Análisis de Señales

CURSO 2021 – PROF. JORGE RUNCO

SISTEMAS LINEALES

Prof. Jorge Runco Curso 2021

1

Ej1)b) y[n] = 2.x[n-n_0], n_0 > 0

- $Linealidad$
- $Excitación\ x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = 2x_1[n-n_0]$
- $Excitación\ x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = 2x_2[n-n_0]$
- $Excitación\ x_3[n] = a.x_1[n] + b.x_2[n] \longrightarrow y_3[n] = 2x_3[n-n_0] =$
- $2\{a.x_1[n-n_0] + \mathrm{b}.x_2[n-n_0]\} = a.2x_1[n-n_0] + b.2x_2[n-n_0] =$
- $a.y_1[n] + b.y_2[n]$ ⟵
- $El\ sistema\ es\ lineal$

Prof. Jorge Runco Curso 2021

2

- Causalidad
- Como $n_0 > 0$ la salida depende de las entradas anteriores exclusivamente, entonces es causal.
- Invarianza temporal
- $x[n] \longrightarrow y[n] = 2x[n - n_0]$
- Si retardo la entrada
- $x[n-k] \longrightarrow y_r[n] = 2x[n - n_0 - k]$
- Si retardo la salida
- $y[n-k] = 2x[n - n_0 - k]$
- Como la salida retardando la entrada $y_r[n]$ y la salida retarda y[n-k] son iguales $y_r[n]=y[n-k]$, entonces el sistema es invariante en el tiempo.
- Para entrada acotada la salida es acotada, entonces es estable.

Ej1)c) y[n] = (n+3)x[n-3]

- $Linealidad$
- $Excitación\ x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = (n+3)x_1[n-3]$
- $Excitación\ x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = (n+3)x_2[n-3]$
- $Excitación\ x_3[n] = a.x_1[n] + b.x_2[n] \longrightarrow y_3[n] =$
- $(n+3)x_3[n-3] =$
- $(n+3)\{a.x_1[n-3] + \mathrm{b}.x_2[n-3]\} =$
- $a(n+3)x_1[n-3] + b(n+3)x_2[n-3] = a.y_1[n] + b.y_2[n]$
- $El\ sistema\ es\ lineal$

- Causalidad
- Como la salida depende de las entradas anteriores exclusivamente, entonces es causal.
- Invarianza temporal
- $x[n] \ -\!\!\rightarrow \ \ y[n] = (n+3)x[n-3]$
- Si retardo la entrada
- $x[n-k] \ -\!\!\rightarrow \ \ y_r[n] = (n+3)x[n-3 \ -k]$
- Si retardo la salida
- $y[n-k] = (n-k+3)x[n-3-k]$
- Como la salida retardando la entrada y_r [n] y la salida retarda y[n-k] son distintas $y_r[n] \neq y[n-k]$, entonces el sistema no es invariante en el tiempo.
- Si x[n]=u[n], escalón unitario. La salida es y[n]=(n+3)u[n-3] es una rampa no acotada, entonces no es estable.

Ej3)a) y[n] = x[n] – x[n-1]

- Si el sistema es causal → y[n]=h[n] = 0 para n < 0.
- Encontremos la respuesta al impulso por recursión. Si $x[n] = \delta[n]$, tiene valor 1 sólo para n=0
- n=0 → y[0]= δ[0] - δ[-1]= 1- 0 = 1
- n=1 → y[1]= δ[1] - δ[0]= 0 - 1 = - 1
- n=2 → y[2]= δ[2] - δ[1]= 0 - 0 = 0 y así para el resto de los n
- → h[n] = δ[n] - δ[n - 1]

Ej3)b) 2y[n] +6y[n-1]= x[n] – x[n-2]

- Igual que el ejercicio anterior
- n=0 → 2y[0]+6y[-1]= δ[0] - δ[-2]= 1- 0 → 2y[0]+6.0=1+0
- Y[0]=1/2
- n=1 → 2y[1]+6y[0]= x[1] - x[-1]= 0 - 0 →
- 2y[1]= -6y[0] → y[1]=- $\frac{6}{2}\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$
- n=2 → 2y[2]+6y[1]= x[2] - δ[0]= -1 →
- 2y[2]=-1-6y[1] →
- y[2]=- $\frac{1}{2}$ +6 $\frac{3}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Prof. Jorge Runco Curso 2021

7

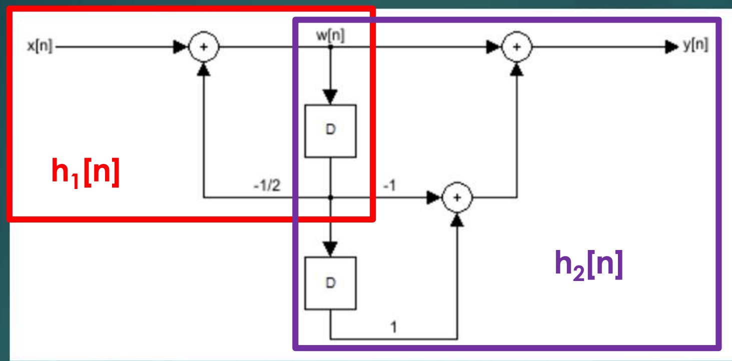
- n=3 → 2y[3]+6y[2]=x[3]-x[1]=0 → 2Y[3]=-6y[2] →
- y[3]= = - $\frac{6}{2}$ y[2]= $\frac{-6}{2}$ (- $\frac{1}{2}$ +6 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$)
- n=4 → 2y[4]+6y[3]=0 → 2Y[4]=-6y[3] →
- y[4]= $\frac{-6}{2}$ y[3]= $\frac{-6}{2}$ $\frac{-6}{2}$ (- $\frac{1}{2}$ +6 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$)

- h[n]= $\frac{1}{2}(-3)^n$ {u[n] - $\frac{1}{9}$ u[n-2]} ⟵

Prof. Jorge Runco Curso 2021

8

Ej4)



$w[n]=x[n] - \frac{1}{2}\, w[n-1]$

$y[n]=w[n] - w[n-1] + w[n-2]$

$h[n]=h_1[n] * h_2[n]$

Prof. Jorge Runco   Curso 2021

9

$w[n]=x[n] - \frac{1}{2}\, w[n-1]$, si $x[n]=\delta[n]$

- n=0 → $h_1[0]= x[0] - \frac{1}{2}\, h_1[-1] = 1 - 0 = 1$
- n=1 → $h_1[1]= x[1] - \frac{1}{2}\, h_1[0] = 0 - \frac{1}{2}.1 = - \frac{1}{2}$
- n=2 → $h_1[2]= x[2] - \frac{1}{2}\, h_1[1] = 0 - \frac{1}{2}(- \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
- Y así siguiendo →
- $h_1[n]=(-1/2)^n\, u[n]$ (multiplicado por u[n] por ser causal) ⟵

Prof. Jorge Runco   Curso 2021

10

$y[n]=w[n] - w[n-1] + w[n-2]$
si $w[n]=\delta[n]=\delta[0]$

- $n=0 \rightarrow h_2[0]= w[0] - w[-1] + w[-2]= 1 - 0 =$
- $1 - 0 + 0 = 1$
- $n=1 \rightarrow h_2[1]= w[1] - w[0] + w[-1] = 0 - ½.1 =$
- $0 - 1 + 0 = -1$
- $n=2 \rightarrow h_2[2]= w[2] - w[1] + w[0] = 0 - 0 + 1 = 1$
- $n=3 \rightarrow h_2[3]= w[3] - w[2] + w[1] = 0 - 0 + 0 = 0$
- $n > 2 \rightarrow h_2[n] = 0$ entonces $\rightarrow$
- $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$

Prof. Jorge Runco Curso 2021

11

$h[n]=h_1[n] * h_2[n]$

- $h[n]=h_1[n] * h_2[n] = \{(-1/2)^n u[n]\} * \{\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]\}$
- $= (-1/2)^n u[n] - (-1/2)^{n-1} u[n-1] + (-1/2)^{n-2} u[n-2]$

Prof. Jorge Runco Curso 2021

12

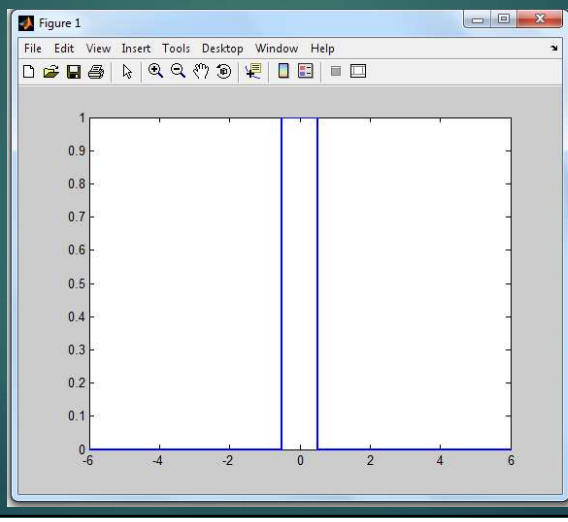
6)a) y'(t)+5y(t)=x(t). Calculamos respuesta al escalón y luego derivamos

- *Solución de la homogénea*
- $y_h\,(t) = A\,e^{at}$ *reemplazando en la ecuación*
- $aA\,e^{at} + 5A\,e^{at} = 0 \;\rightarrow A\,e^{at}\,(a+5) = 0 \;\rightarrow\; a = -5$
- *Solución particular*
- $y_p\,(t) = C \;\rightarrow y_t\,(t) = y_h\,(t) + y_p\,(t) = A\,e^{at} + C$
- *Reemplazando en la ecuación*
- $a\,A\,e^{at} + 5\,(\,C + A\,e^{at}\,) = V \;\rightarrow A\,e^{at}\,(a+5) + 5\,C = V \;\rightarrow C = \frac{V}{5}$
- $y_t\,(t) = (A\,e^{at} + {}^{V}/_{5}\,)\,u(t)$ *(multiplicada por u(t) por ser causal)*
- *Derivamos y obtenemos la respuesta al impulso*
- $h(t) = (aA\,e^{at})\,u(t) + \underbrace{(A\,e^{at} + {}^{V}/_{5}\,)\,\delta(t)} = (aA\,e^{at})\,u(t)$

Ej7)ej7tp2.m

```
t=-6:0.01:6;
f=rectanu(t);
h=rectanu(0.5.*t);
l=rectanu(t-1);
p=rectanu(t-5)+rectanu(t+5);
q=rectanu(t-4)+rectanu(t+4);
plot(t, f,'LineWidth',2);
figure,plot(t, h,'LineWidth',2);
figure,plot(t, l,'LineWidth',2);
figure,plot(t, p,'LineWidth',2);
figure,plot(t, q,'LineWidth',2);
g=(1/100).*conv(rectanu(t), rectanu(t));
m=(1/100).*conv(l, h);
k=(1/100).*conv(f,h);
r=(1/100).*conv(p,q);
t=-12:0.01:12;
figure, plot (t, g, 'LineWidth',2);
figure, plot (t, k, 'LineWidth',2);
figure, plot (t, m, 'LineWidth',2);
figure, plot (t, r, 'LineWidth',2);
```

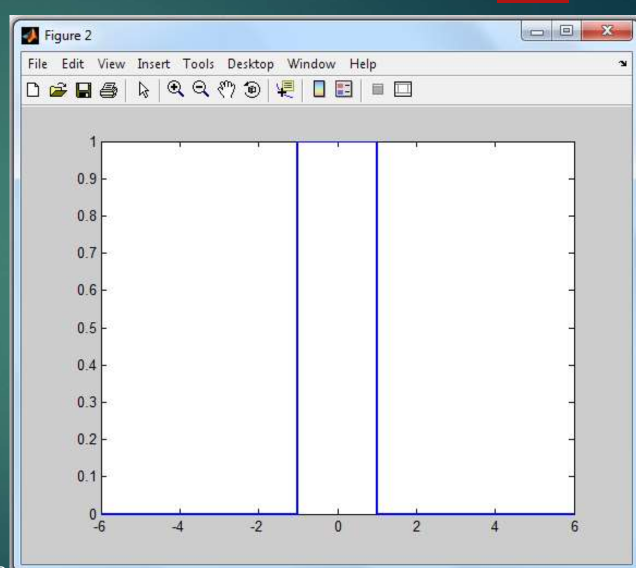
rect(t) → en el archivo → rectanu(t)



Prof. Jorge Runco

15

rect(0.5t) → en el archivo → rectanu(0.5.*t)

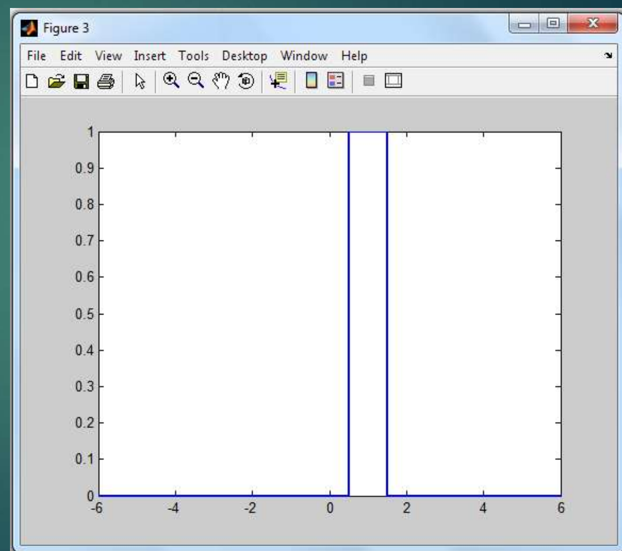


Prof. Jorge Runco

Curso

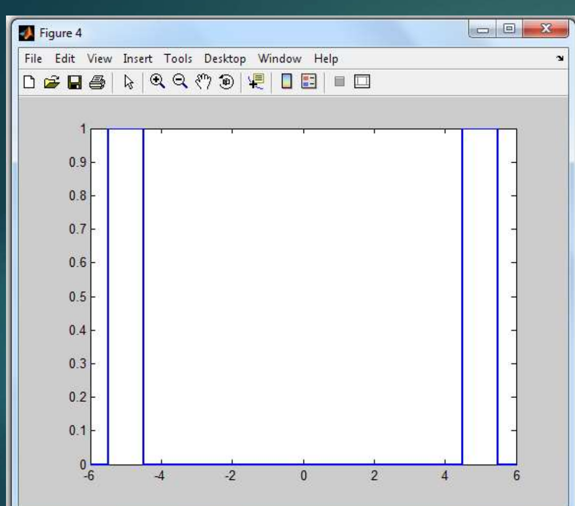
16

rect(t-1) → en el archivo → rectanu(t-1)



Prof. Jorge Runco

17

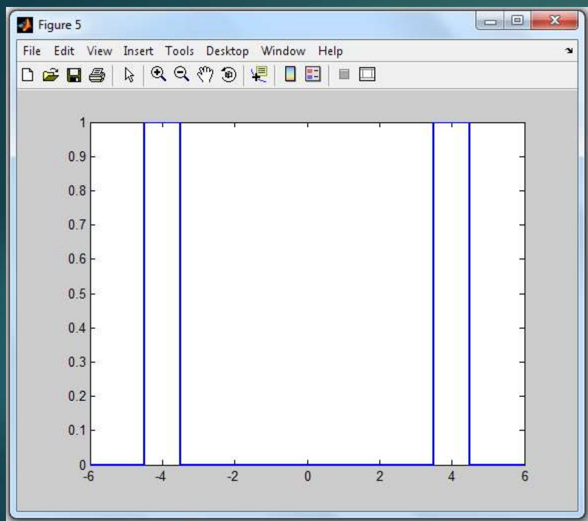


rect(t-5)+rect(t+5) → en el archivo → rectanu(t-5)+rectanu(t+5)

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

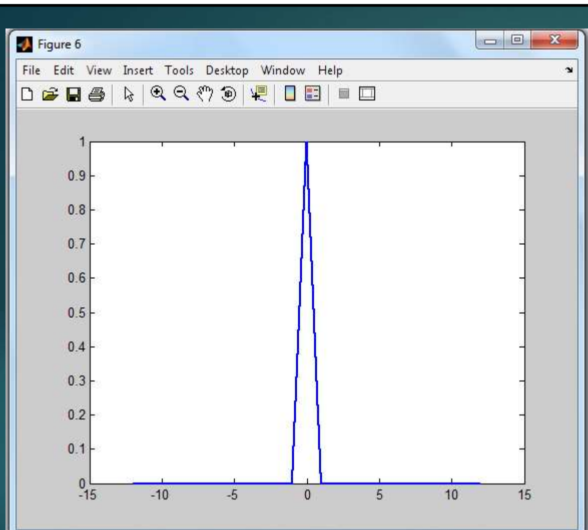
18



rect(t-4)+rect(t+4) →
en el archivo →
rectanu(t-4)+rectanu(t+4)

Prof. Jorge Runco Curso 2021

19

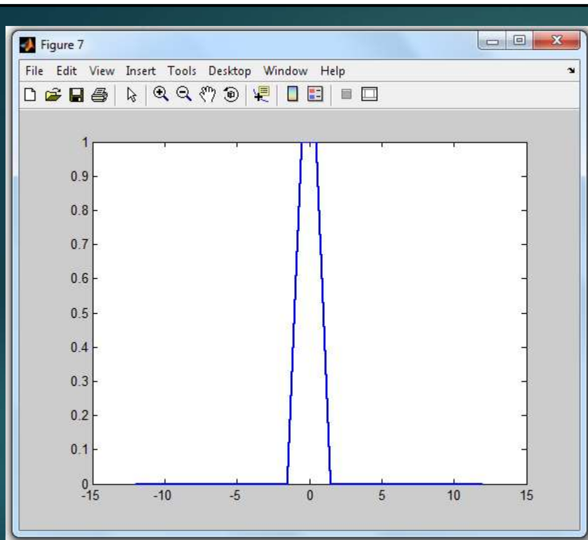


rect(t) * rect(t) →
en el archivo →

conv(rectanu(t), rectanu(t))

Prof. Jorge Runco Curso 2021

20

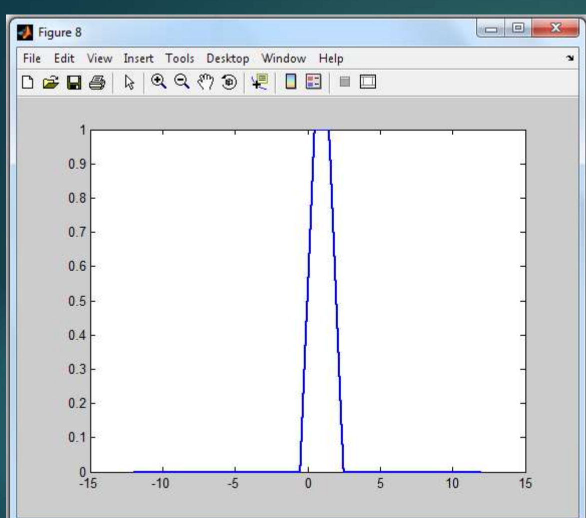


rect(t) * rect(0.5t) →
en el archivo →

conv(rectanu(t), rectanu(0.5.*t))

Prof. Jorge Runco Curso 2021

21

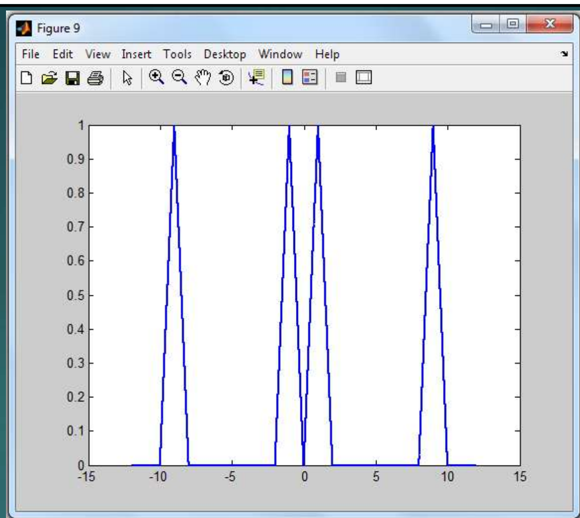


rect(t-1) * rect(0.5t)
→
en el archivo →

conv(rectanu(0.5.*t),rectanu(t-1));

Prof. Jorge Runco Curso 2021

22



(rect(t-5)+rect(t+5)) * (rect(t-4)+rect(t+4)); →
en el archivo →
conv(rectanu(t-5)+rectanu(t+5),rectanu(t-4)+rectanu(t+4));

Prof. Jorge Runco Curso 2021

23

Ejemplo de cálculo de convolución por programa

- %convolución por programa
- %calculamos la integral de la forma más sencilla sumatoria del valor de la función multiplicada el ancho del intervalo
- %calculamos 4 puntos (áreas)
- %para t=-0.75 calculamos el área entre -1 y -0.75
- t=-0.75:0.25:0;
- delta= (1-0.75)/100;
- suma(1)=0.0;
- for i=1:100
-     suma(1)=suma(1)+1.*delta;
- end

Prof. Jorge Runco Curso 2021

24

Lo mismo calculando la integral:

- suma(1)=$\int_{-1}^{-0.75} 1.dt = t\Big|_{-1}^{-0.75} = -0.75 + 1 = 0.25$
- suma(4)=$\int_{-1}^{0} 1.dt = t\Big|_{-1}^{0} = 0 - (-1) = 1$

Prof. Jorge Runco Curso 2021

25

- %para t=-0.5 calculamos el área entre -1 y -0.5
- delta= (1-0.5)/100;
- suma(2)=0;
- for i=1:100
- suma(2)=suma(2)+1.*delta;
- end

Prof. Jorge Runco Curso 2021

26

- %para t=-0.25 calculamos el área entre -1 y -0.25
- delta= (1-0.25)/100;
- suma(3)=0;
- for i=1:100
-     suma(3)=suma(3)+1.*delta;
- end

Prof. Jorge Runco Curso 2021

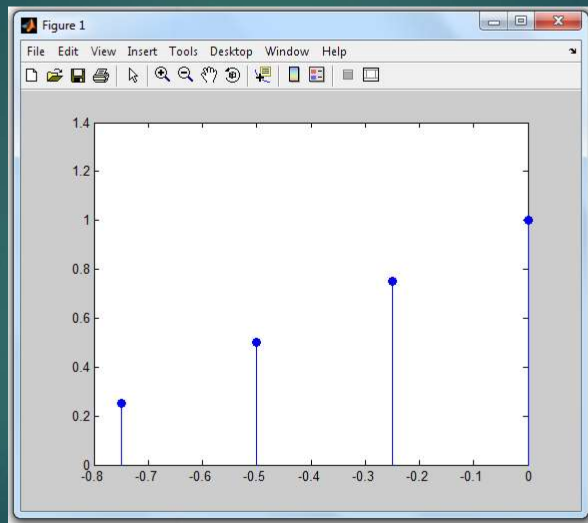
27

- %para t=0 calculamos el área entre -1 y 0
- delta= (1)/100;
- suma(4)=0;
- for i=1:100
-     suma(4)=suma(4)+1.*delta;
- end

Prof. Jorge Runco Curso 2021

28

- stem(t, suma, 'filled');



Prof. Jorge Runco Curso 2021

29

9)

- *Calculamos la respuesta al escalón y derivamos para obtener la respuesta al impulso. El impulso es la derivada del escalón.*
- $L\,\frac{di}{dt} + iR = V_i = \text{V} \rightarrow i_t(t) = i_h(t) + i_p(t) \rightarrow$
- La solución a la ecuación homogénea
- $L\,\frac{di}{dt} + iR = 0 \ \rightarrow i_h(t) = A\,e^{at} \rightarrow$
- $L\,a\,A\,e^{at} + RA\,e^{at} = 0$
- $A\,e^{at}\,(L\,a + R) = 0 \ \rightarrow (L\,a + R) = 0 \ \rightarrow a = -\frac{R}{L}$
- La cte de tiempo es $\tau = \frac{1}{a} = \frac{L}{R} \rightarrow$
- $i_h(t) = A\,e^{-\frac{R}{L}\,t}$

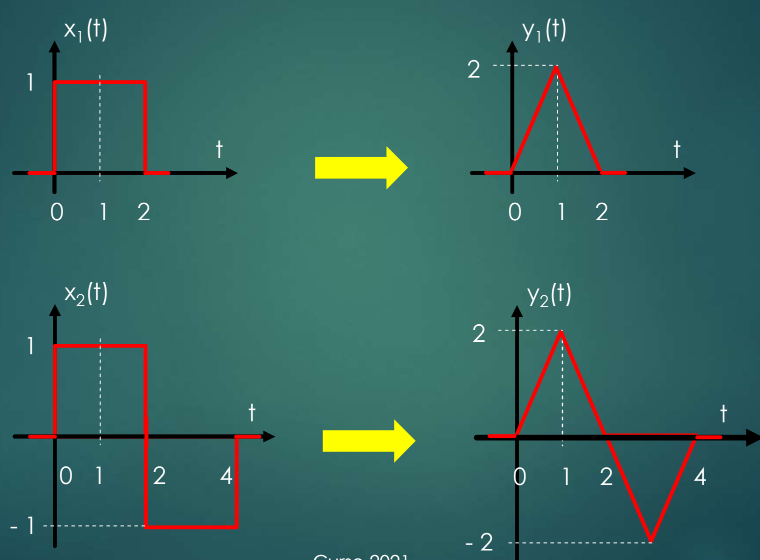
Prof. Jorge Runco Curso 2021

30

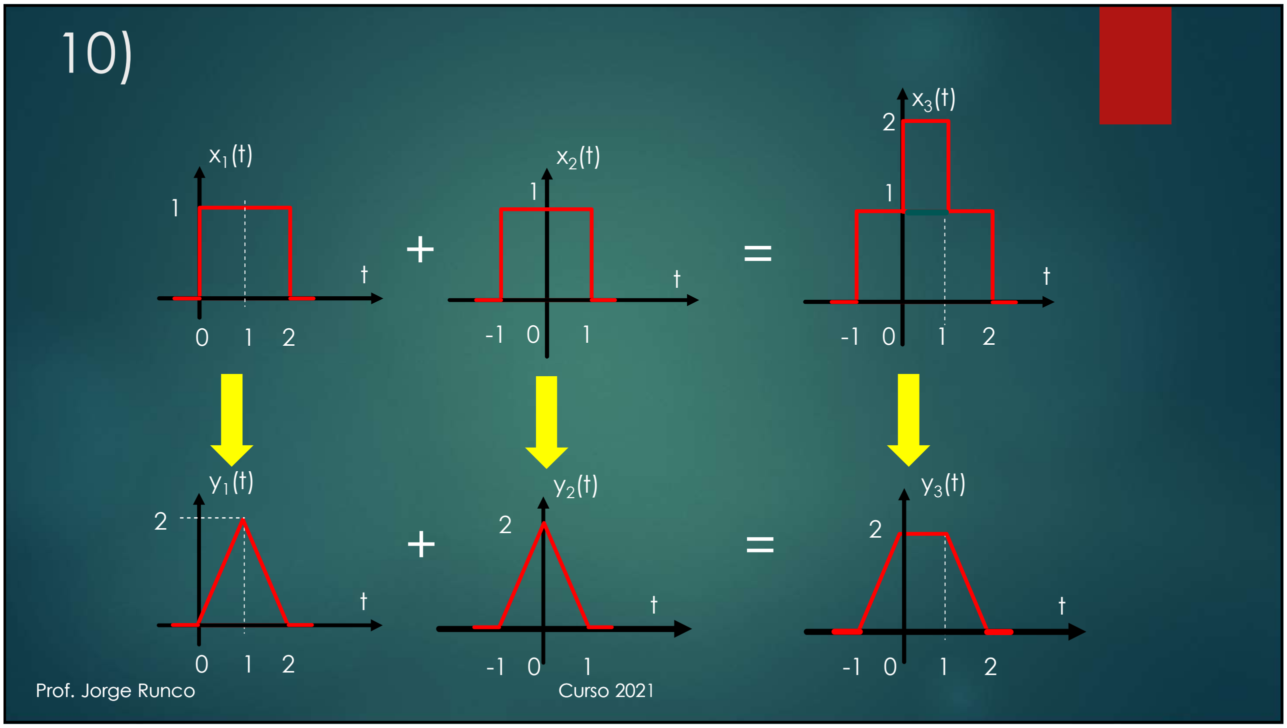
- *Proponemos como solución de la ecuación particular, una solución que "coincida" con la excitación.*
- $L\,\frac{di}{dt} + iR = V \;\rightarrow\; i_p(t) = C \;\rightarrow\; L\,0 + R\,C = V \;\rightarrow\; C = {}^{V}/_{R}$
- $i_p(t) = V \rightarrow i_t(t) = i_h(t) + i_p(t) = A\,e^{at} + \frac{V}{R}$
- Para t=0 $\rightarrow i_t(t) = 0 \rightarrow i_t(0) = A\,e^{a0} + \frac{V}{R} = A.1 + \frac{V}{R} = 0$
  $\rightarrow A = -\frac{V}{R}$
- $i_t(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{at} = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
- Derivamos y obtenemos la respuesta al impulso

31

10)



32



10)
x1(t)
1
t
0 1 2
x2(t)
1
t
-1 0 1
x3(t)
2
1
t
-1 0 1 2
y1(t)
2
t
0 1 2
y2(t)
2
t
-1 0 1
y3(t)
2
t
-1 0 1 2
Prof. Jorge Runco
Curso 2021

33