Prof. Jorge M. Runco

Análisis de Señales Curso 2021

Descripción matemática de señales
Prof. Jorge Runco

1

Prof. Jorge M. Runco

Señales

- La señal es el fenómeno físico real que lleva información
- La función es una descripción matemática de la señal
- La señal (cuando sea posible) será descripta mediante funciones matemáticas
- A lo largo del curso vamos a estudiar a estas señales/funciones y cómo son afectadas al ser transmitidas y/o procesadas por distintos sistemas

2

Señales

Prof. Jorge M. Runco

- Las señales son funciones de variables independientes, portadoras de información
- Señales eléctricas: tensiones y corrientes en un circuito
- Señales acústicas: audio
- Señales de video: variación de la intensidad
- Señales biológicas: secuencias de bases de un gen

3

Señales: Clasificación - Variables independientes

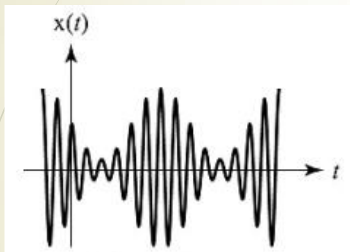
Prof. Jorge M. Runco

- Pueden ser continuas
- Pueden ser discretas
- Pueden ser 1-D, 2-D.....N-D
- Para este curso: tiempo. Var. Indep.1-D
- tiempo continuo (TC) $x(t)$ ➡ t toma valores continuos
- tiempo discreto (TD) $x[n]$ ➡ n toma valores enteros

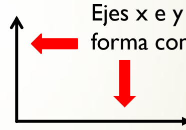
4

Prof. Jorge M. Runco

Señales en TC :analógicas



Amplitud y tiempo continuos
x(t) y t valores continuos



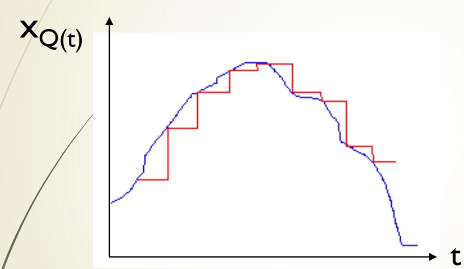
Ejes x e y varían en forma continua

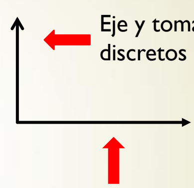
La mayoría de las señales del mundo físico son del tipo TC. Por ej. tensión, corriente, presión, temperatura y velocidad

5

Prof. Jorge M. Runco

Señales en TC: cuantizadas





Eje y toma valores discretos

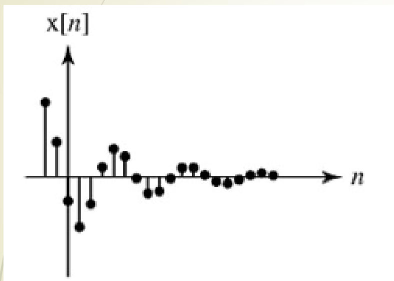
Eje x varía en forma continua

Tiempo continuo, amplitud discreta. La amplitud solo toma determinados valores.

6

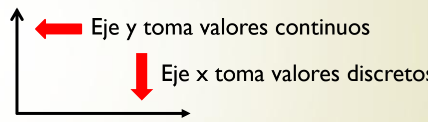
Prof. Jorge M. Runco

Señales en TD :muestreadas



Muestreadas: tiempo discreto amplitud continua - x[n]

n → valores enteros



Señales en TD en la naturaleza

- Secuencia de bases ADN
- Población de especies

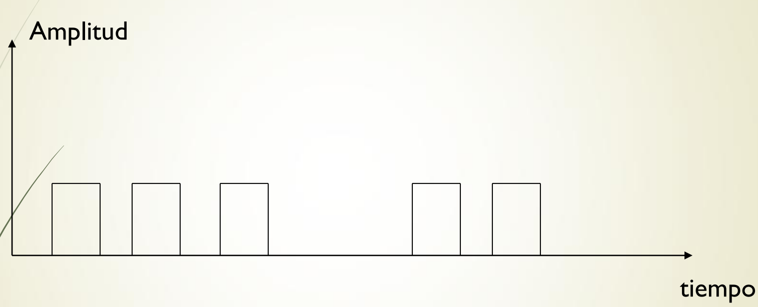
En TD hechas por el hombre

- Imagen digital
- Interés bancario

7

Prof. Jorge M. Runco

Digitales



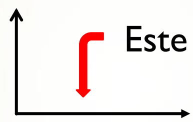
Discreta en amplitud y en tiempo

8

Prof. Jorge M. Runco

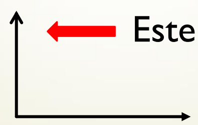
Resumiendo

- Tiempo continuo ó discreto



Este eje es continuo ó discreto

- Analógico ó digital



Este eje es continuo ó discreto

9

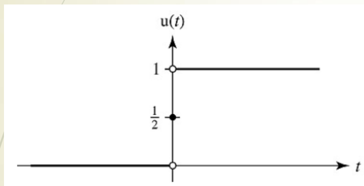
Prof. Jorge M. Runco

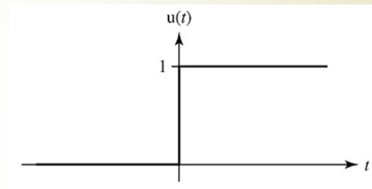
FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO

10

Prof. Jorge M. Runco

Función escalón unitario





$$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ \frac{1}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

11

Prof. Jorge M. Runco

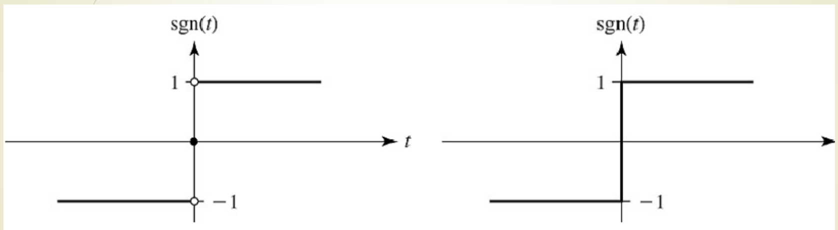
Función escalón unitario

- Recordemos de Física al cerrar un interruptor y conectar una fuente de tensión continua
- Si bien las dos funciones anteriores son distintas, una integral definida en cualquier intervalo da el mismo resultado
- En general usamos la función de la derecha.
- De todas maneras ningún proceso físico real puede cambiar una cantidad finita en tiempo cero.
- Ambas funciones tienen el mismo efecto en sistema físico real

12

Prof. Jorge M. Runco

Función signo



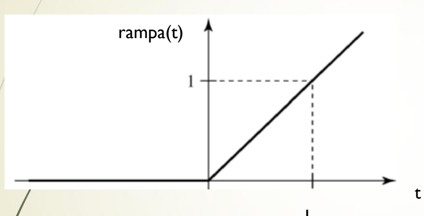
$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

13

Prof. Jorge M. Runco

Función rampa unitaria



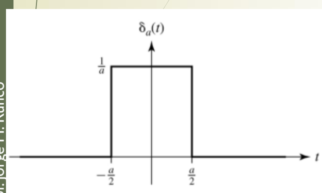
La función rampa en TC es la integral de la función escalón unitario

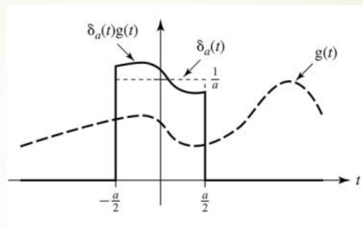
$$rampa(t)=\begin{Bmatrix} t & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{Bmatrix}=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t)$$

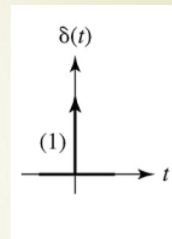
14

Función impulso unitario

Prof. Jorge M. Runco







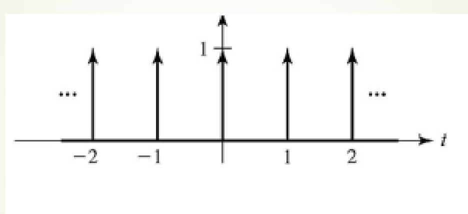
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) g(t)\, dt = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(t)\, dt$$

$$\lim_{a \to 0} A = g(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dt = g(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}(a) = g(0)$$

15

Tren de impulsos unitarios

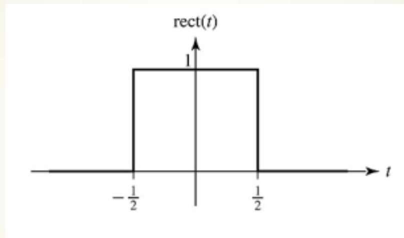
Prof. Jorge M. Runco



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - T)$$

16

Función rectángulo unitario

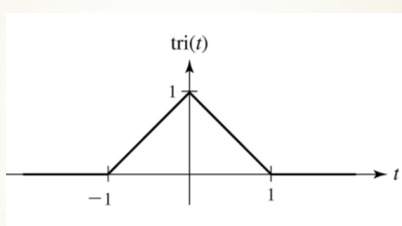


$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Prof. Jorge M. Runco

17

Función triángulo unitario

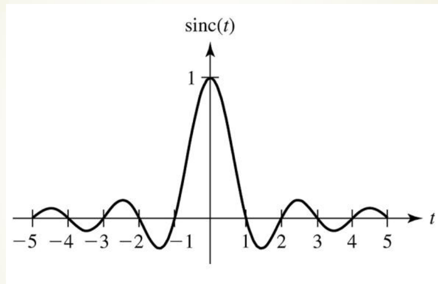


$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Prof. Jorge M. Runco

18

Función sinc unitaria



$$\mathrm{sinc(t)} = \frac{\mathrm{sen}(\pi\,\mathrm{t})}{\pi\,\mathrm{t}}$$

19

Función de Dirichlet

$$drcl(t,N) = \frac{sen(\pi\,Nt)}{N\,sen(\pi\,t)}$$

El numerador es 0 cuando t es múltiplo entero de 1/N.

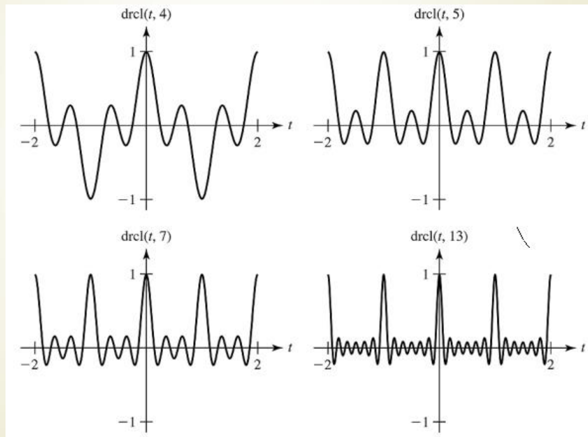
La función vale 0 en esos puntos salvo que el denominador sea también sea 0.

Si N es par los extremos se alternan entre +1 y –1.

Si N es impar todos los extremos son +1.

20

Función de Dirichlet



Prof. Jorge M. Runco

21

Transformaciones de las variables dependiente e independiente

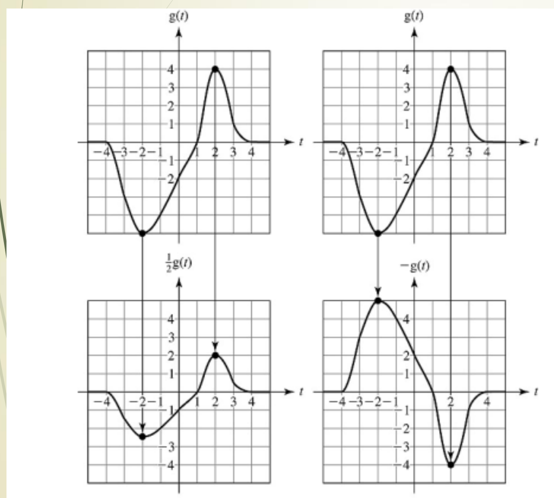
- Escalamiento de amplitud (vd)
- Desplazamiento en el tiempo (vi)
- Escalamiento en el tiempo (vi)
- Transformaciones múltiples (vd y vi)

Prof. Jorge M. Runco

22

Escalamiento en amplitud

Prof. Jorge M. Runco



g(t) ⟶ Ag(t)

Para cada valor de t se multiplica a g(t) por A.

A puede ser + ó -, mayor ó menor que 1.

23

Escalamiento en amplitud

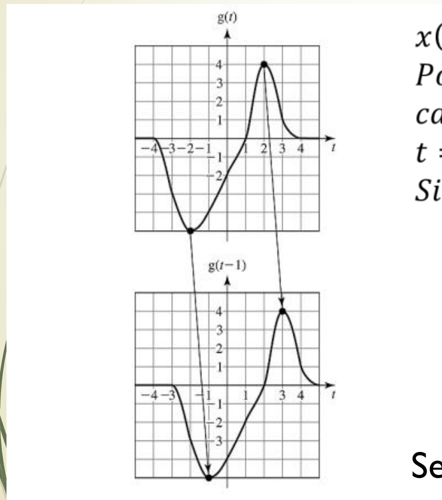
Prof. Jorge M. Runco

Valor de A	Transformación en g(t)
|A| > 1	Amplifica
0 < |A| < 1	Atenúa
|A| < 0	Invierte

24

Prof. Jorge M. Runco

Desplazamiento en el tiempo



$x(t) \rightarrow x(t - t_0)$
Podemos pensarlo como un cambio de variables
$t = t_n - t_0 \rightarrow t_n = t + t_0$
$Si \quad t_0 = 1$

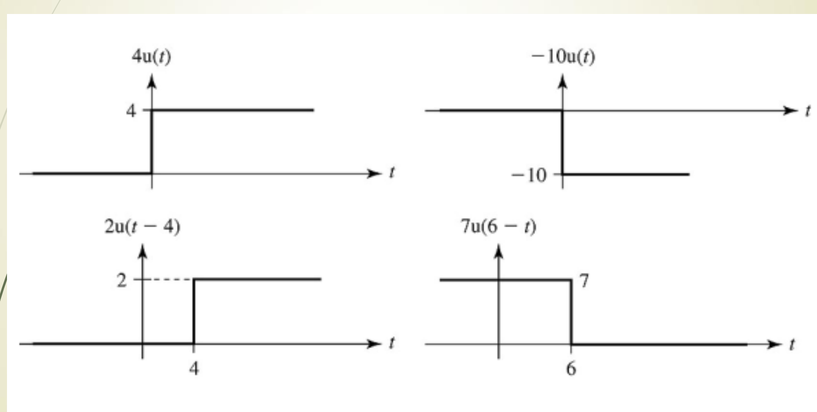
t	t_n
-4	-3
-3	-2
1	2

Se corre hacia la derecha

25

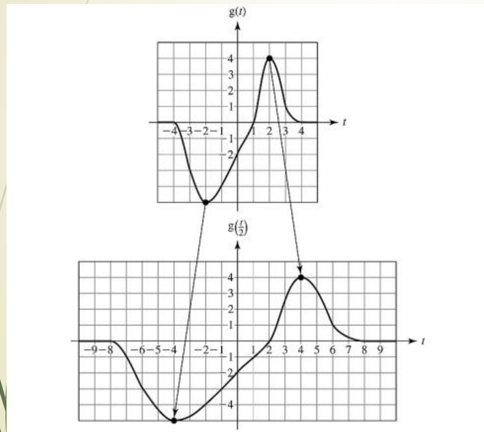
Prof. Jorge M. Runco

Ej. Funciones escalón transformadas



26

Escalamiento en el tiempo



$x(t) \rightarrow x(at)$

$t = at_n \;\rightarrow\; t_n = \dfrac{t}{a}$

$Para\;\; a = {}^{1}/_{2}$

t	t_n
-4	-8
-3	-6
1	2

Prof. Jorge M. Runco

27

Escalamiento en el tiempo

El escalamiento en tiempo de una señal corresponde a comprimir o expandir la señal en el tiempo, esto es, se escala la variable independiente mediante cambios lineales en la misma.

Valor de A	Transformación en g(t)
a > 1	Señal comprimida
0 < a < 1	Señal expandida
a < 0 y ≠ 1	Señal invertida y escalada

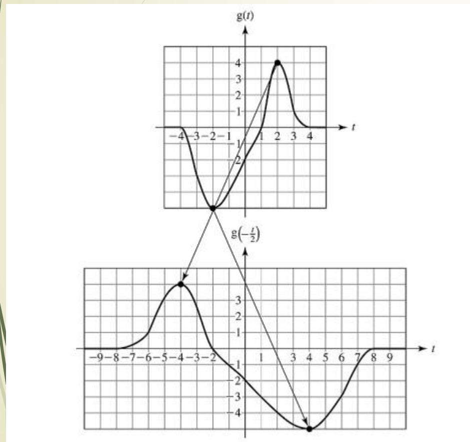
$x(t) \rightarrow x(at)$

$t = at_n \;\rightarrow\; t_n = \dfrac{t}{a}$

Prof. Jorge M. Runco

28

Escalamiento en el tiempo



$x(t) \rightarrow x(at)$

$t = at_n \;\rightarrow\; t_n = \dfrac{t}{a}$

$Para\;\; a = -{}^{1}/_{2}$

t	t_n
-4	8
-3	6
1	-2

29

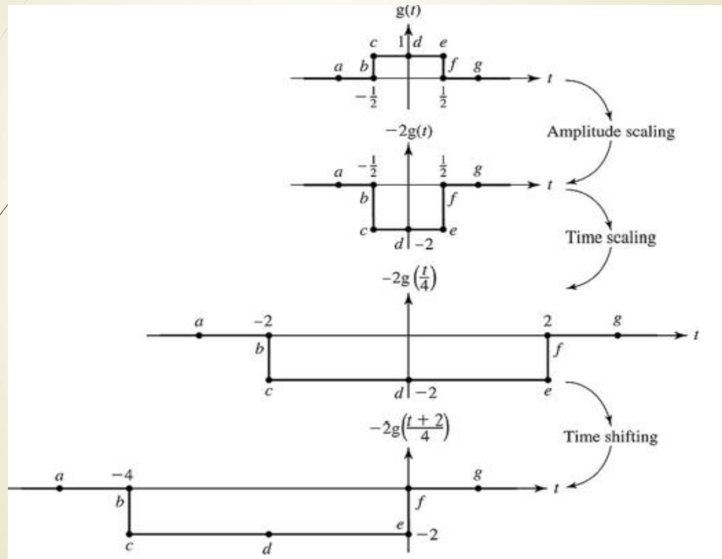
Transformaciones múltiples

- Para hacer la siguiente transformación, ¿qué se hace primero? $g(t) \overset{?}{\rightarrow} A\,g(\frac{t-t_0}{a})$
- $g(t) \overset{A}{\rightarrow} Ag(t) \xrightarrow{escalamiento\ en\ t} g\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{retardo} g(\frac{t-t_0}{a})$
- Pensemos lo mismo para $g(t) \overset{?}{\rightarrow} g(\frac{t}{a} - t_0)$
- $g(t) \overset{A}{\rightarrow} Ag(t) \xrightarrow{retardo} g(t - t_0) \xrightarrow{escalamiento\ en\ t} g(\frac{t}{a} - t_0)$

30

Prof. Jorge M. Runco

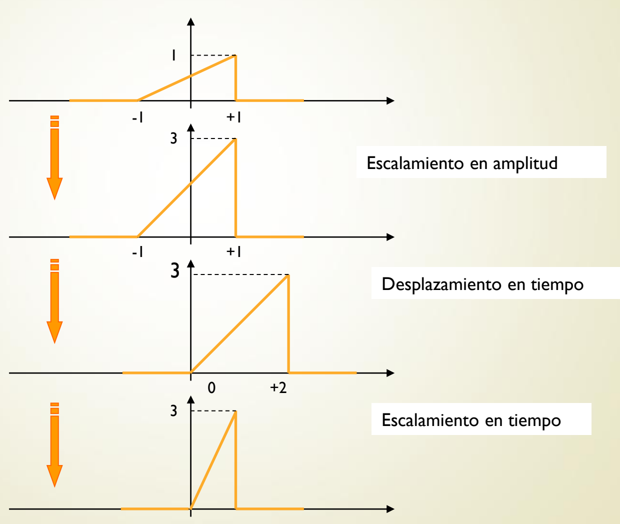
Transformaciones múltiples



31

Prof. Jorge M. Runco

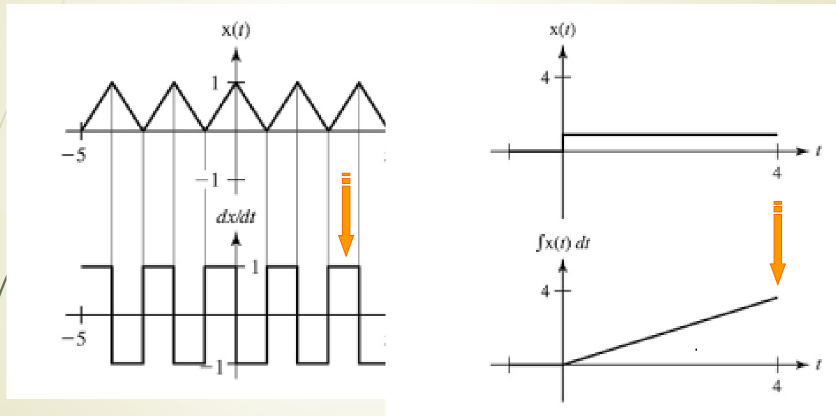
Transformaciones múltiples



32

Prof. Jorge M. Runco

Diferenciación e Integración



33

Prof. Jorge M. Runco

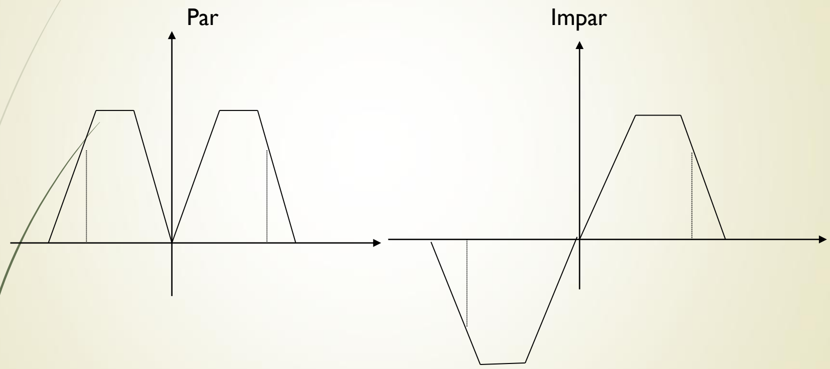
Funciones Par e Impar en TC

- Función par ➡ g(t)=g(-t)
- Función impar ➡ g(t)=-g(-t)
- Una forma de reconocer una función par, el eje de las ordenadas es un espejo.
- Para una función impar las mismas dos imágenes son en espejo negativas una de otra.

34

Prof. Jorge M. Runco

Funciones Par e Impar en TC



35

Prof. Jorge M. Runco

Ni Par Ni Impar

- Cualquier función g(t), incluso si no es par ni impar, puede expresarse como la suma de sus partes par e impar:

$$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} \qquad g_o(t) = \frac{g(t)-g(-t)}{2}$$

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

36

Prof. Jorge M. Runco

Funciones periódicas en TC

- Una función g(t) es periódica si
- $g(t)=g(t+nT)$
- Para cualquier valor entero de n donde T es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental To.
- La frecuencia fundamental fo=1/To ciclos/seg ó Hz (Hertz)
- La frecuencia fundamental en radianes por segundo $\omega o=2\pi fo$.

37

Prof. Jorge M. Runco

Ej. $f(t)=\cos w_1t + \cos w_2t$

- Si la función es periódica con período T, entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que
- $w1T=2\pi m$ $w1/w2=m/n$
- $w2T=2\pi n$
- Es decir la relación w1/w2 debe ser un número racional.

38

Prof. Jorge M. Runco

Señales periódicas exponencial compleja y senoidal

- Consideremos la siguiente exponencial compleja :
- Propiedad importante: es periódica
- Para ser periódica

$$x(t) = e^{j w_0 t}$$

$$e^{j w_0 t} = e^{j w_0 (t+T)} = e^{j w_0 t} e^{j w_0 T}$$

$$e^{j w_0 T} = 1$$

39

Prof. Jorge M. Runco

Señales exponenciales y senoidales

- Si $\omega_0 = 0$ entonces $x(t) = 1$ periódica para cualquier valor de T.
- Si $\omega_0 \neq 0$ entonces el período fundamental T0, el valor positivo más pequeño de T que cumple con

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

40

Recordando relación :

exponencial compleja ➡ señal senoidal

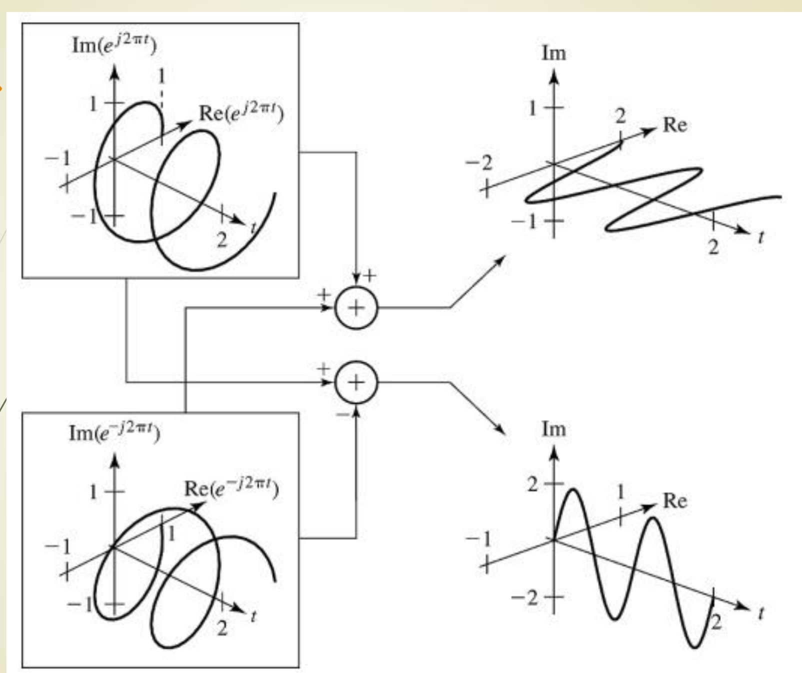
$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\, sen\,\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = Re\{e^{j\omega_0 t}\}$$

$$sen\,\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = Im\{e^{j\omega_0 t}\}$$

Prof. Jorge M. Runco

41



Prof. Jorge M. Runco

42

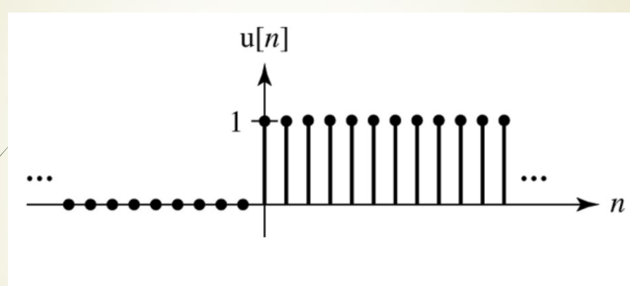
FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Prof. Jorge M. Runco

43

Secuencia unitaria

Prof. Jorge M. Runco

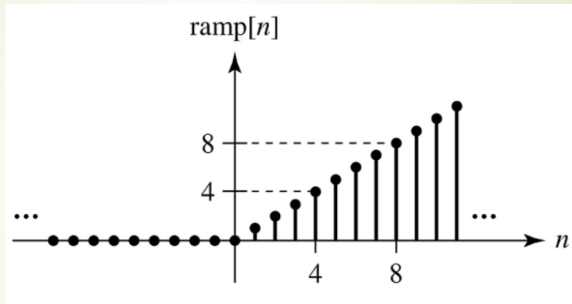


$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

44

Prof. Jorge M. Runco

Función rampa unitaria

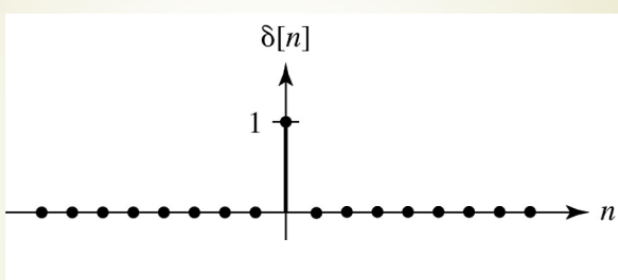


$$rampa[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

45

Prof. Jorge M. Runco

Impulso unitario

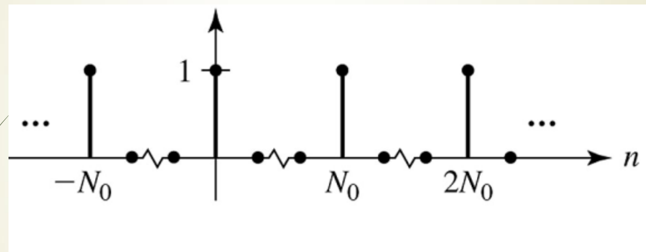


$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

46

Tren de impulsos unitarios

Prof. Jorge M. Runco

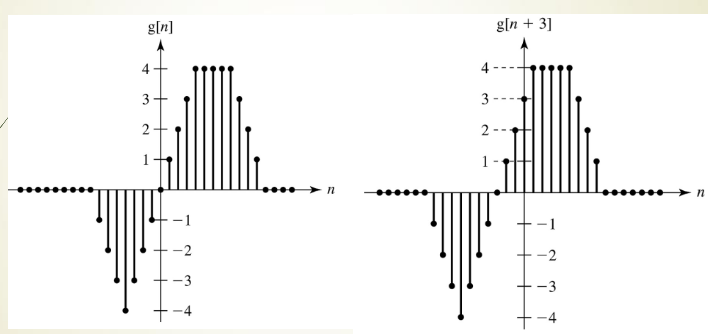


$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - m\,N_0]$$

47

Desplazamiento en TD

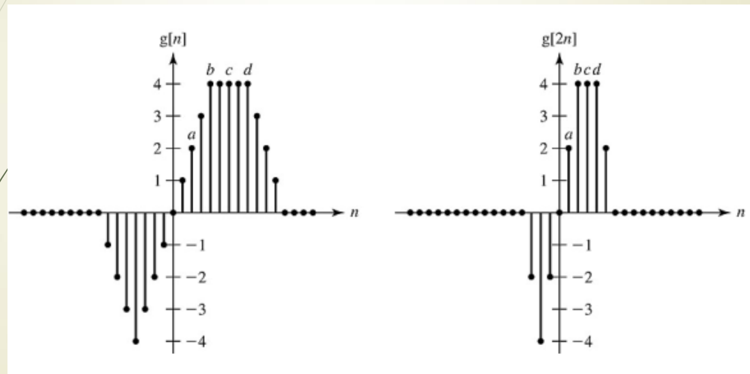
Prof. Jorge M. Runco



48

Escalamiento en TD

Prof. Jorge M. Runco



49

Funciones Par e Impar en TD

Prof. Jorge M. Runco

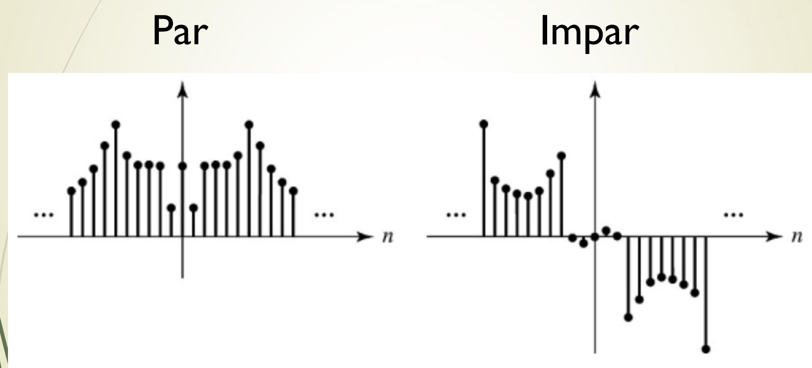
- Es par si ➡ g[n]=g[-n]
- Es impar si ➡ g[n]=-g[-n]
- Igual que en TC, definimos

$$g_e[n] = \frac{g[n] + g[-n]}{2} \qquad g_o[n] = \frac{g[n] - g[-n]}{2}$$

50

Ejemplos

Prof. Jorge M. Runco



51

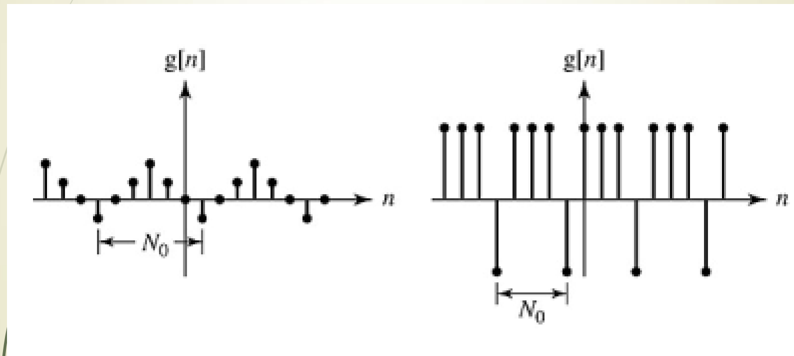
Funciones periódicas en TD

Prof. Jorge M. Runco

- Una función g[n] es periódica si
- $$g[n]=g[n+mN]$$
- Para cualquier valor entero de m donde N es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental No.
- La frecuencia fundamental fo=1/No ciclos/muestra
- La frecuencia fundamental en radianes por muestra $\omega o=2\pi fo$.

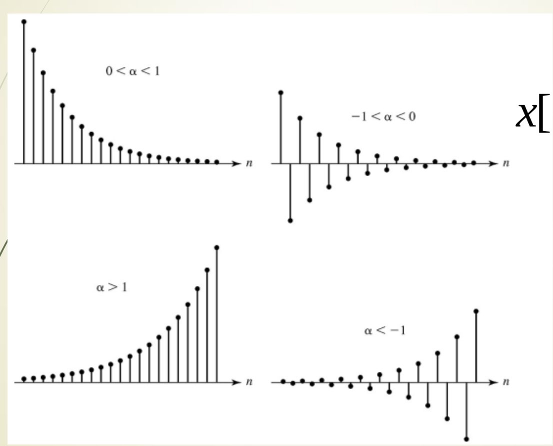
52

Funciones periódicas en TD



53

Exponencial real en TD



$$x[n] = C\,\alpha^{n}$$

54

Periodicidad de exponenciales discretas(1)

Prof. Jorge M. Runco

- Para tiempo continuo vimos dos propiedades de $e^{j\omega_0 t}$
- Mientras más grande la magnitud de w_0 mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
- Es periódica para cualquier valor de w_0.
- Veamos estas propiedades en TD

55

Periodicidad de exponenciales discretas(2)

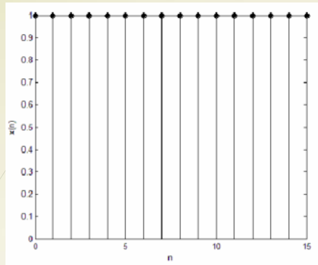
Prof. Jorge M. Runco

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}\, e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

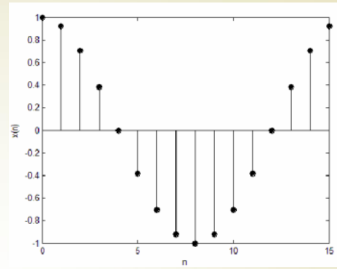
Vemos que la exponencial $w_0+2\pi$ es la misma con frecuencia w_0. Diferente al caso continuo, donde las señales son distintas para distintas w_0. Por lo tanto al considerar exponenciales complejas, necesitamos solamente tomar el intervalo de frecuencia de longitud 2π dentro del cual se escoge w_0. Conforme w_0 se incrementa desde 0, la señal oscila más rápido hasta π. Seguimos aumentando w_0 hasta 2π y la señal oscila más lento hasta producir la misma secuencia que en w=0.

56

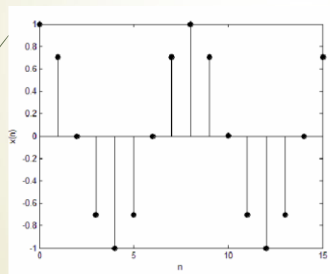
Prof. Jorge M. Runco



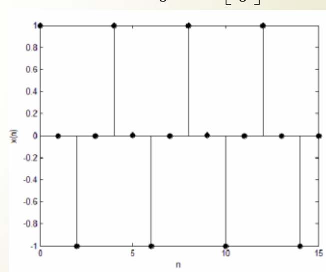
$\omega = 0 \Rightarrow \quad cos[0n]$



$\omega = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{\pi n}{8}\right]$



$\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{\pi n}{4}\right]$

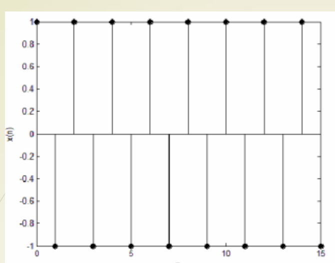


$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{\pi n}{2}\right]$

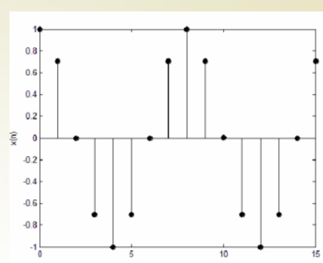
$$y[n] = cos[\omega n]$$

57

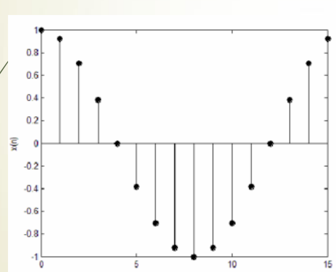
Prof. Jorge M. Runco



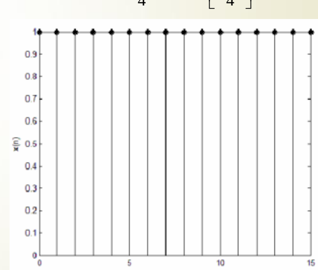
$\omega = \pi \Rightarrow \quad cos[\pi n]$



$\omega = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{7\pi n}{4}\right]$



$\omega = \frac{15\pi}{8} \Rightarrow \quad cos\left[\frac{15\pi n}{8}\right]$



$\omega = 2\pi \Rightarrow \quad cos[2\pi n]$

58

Prof. Jorge M. Runco

Periodicidad de exponenciales discretas(3)

- La segunda propiedad respecto de la periodicidad de la exponencial compleja discreta. Para ser periódica :

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \qquad e^{j\omega_0 N} = 1$$

- Debe haber un entero m tal que
- $w_0N=2\pi m \quad w_0/2\pi=m/N$

59

Prof. Jorge M. Runco

Periodicidad de exponenciales discretas(4)

- De acuerdo con lo anterior, la exponencial es periódica si w0/2π es un número racional y es no periódica en otras circunstancias.
- N=m(2π/w0)

60

Prof. Jorge M. Runco

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de w_0	Señales idénticas para valores de w_0 separados 2π
Periódica para cualquier w_0	Periódica sólo si $w_0=2\ \pi\ m/N$ con m y N enteros
Frecuencia fundamental w_0	Frecuencia fundamental w_0/m
Período fundamental $2\pi/w_0$	Período fundamental $2\pi m/w_0$

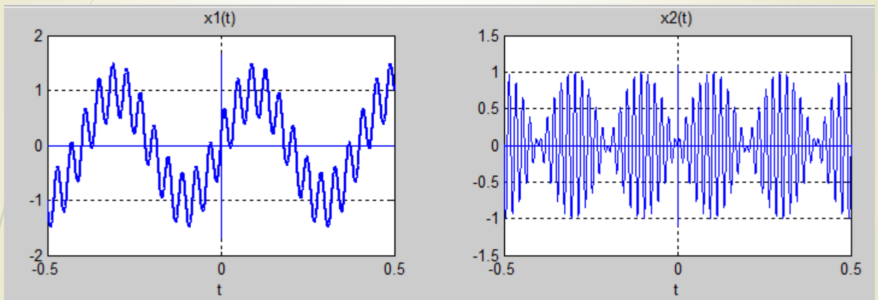
61

Prof. Jorge M. Runco

Generación de señales con Matlab/Octave

62

Señales en tc



Prof. Jorge M. Runco

63

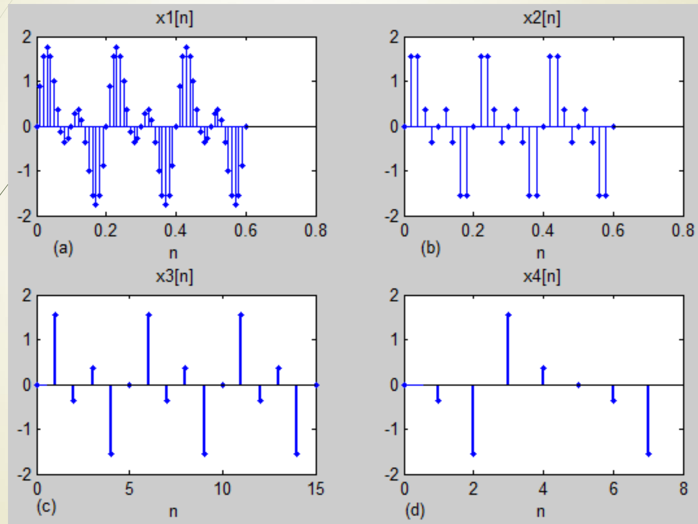
```
%Señales en tiempo continuo
t=-.5:.001:.5;
w1=5; w2=10; w3=50;w4=100;
x1=sin(w1*pi*t);
x2=.5*sin(w3*pi*t);
x11=x1+x2;
subplot(121),plot(t,x11,'LineWidth',2);
grid;
title('x1(t)'); xlabel('t');
line([0 0],[min(x11)-.2 max(x11)+.2] );
line([min(t) max(t)], [0 0]);
x1=sin(w1*pi*t);
x2=sin(w4*pi*t);
x12=x1.*x2;
subplot(122),plot(t,x12,'LineWidth',1);
grid
title('x2(t)'); xlabel('t');
line([0 0],[min(x12)-.1 max(x12)+.1] );
line([min(t) max(t)], [0 0]);
```

Prof. Jorge M. Runco

64

Prof. Jorge M. Runco

Señales en td



65

Prof. Jorge M. Runco

```
%Señales en tiempo discreto
n1=0:.01:.6;
n2=0:.02:.6;
n3=0:.04:.6;
n4=0:.08:.6;
x11=sin(10*pi*n1);
x12=sin(10*pi*n2);
x13=sin(10*pi*n3);
x14=sin(10*pi*n4);
x21=sin(20*pi*n1);
x22=sin(20*pi*n2);
x23=sin(20*pi*n3);
x24=sin(20*pi*n4);
subplot(221),stem(n1,x11+x21,'.','LineWidth',1)
hold on
line([min(n1) max(n1)], [0 0]);
xlabel('n');title('x1[n]')
text(.05,-2.7,'(a)')
subplot(222),stem(n2,x12+x22,'.','LineWidth',1)
hold on
```

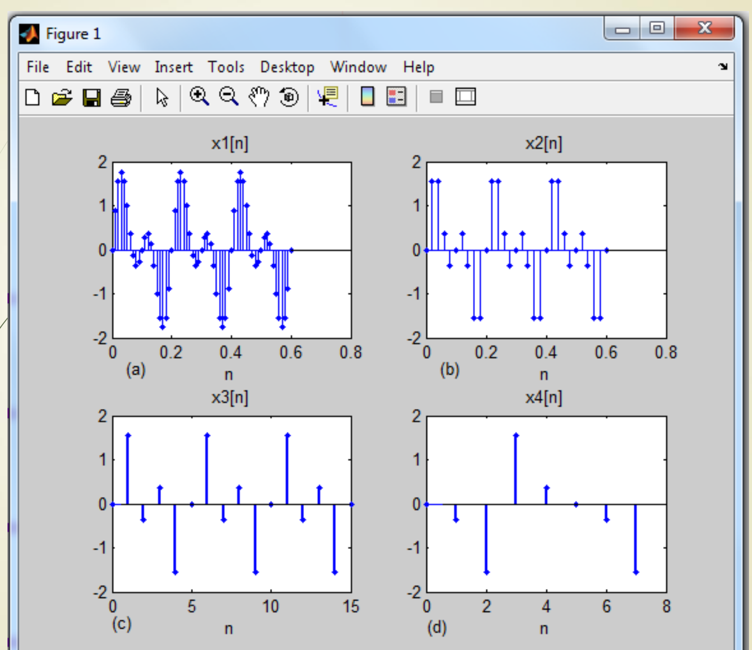
66

Prof. Jorge M. Runco

```
line([min(n2) max(n2)], [0 0]);
xlabel('n');title('x2[n]')
text(.05,-2.7,'(b)')
subplot(223),stem(n3/.04,x13+x23,'.','LineWi
dth',1.5)
hold on
line([min(n3) max(n3)], [0 0]);
xlabel('n');title('x3[n]')
text(.05,-2.7,'(c)')
subplot(224),stem(n4/.08,x14+x24,'.','LineWi
dth',1.5)
hold on
line([min(n4) max(n4)], [0 0]);
xlabel('n');title('x4[n]')
text(.05,-2.8,'(d)')
```

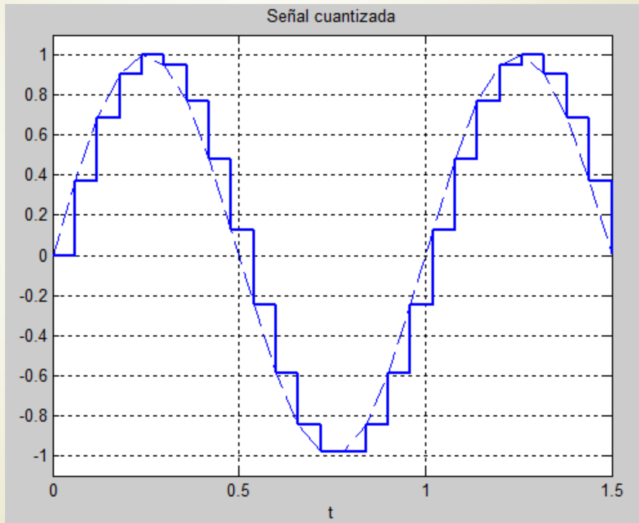
67

Prof. Jorge M. Runco



68

Señal cuantizada



Prof. Jorge M. Runco

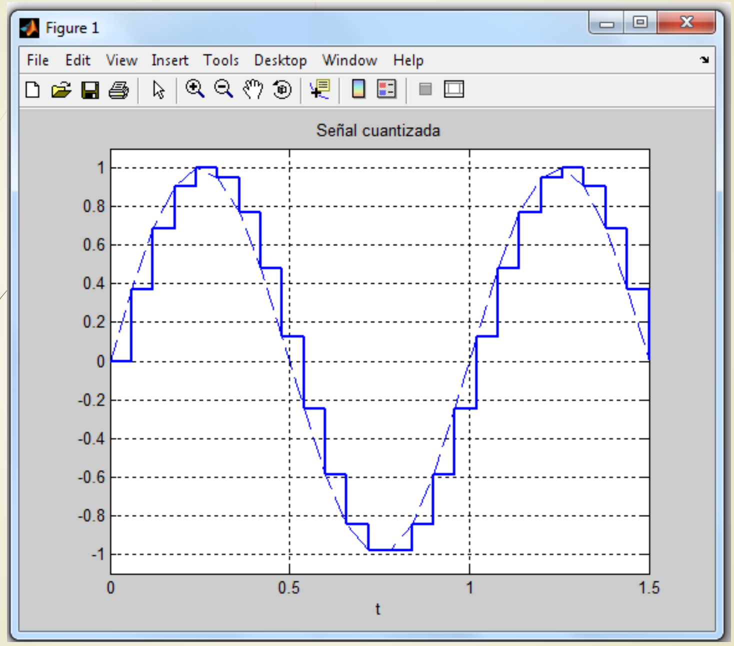
69

```
%Señal cuantizada
t=0:.06:1.5;
x = sin(2*pi*t);
figure
stairs(t,x, 'LineWidth',2); grid
hold on
plot(t,x,'--'); title('Senal cuantizada')
xlabel('t')
axis([0 1.5 -1.1 1.1])
```

Prof. Jorge M. Runco

70

Prof. Jorge M. Runco



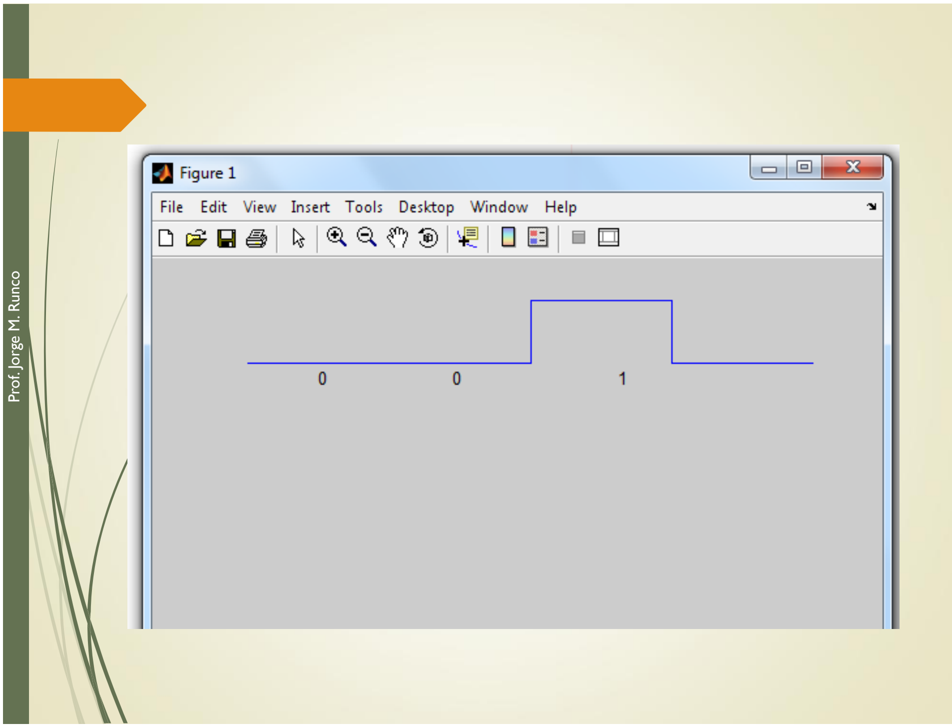
71

Prof. Jorge M. Runco

Señal digital

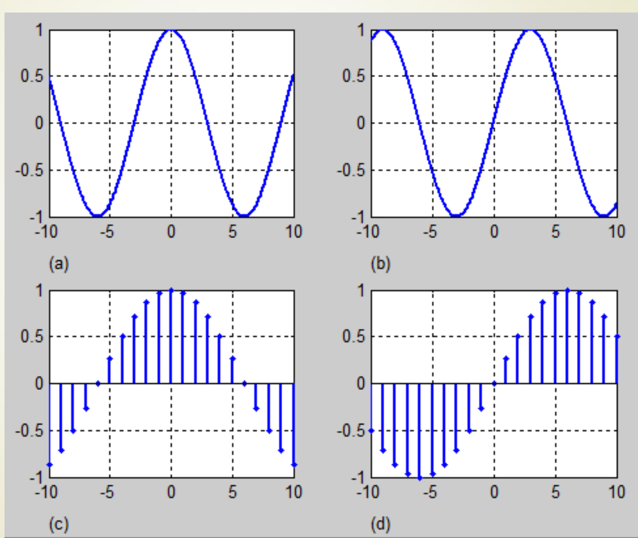
```
n=0:4;
x1=[0 0 1 0 0];
subplot(512); stairs(n, x1); axis off
text(.5, - .25, '0 0 1' )
```

72



73

Funciones par e impar



74

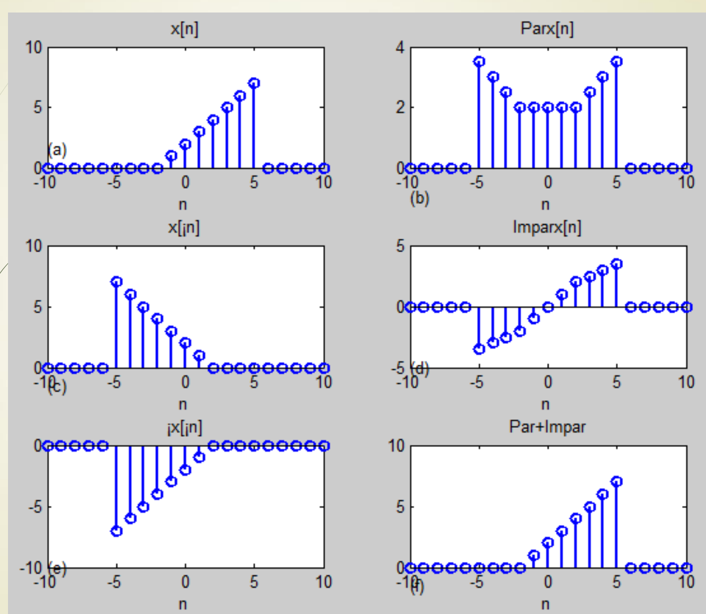
Prof. Jorge M. Runco

```
%Ejemplo de señal par e impar
t=-10:.001:10;
x1=cos(pi*t./6);
x2=sin(pi*t./6);
n=-10:1:10;
x3=cos(pi*n./12);
x4=sin(pi*n./12);
subplot(221), plot(t,x1,'LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(a)')
subplot(222), plot(t,x2,'LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(b)')
subplot(223), stem(n./1,x3,'.','LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(c)')
subplot(224), stem(n./1,x4,'.','LineWidth',2);grid
text(-10,-1.5,'(d)')
```

75

Prof. Jorge M. Runco

Ni par ni impar



76

Prof. Jorge M. Runco

```
%Ejemplo de señal Par e impar en TC y la suma
proporciona la original Señal par
n=-10:10;
x=[zeros(1,8) n(11:18) zeros(1,5)];
xi=fliplr(x); %Senal invertida
Par=.5*(x+xi);
Impar=.5*(x-xi);
subplot(321), stem(n,x,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('x[n]'); text(-10,1.5,'(a)')
subplot(322), stem(n,Par,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('Par{x[n]}'); text(-10,-1,'(b)')
subplot(323), stem(n,xi,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('x[¡n]'); text(-10,-1.5,'(c)')
subplot(324), stem(n,Impar,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('Impar{x[n]}','LineWidth',2); text(-10,-
5,'(d)')
subplot(325), stem(n,-xi,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('-x[-n]'); text(-10,-10,'(e)')
subplot(326), stem(n,Par+Impar,'LineWidth',2)
xlabel('n'); title('Par+Impar'); text(-10,-1.5,'(f)')
```

77