ANÁLISIS DE SEÑALES CURSO 2021

TRANSFORMADA DE FOURIER EN TC

PROF. JORGE RUNCO

1

TF EN TC

- Derivación del par TF de TC
- Ejemplos de TF
- TF de señales periódicas
- Propiedades de la TF en TC

2

DERIVACIÓN

- La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas f(t).

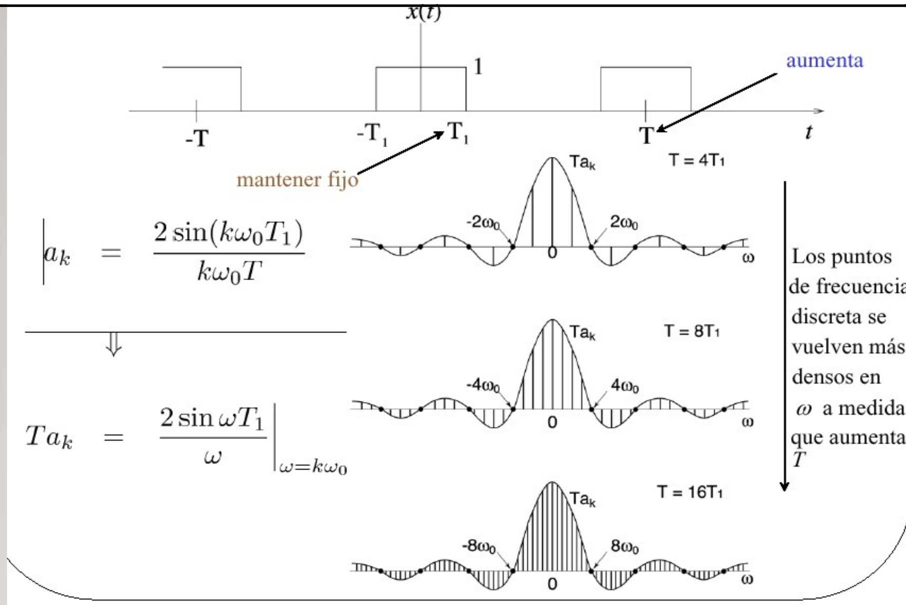
- ¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas?

DERIVACIÓN

- Sea x(t) una señal aperiódica. Pensemos como el límite de una señal periódica que $T \longrightarrow \infty$
- Para una señal periódica las componentes armónicas están separadas $w_0=2\pi/T$
- Como $T \longrightarrow \infty$, $w_0 \longrightarrow 0$ y las componentes armónicas están c/vez más cerca en f

$\Downarrow$

Serie de Fourier $\Rightarrow$ Integral de Fourier

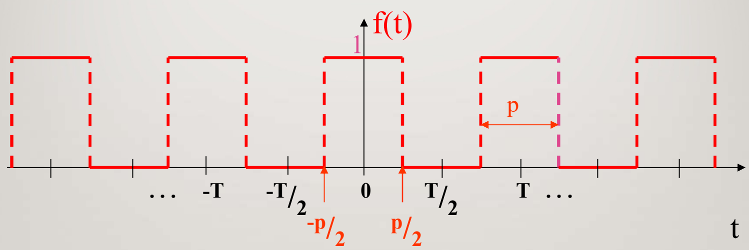


$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$\Downarrow$$

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

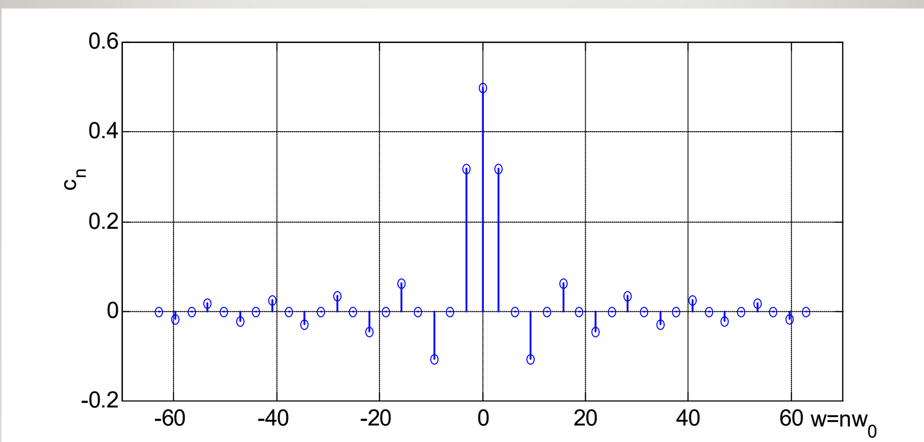
Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right) \frac{sen(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra w = nw_0.

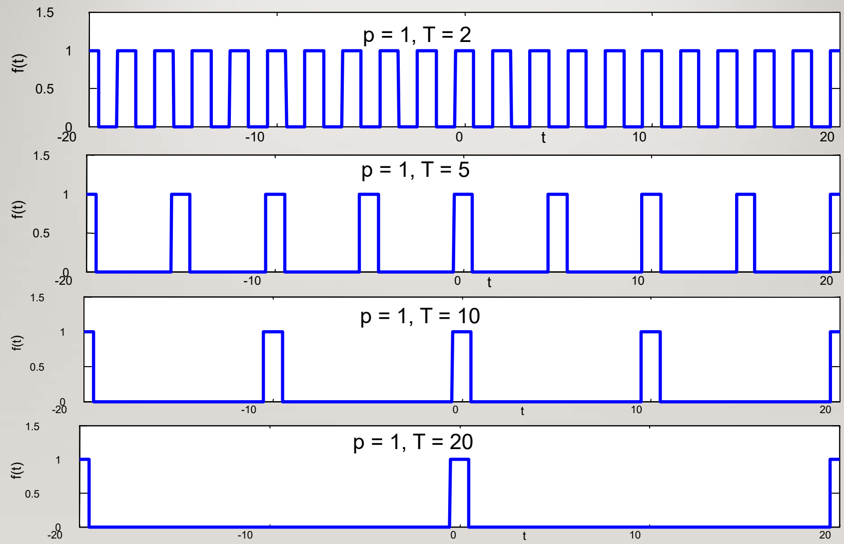
7

Espectro del tren de pulsos para p = 1, T = 2



8

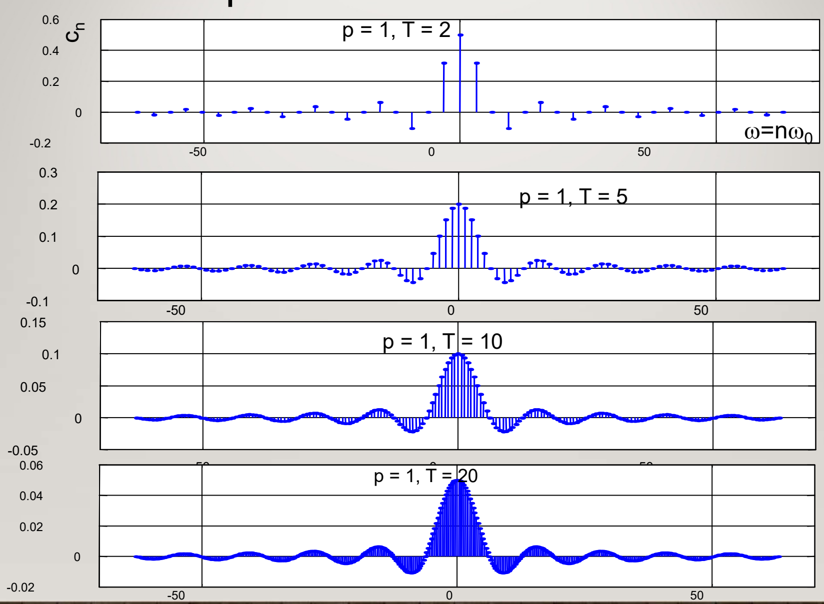
Si el período del tren de pulsos aumenta...



9

9

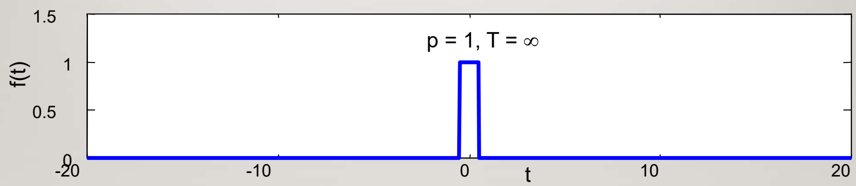
...el espectro se hace más "denso"



10

Derivación

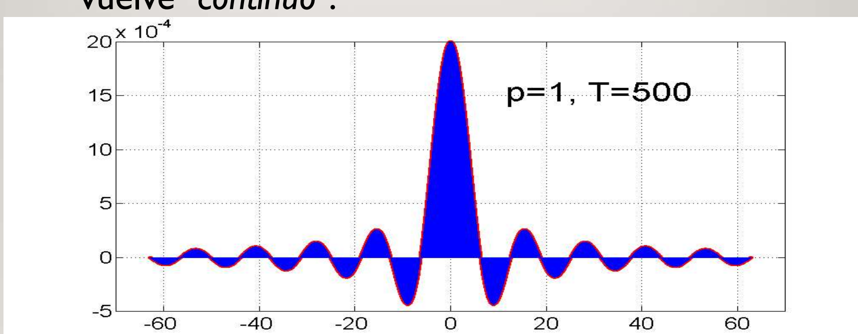
En el límite cuando T→∞, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Derivación

Si se hace T muy grande (T→∞), el espectro se vuelve "*continuo*":



DERIVACIÓN

- La señal periódica

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk w_0 t} \quad \text{donde}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-j w_0 k t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j w_0 k t}\, dt$$

- Si definimos

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\, w_0)$$

DERIVACIÓN

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\, w_0)\, e^{jk w_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0\, X(jk\, w_0)\, e^{jk w_0 t}$$

Dado que T $\longrightarrow \infty$ entonces $\Sigma w_0 \longrightarrow \int dw$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt} dt$$

Ecuación de síntesis

RESUMIENDO

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Identidad de Fourier o antitrans-formada de Fourier

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Transformada de Fourier

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión F(w) (dominio de la frecuencia) a partir de f(t) (dominio del tiempo) y viceversa.

PAR DE TF

- ✓ Las ecuaciones anteriores son conocidas como el par de transformadas de Fourier. Las señales periódicas las expresamos como una suma de exponenciales complejas de amplitud a_k y para un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para una sucesión contínua de frecuencias y de "amplitud" $X(jw)dw/2\pi$

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE LA SF Y LA TF

- Supongamos que es una señal periódica con período T y coeficientes de Fourier a_k. x(t) es una señal de duración finita que es igual a en un período, entonces

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

- ya que x(t) es cero fuera del intervalo T

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T} X(jw)\,\Big|_{w = k\,w_0}$$

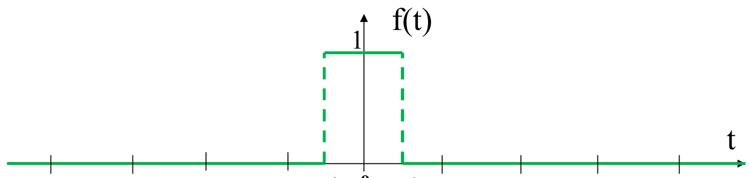
CONVERGENCIA DE LA TF

- Nos referiremos también como condiciones de Dirichlet :
- x(t) sea absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

- x(t) tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito
- x(t) tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además cada discontinuidad debe ser finita.

Ejemplo. Calcular F(ω) para el pulso rectangular f(t) siguiente:



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t\end{cases}$$

Integrando:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-p/2}^{p/2} e^{-i\omega t}dt$$

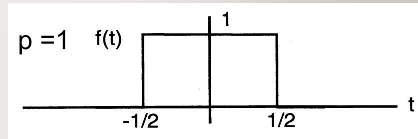
$$=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-p/2}^{p/2} =\frac{1}{-i\omega}\left(e^{-i\omega p/2}-e^{i\omega p/2}\right)$$

Usando la fórmula de Euler:

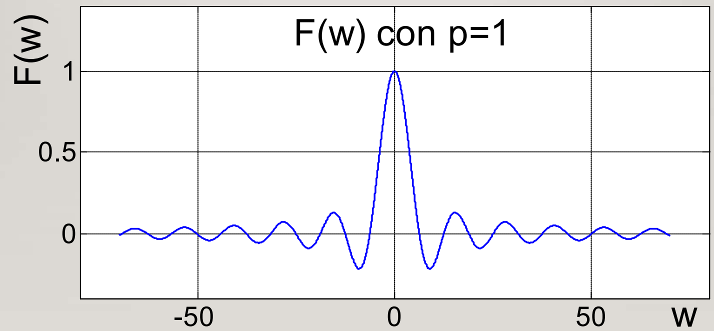
$$sen(\omega p/2)=\frac{e^{i\omega p/2}-e^{-i\omega p/2}}{2i}$$

$$F(\omega)=p\,\frac{sen(\omega p/2)}{\omega p/2}=p\,\mathrm{sinc}(\omega p/2)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

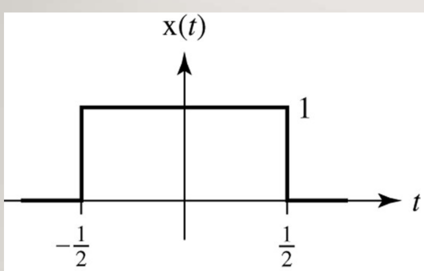


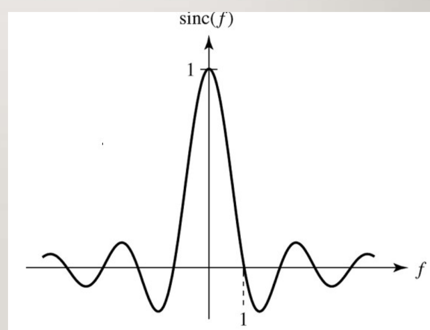
$$F(\omega) = p\,\mathrm{sinc}(\omega p/2)$$



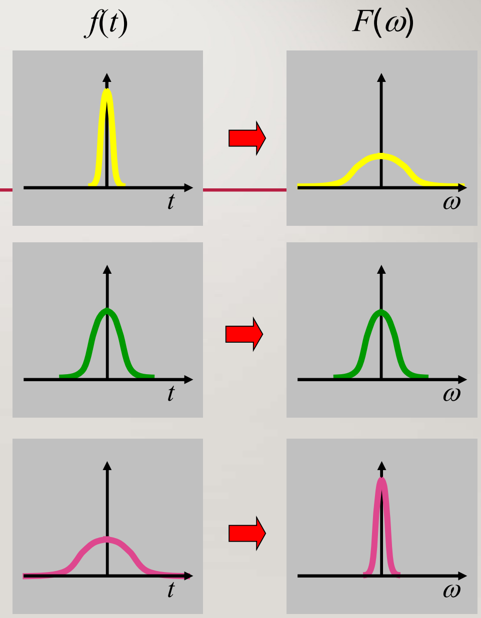
21

EJEMPLO





22



Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

LINEALIDAD

- ✓ Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$

  y

- ✓ $y(t) \longleftrightarrow Y(jw)$

  entonces

- ✓ $ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(jw)+bY(jw)$

DESPLAZAMIENTO DE TIEMPO

✓Si x(t) $\longleftrightarrow$ X(jw)

entonces

✓ x(t-t_0) $\longleftrightarrow$ e^{-jwto} X(jw)

Prof. Jorge Runco Curso 2021 25

25

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jwX(jw)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \leftrightarrow \frac{1}{jw} X(jw) + \pi X(0)\delta(w)$$

Prof. Jorge Runco Curso 2021 26

26

ESCALAMIENTO DE TIEMPO Y FRECUENCIA

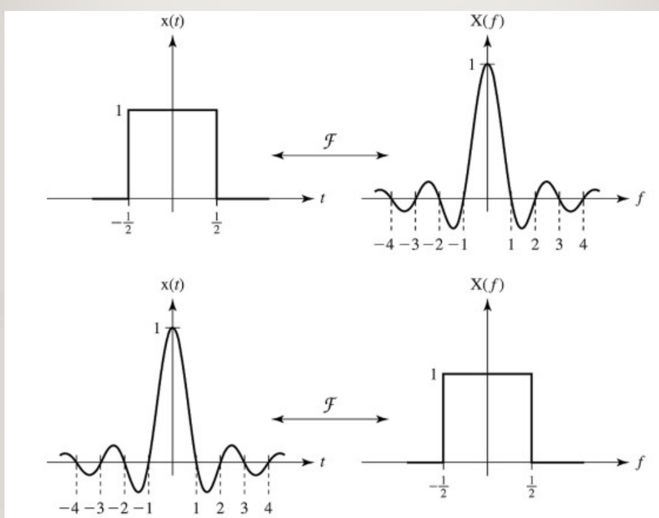
- ✓ Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$

  entonces

- ✓ $x(at) \longleftrightarrow 1/|a|.\ X(jw/a)$

27

DUALIDAD



28

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Intregración	$\int_{-\infty}^{t}x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega)=X(j\omega)^* \\ \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert \\ \angle X(j\omega)=-\angle X(-j\omega) \end{cases}$

RELACIÓN DE PARSEVAL

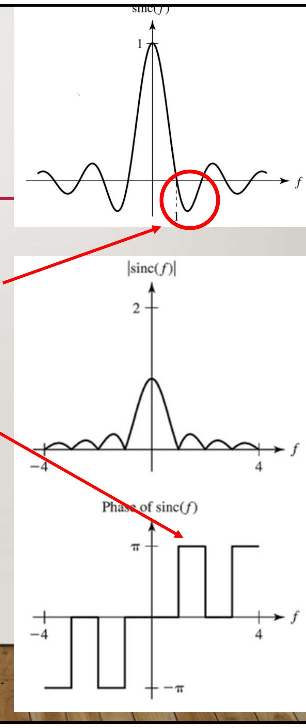
$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(jw)|^2\,dw$$

La energía total se puede calcular ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo integrando para todo tiempo, ó calculando la energía por unidad de frecuencia e integrando para todas las frecuencias.

Un ejemplo: F{rect(t)}

- $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\, dt$
- $= \int_{-1/2}^{+1/2} 1\,.\,e^{-j2\pi f t}\, dt$
- $= -\frac{1}{j2\pi f}\ e^{-j2\pi f t}\Big|_{-1/2}^{+1/2}$
- $= -\frac{1}{j2\pi f}\ \left[e^{-j2\pi f\frac{1}{2}} - e^{+j2\pi f\frac{1}{2}}\right]$
- $= \frac{e^{+j2\pi f\frac{1}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{1}{2}}}{2j}\ \frac{1}{\pi f}$
- $= \frac{\sin \pi f}{\pi f} = sinc(f)$

La amplitud tiene signo negativo. En fase corresponde a un ángulo de π grados



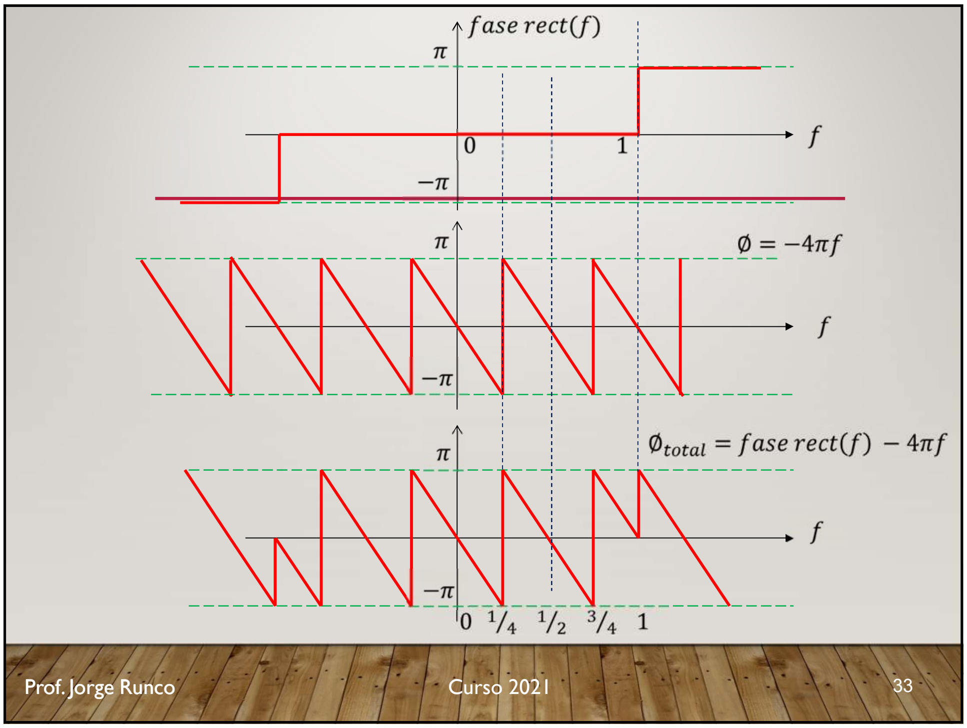
31

Otro ejemplo x(t)=rect(t-2)

- $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\, dt$
- $= \int_{3/2}^{5/2} 1\,.\,e^{-j2\pi f t}\, dt$
- $= -\frac{1}{j2\pi f}\ e^{-j2\pi f t}\Big|_{3/2}^{5/2}$
- $= -\frac{1}{j2\pi f}\ \left[e^{-j2\pi f\frac{5}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{3}{2}}\right]$
- $= \frac{e^{+j2\pi f\frac{1}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{1}{2}}}{2j}\ \frac{e^{-j2\pi f 2}}{\pi f}$
- $= e^{-j2\pi f 2}\frac{\sin \pi f}{\pi f} = e^{-j2\pi f 2} sinc(f)$

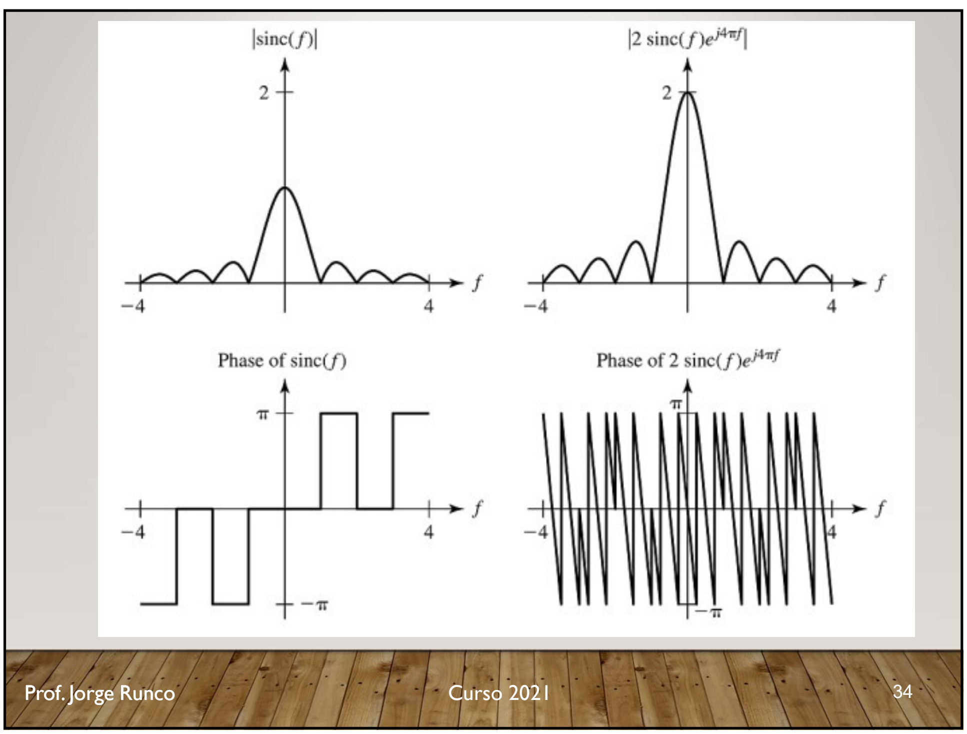
- $Módulo \ \rightarrow\ \left|e^{-j2\pi f 2}\right| = 1$
- $Fase\ \rightarrow e^{-j2\pi f 2} = \cos 2\pi f 2 - j \sin 2\pi f 2$
- $\emptyset = \tan^{-1} - \frac{\sin 2\pi f 2}{\cos 2\pi f 2}\ \rightarrow\ \emptyset = -2\pi f 2$

32



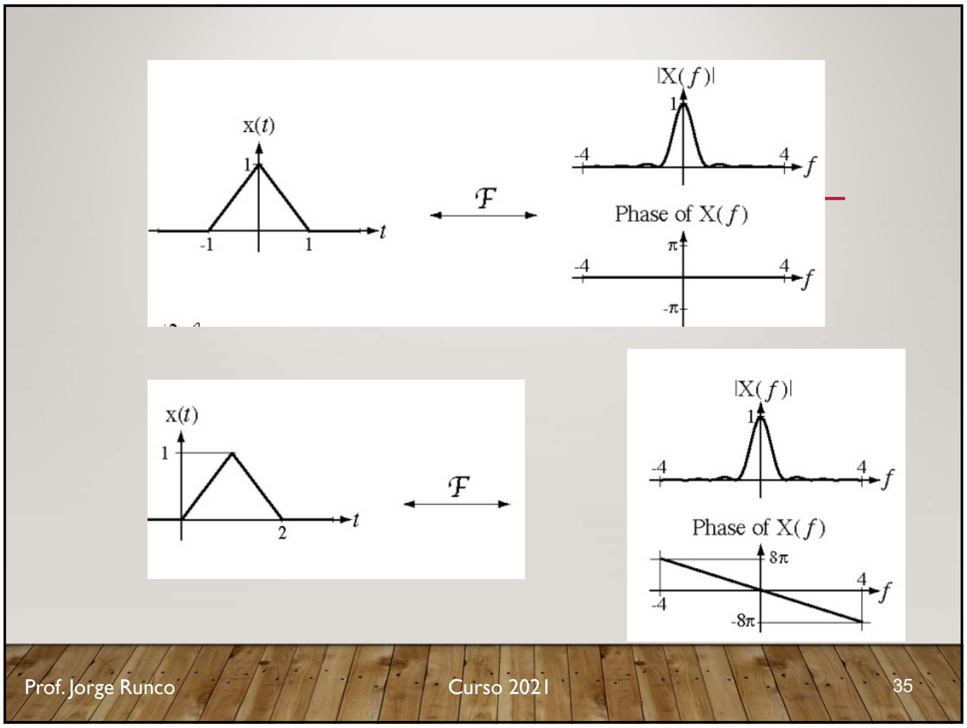
$fase\ rect(f)$
π
f
0
1
$-\pi$
π
$\emptyset = -4\pi f$
f
$-\pi$
π
$\emptyset_{total} = fase\ rect(f)\ - 4\pi f$
f
$-\pi$
0 $1/4$ $1/2$ $3/4$ 1
Prof. Jorge Runco
Curso 2021
33

33

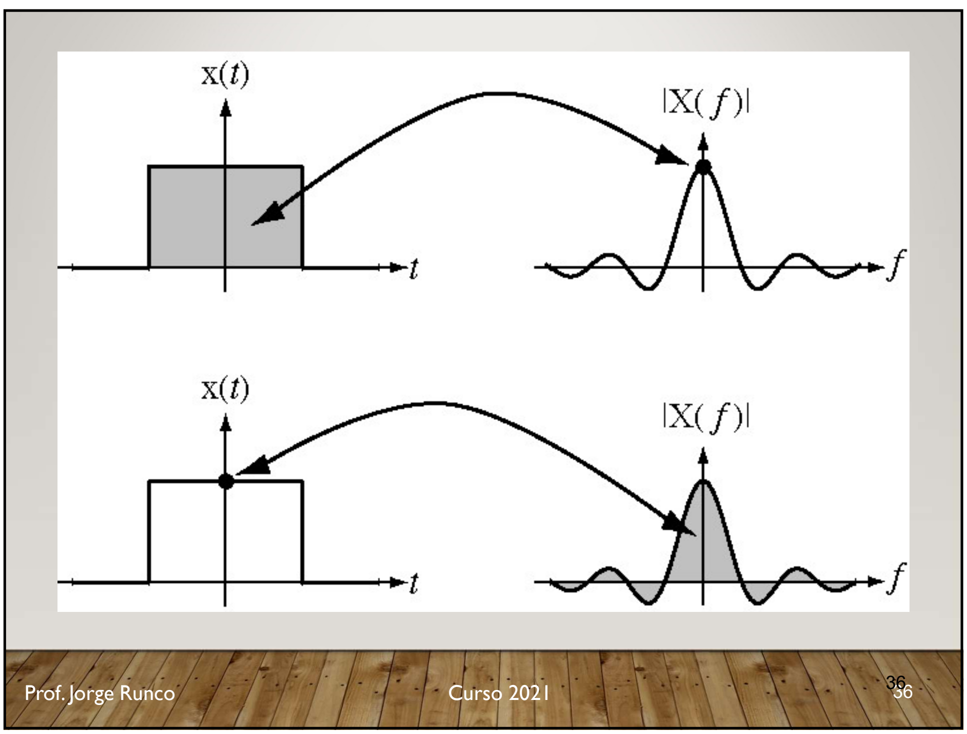


$|\text{sinc}(f)|$
$|2\ \text{sinc}(f)e^{j4\pi f}|$
2
f
−4
4
Phase of sinc(f)
Phase of 2 sinc(f)$e^{j4\pi f}$
π
$-\pi$
Prof. Jorge Runco
Curso 2021
34

34

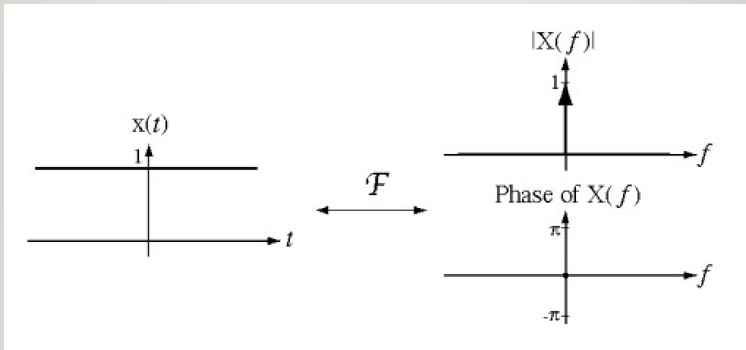

x(t)
1
-1
1
t
ℱ
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
π
-4
4
f
-π
x(t)
1
2
t
ℱ
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
8π
4
f
-4
-8π
Prof. Jorge Runco
Curso 2021
35

35


x(t)
|X(f)|
t
f
x(t)
|X(f)|
t
f
Prof. Jorge Runco
Curso 2021
36

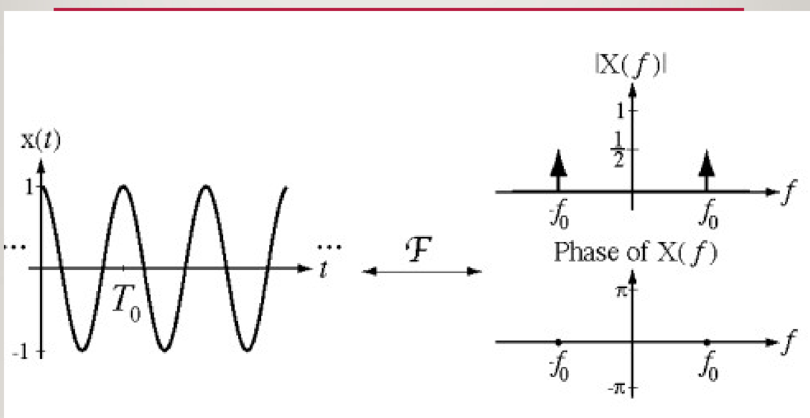
36

$1 \longleftrightarrow \delta(F)$



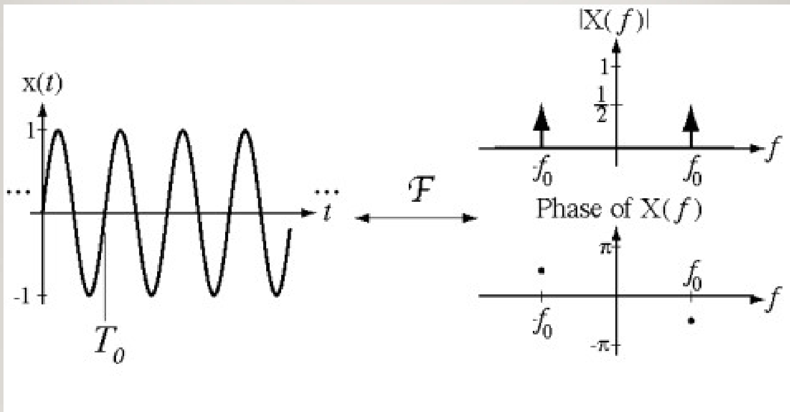
37

$\cos 2\pi F_0 T \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(F-F_0)+\delta(F+F_0)]$

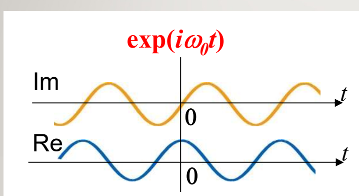


38

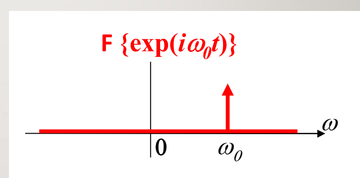
SEN $2\pi F_0 T$ $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{2}J[\delta(F+F_0)-\delta(F-F_0)]$

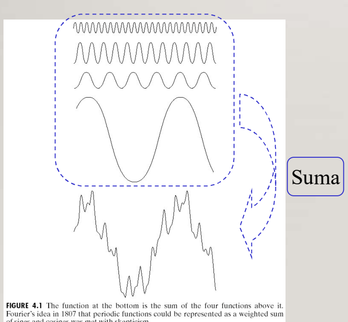


En forma más general:

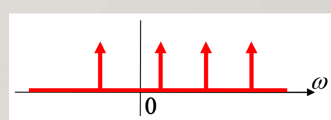


TF





TF

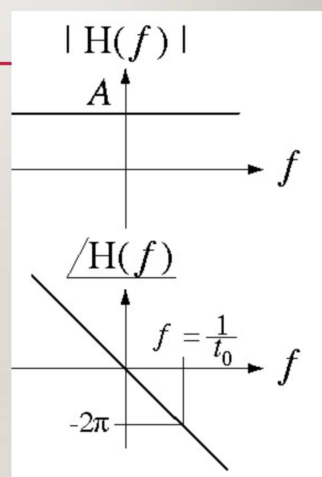


FILTROS IDEALES EN TC

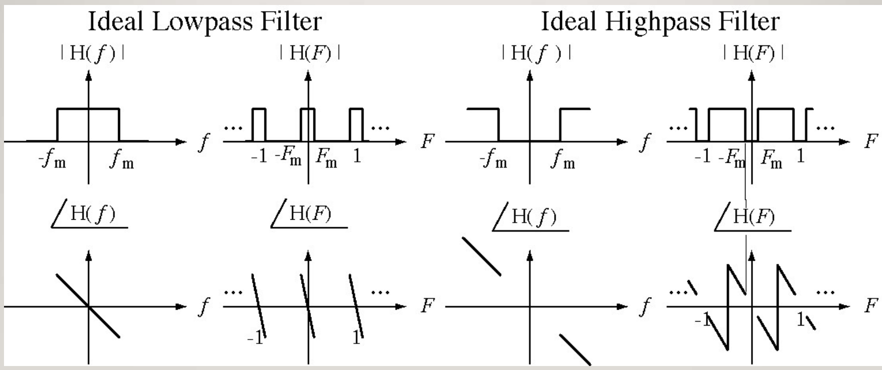
- Filtro: separa lo deseado de lo que no es deseado.
- En señales un filtro separa señales en un rango de f, de señales en otro rango de f.
- Un filtro ideal “pasa” toda la señal en su banda de paso sin distorsión y bloquea la señal fuera de su banda.

FILTRO IDEAL

- Un filtro ideal tiene una relación de amplitudes entre entrada y salida |H(f)| constante. Quiere decir que todas las componentes son igualmente atenuadas ó amplificadas.
- En cuanto a la fase tiene que ser lineal con la frecuencia. Es decir que todas las componentes son atrasadas la misma cantidad de tiempo, no la misma fase. El atraso en tiempo está dado por la pendiente de la fase (derivada).



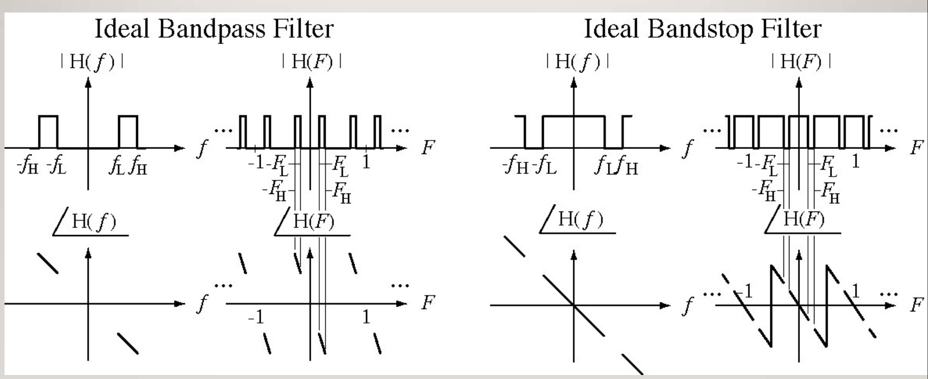
PASA BAJOS IDEAL – PASA ALTOS IDEAL



Prof. Jorge Runco Curso 2021 43

43

PASA BANDA IDEAL – RECHAZO DE BANDA IDEAL

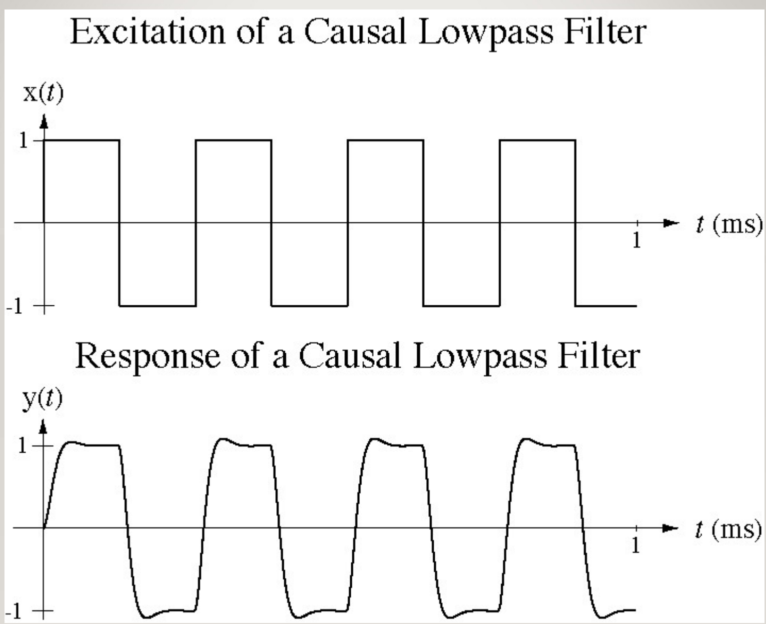


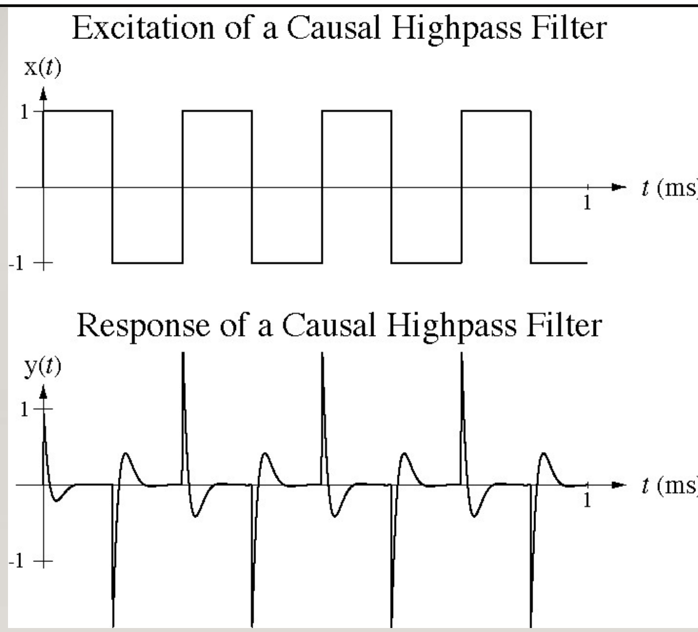
Prof. Jorge Runco Curso 2021 44

44

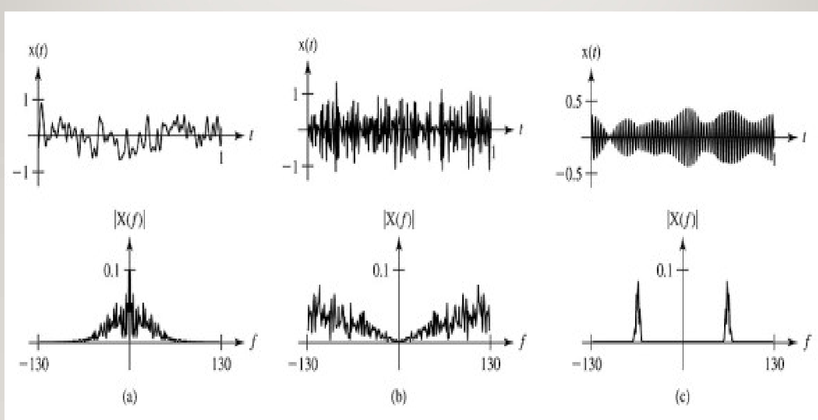
ANCHO DE BANDA

- Rango de f.
- Rango de frecuencias que deja pasar el filtro ó rango de frecuencias presentes en la señal.





CONTENIDO EN F



TFTC APLICADA A SISTEMAS LIT

- Como vimos en clases anteriores, un sistema LIT se puede modelar mediante una ecuación diferencial con coeficientes constantes:
- $\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^{M} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}$
- Ya que las señales exponenciales son funciones propias de estos sistemas, entonces la respuesta permanente del sistema es la señal de entrada multiplicada por el valor propio del sistema (lo vimos con SFTC).

- Si hacemos la TF
- $\sum_{n=0}^{N} a_n F\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\} = \sum_{n=0}^{M} b_n F\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\}$
- Aplicando la propiedad de diferenciación se obtiene
- $\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n Y(j\omega) = \sum_{n=0}^{M} b_n (j\omega)^n X(j\omega)$
- Como la sumatoria afecta a (jw)
- $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n (j\omega)^n}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n}$
- $H(j\omega)$ Representa la respuesta en frecuencia del sistema.

- O sea que si conocemos la respuesta en frecuencia de un sistema, la respuesta permanente para una entrada x(t) específica será:
- $Y(j\omega) = H(j\omega)\, X(j\omega)$
- Recordando que $y(t) = h(t) \ * \ x(t)$
- Podemos concluir que
- $h(t) \ \overset{F}{\leftrightarrow} \ H(j\omega)\, forman\, un\, par\, transformado$

$de\, Fourier$

51