segundo orden

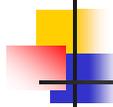
$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

Para todo  $t_1, t_2$  y  $\Delta$ . Consecuencia de lo anterior

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad \tau = t_1 - t_2$$

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad \leftarrow \Rightarrow$$

28



## PE en sentido amplio

---

$$E[X(t)] = \bar{X} = \text{constante}$$

$$E[X(t)X(t + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Un PE de orden 2 es estacionario en sentido amplio.

29



## Autocorrelación

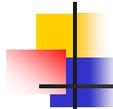
---

- Si el proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$$

- Y tiene las siguientes propiedades

30



## Propiedades

$$(1) |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$

$$(2) R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$

$$(3) R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$$

31



## Otras propiedades

$$(4) E[X(t)] = \bar{X} \neq 0$$

⇒ tiene un término cte =  $\bar{X}$

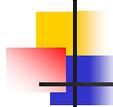
$$(5) X(t) \quad \text{Si tiene una componente periódica}$$

⇒  $R_{XX}(\tau)$  también tiene una componente periódica con el mismo período

$$(6) X(t) \quad \text{Si es ergódico, valor medio 0 y sin componente periódica}$$

⇒  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 0$

32



## Ejemplo

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1 + 6\tau^2}$$

$$E[X(t)] = \bar{X} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = 29 - 25 = 4$$

33



## Promedios en el tiempo y Ergodicidad

➤ Definimos

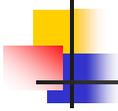
$$A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] dt$$

➤ Consideremos los siguientes promedios

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$R_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt$$

34



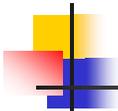
## Promedios en el tiempo y Ergodicidad

- Para una muestra del proceso, las dos integrales dan 2 números como resultado. Si todas las funciones del proceso son consideradas, entonces
- $R_{xx}(\tau)$  y  $\bar{x}$  son variables aleatorias

$$E[\bar{x}] = \bar{X}$$

$$E[R_{xx}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

35



## Ergodicidad

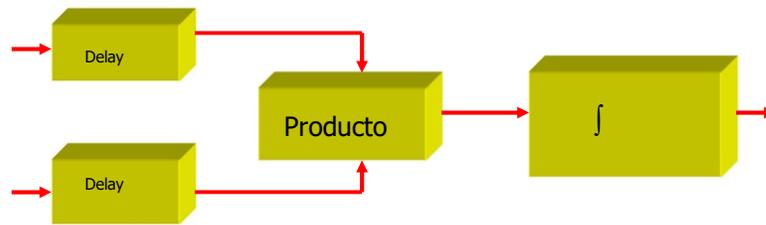
$$\bar{x} = \bar{X}$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Promedios temporales iguales a promedios estadísticos

36

## Medida de funciones de correlación



37

## Motivación

- Vimos Correlación
- Antes trabajamos en  $t$  y  $f$  para señales determinísticas y sis. lineales
- Ahora con señales aleatorias
- ¿ Dominio de  $f$  ?
- Propiedades espectrales  $\Rightarrow$  TF para señales determinísticas

38

## Densidad Espectral de Potencia

➤ Para un pa  $X(t)$ , siendo

$$x_T(t) \begin{cases} x(t) & -T < t < T \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Satisface  $\int_{-T}^T |x_T(t)| dt < \infty$  con  $T$  finito, tiene TF y aplicando el T. de Parseval

$$E(T) = \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega$$

39

## DEP(2)

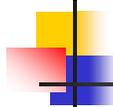
➤ Dividiendo por  $2T$

$$P(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

➤ Haciendo  $T \rightarrow \infty$  y tomando valor esperado

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

40



## DEP(3)

➤ Finalmente definimos la DEP

$$S_{XX}(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(w)|^2]}{2T}$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w) dw$$

41



## Propiedades

- (1)  $S_{XX}(w) \geq 0$
- (2)  $S_{XX}(-w) = S_{XX}(w)$       $X(t)$  real
- (3)  $S_{XX}(w)$  es real
- (4)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w) dw = A\{E[X^2(t)]\}$

42

## Relación entre Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

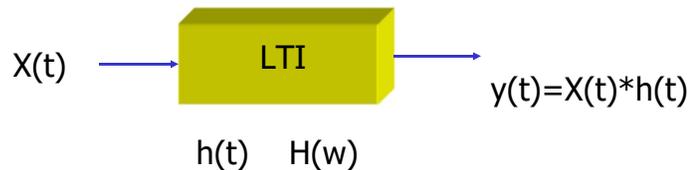
$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$o \quad R_{XX}(\tau) \leftrightarrow S_{XX}(\omega)$$

43

## Sistemas lineales con entradas aleatorias

$x(t)$  estacionario en sentido amplio

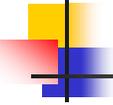


$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t) * h(t)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(t)$$

44



$$\begin{aligned}
 R_{YY}(t, t + \tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] \\
 &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t - u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t + \tau - v)dv\right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - u)X(t + \tau - v)]h(u)h(v)dudv \\
 R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau + u - v)h(u)h(v)dudv \\
 R_{YY}(\tau) &= R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad \leftarrow \\
 S_{YY}(f) &= |H(f)|^2 S_{XX}(f) \quad \leftarrow
 \end{aligned}$$

45



## DEP de la respuesta

$$S_{YY}(w) = S_{XX}(w) |H(w)|^2$$

46

## Ruido Blanco

- Tiene todas las  $f$ , como la luz blanca, es estacionario en sentido amplio :

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} = K = cte$$

$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

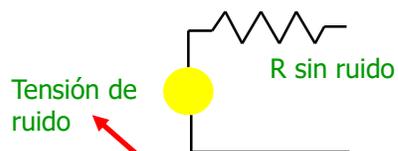
- No es realizable

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(f) df = \infty$$

47

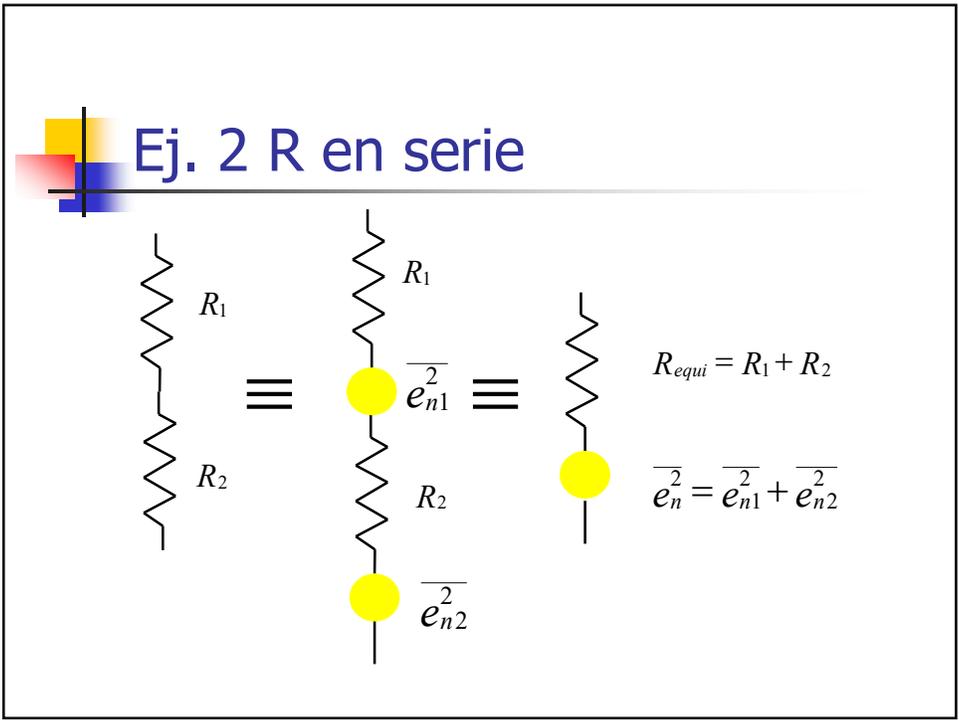
## Ruido térmico

- Debido a la agitación térmica
-  Resistencia "ruidosa"
- Su circuito equivalente



$$\overline{e_n^2} = \frac{2KT\Delta f}{\pi} R$$

48



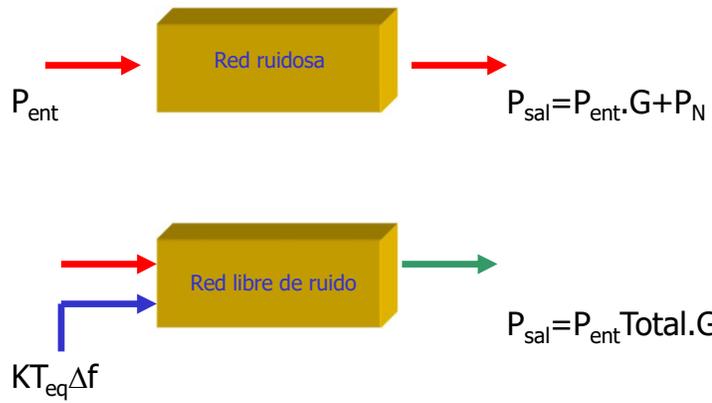
49

$$2K [T_1 R_1 + T_2 R_2] \Delta f = 2K [T_{equi} (R_1 + R_2) \Delta f]$$

$$T_{equiv} = \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2}{R_1 + R_2} \quad \leftarrow$$

50

## Temperatura equivalente de ruido



51