Análisis de Señales

Ejemplos: Procesos Aleatorios – Correlación – Densidad Espectral

Curso 2021 – Prof. Jorge Runco

1

1) Recordemos las propiedades de la función de correlación

$$(1)\ |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$

$$(2)\ R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$

$$(3)\ R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$$

2

1)

- (1) Valor más grande en el origen y positivo.
- (2) Función par.
- (3) Valor en el origen (en cero) = potencia. Pensar en (1). Tiene que ser positivo porque es potencia.

3

1)a)

- a) $R_{xx} = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ |\tau| < 1 \\ 0 \ \ si \ \ |\tau| > 1 \end{cases}$
- Valor mayor en el origen y positivo. Par.
- Función de autocorrelación válida.

4

1)b)

- b) $R_{xx} = \delta(\tau) + sen(\omega_o \, \tau)$
- El sen es una función impar. No es una función de autocorrelación válida.

5

1)c)

- c) $R_{xx}(\tau) = e^{-|\tau|}$
- Par. Valor mayor en el origen y positivo.
- Es una función de autocorrelación válida.

6

1)d)

7

2)

$$(1)\quad S_{XX}(w) \geq 0$$

$$(2)\quad S_{XX}(-w) = S_{XX}(w) \qquad X(t) \quad real$$

$$(3)\quad S_{XX}(w) \quad es\ real$$

$$(4)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)dw = A\{E[X^2(t)]\}$$

Las más importantes:
(1) Para todo w tiene que ser positivo, porque el área bajo la curva es potencia.
(2) Función par.

8

2)a)

- $S_{xx} = \delta(\omega) + cos^2(\omega)$
- Siempre positiva y mayor que 0 para toda w.
- Es una función válida para densidad espectral de potencia.

9

2)b)

- $S_{xx}(\omega) = 10 + \delta(\omega - 20.\pi)$
- Impar. No es una función válida.

10

3)a)

- Hay que calcular el área bajo la curva, recordando que es bilateral (frecuencias positivas y negativas).
- $P = 2.\int_{\omega_1}^{\omega_2} G_{xx}(\omega)\, d\omega = 2.\int_{0}^{5.10^3} 10^{-6}\ \omega^2\ d\omega =$
  $2.10^{-6}.\frac{\omega^3}{3}\Big|_{0}^{5.10^3}$

11

3)b)

- $P = 2.\int_{\omega_1}^{\omega_2} G_{xx}(\omega)\, d\omega = 2.\int_{5.10^3}^{6.10^3} 10^{-6}\ \omega^2\ d\omega =$
  $2.10^{-6}.\frac{\omega^3}{3}\Big|_{5.10^3}^{6.10^3}$

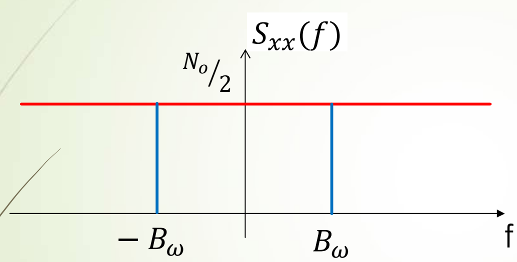
12

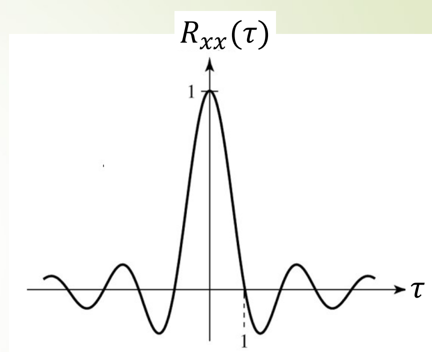
5)

- $R_{yy}(\tau) = E[y(t)\, y(t+\tau)] = E[\{x(t) - x(t-T)\}\{x(t+\tau) - x(t-T+\tau)\}]$
- $= E[x(t)x(t+\tau) - x(t)x(t-T+\tau) - x(t-T)x(t+\tau) + x(t-T)x(t-T+\tau)]$
- $= \; R_{xx}(\tau) - R_{xx}(\tau - T) - R_{xx}(\tau + T) + R_{xx}(\tau)$
- $S_{yy}(f) = 2S_{xx}(f) - e^{j\omega T}S_{xx}(f) - e^{-j\omega T}S_{xx}(f)$
- $S_{yy} = 2\, S_{xx}(f) - 2\,(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})/2S_{xx}(f) = 2\, S_{xx}(f) - 2\cos(\omega T)S_{xx}(f)$

13

6)



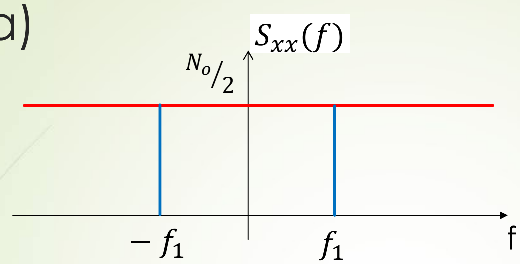


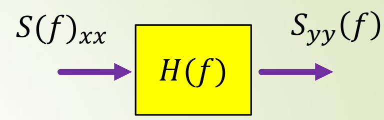
$a)\; P = \text{Área bajo la curva} = 2.\frac{N_o}{2}\;.B_\omega$

$b) S_{xx}(f) = \dfrac{N_o}{2}\, rect(f) \;\leftrightarrow\; R_{xx}(\tau) = \dfrac{N_o}{2}\,\dfrac{sen\, \pi\tau}{\pi\tau}$

14

8)a)





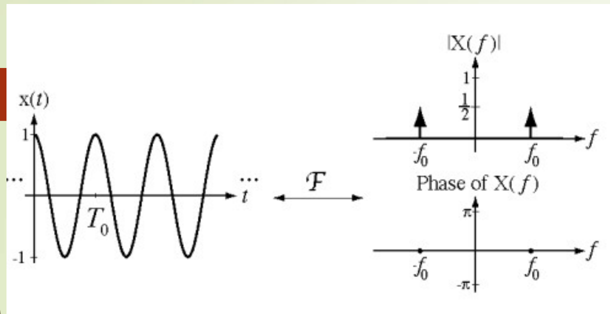
- $h(t) = sinc(t) \quad \leftrightarrow \quad rect(f)$
- $S_{yy}(f) = \ |H(f)|^2 \, S(f)_{xx}$
- $Potencia = \ \int_{-f}^{f1} \frac{No}{2} \ .A\, df$

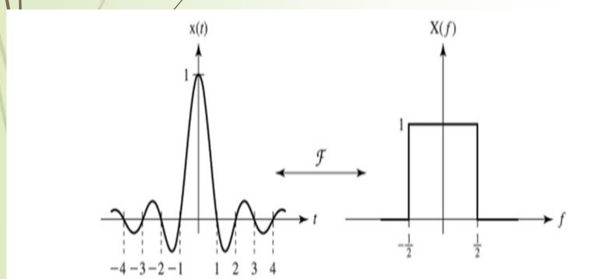
15

8)b)

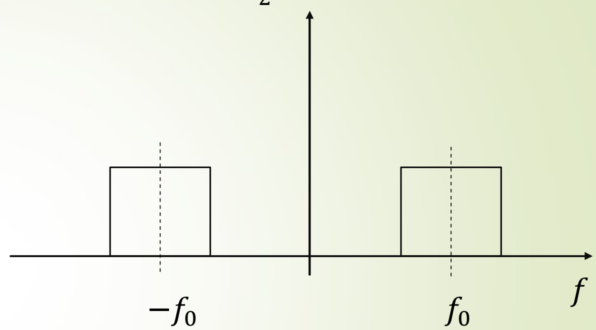
- $h(t) = sinc(t).\cos(\omega_0 t) \ \leftrightarrow rect(f) * \frac{1}{2}\,[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
- $S_{yy}(f) = \ |H(f)|^2 \, S(f)_{xx}$
- $Potencia = 2.\int_{f0-f}^{f0+f} \frac{No}{2} \ .A\, df$

16





$H(f) = rect(f) * \frac{1}{2}\,[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$



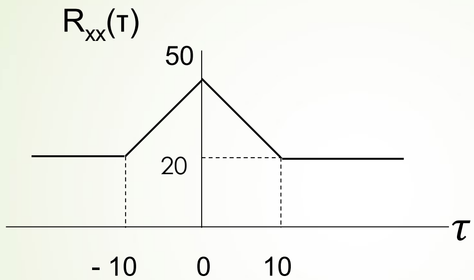
17

11)

- $R_{xx}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+\tau^2}$
- $R_{xx}(0) = E[X^2(t)] = 25 + 4 = 29$
- $\bar{X} = E[X(t)] = \sqrt{25} = 5$
- $\sigma_x^2 = 29 - 25 = 4$

18

13)



$$E[x^2(t)] = R_{xx}(0) = 50$$

$$E[x(t)] = \bar{x} = \sqrt{20}$$

$$\sigma^2 = E[x^2(t)] - \bar{x}^2 = 50 - 20 = 30$$

19

- a) $S_{yy}(f) = |H(f)|^2 \, S_{xx}(f) \;\rightarrow\; H(f) = 2B\, rect(f)$

20