Análisis de Señales
Curso 2022

Teorema del muestreo

Conversión A/D

Prof. Jorge Runco

Muestreo

Prof. Jorge Runco

Vivimos en un mundo de tiempo continuo: la mayoría de las señales que nos encontramos son señales de tiempo continuo; por ejemplo, $x(t)$. ¿Cómo las convertimos en señales de tiempo discreto $x[n]$?

— Muestreo, tomando instantáneas de $x(t)$ cada T segundos.

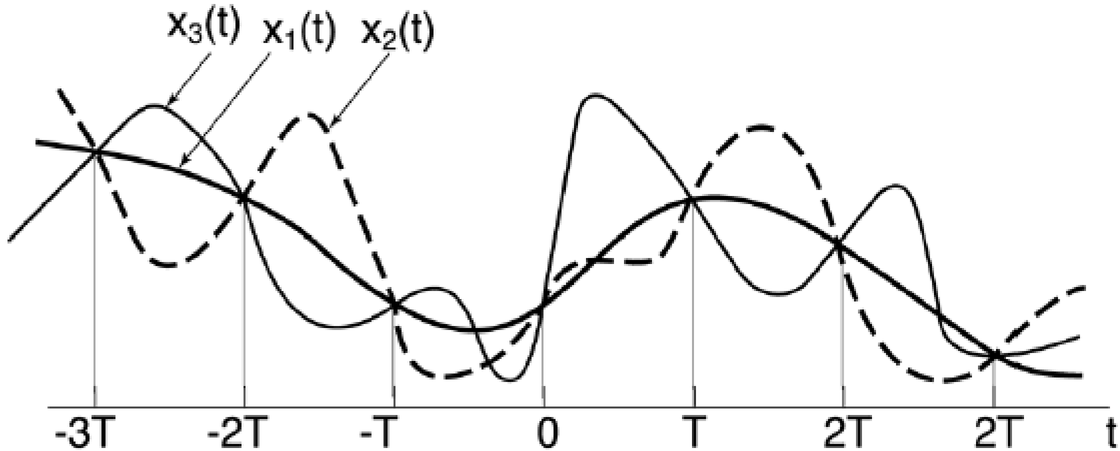
T – periodo de muestreo

$x[n] \equiv x(nT)$, $n = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — muestras espaciadas a intervalos regulares

Prof. Jorge Runco

¿Por qué, o cuándo, se considera adecuado un conjunto de muestras?

- Observación: *Muchas* señales tienen las mismas muestras

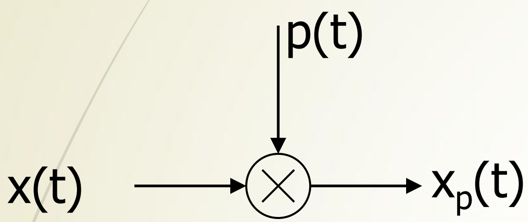


- Las técnicas de muestreo dejan de lado mucha información
  – se pierden todos los valores de $x(t)$ entre los puntos de muestreo.

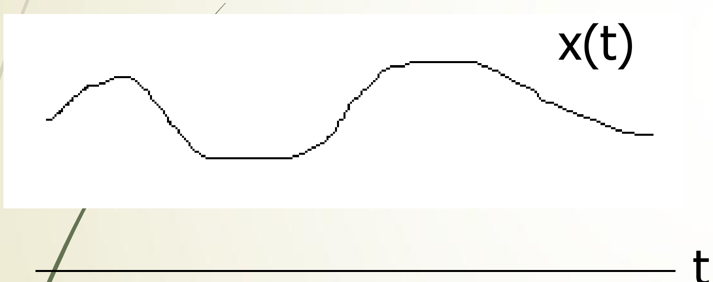
- **Cuestiones clave para el muestreo**:
  ¿Bajo qué condiciones podemos reconstruir la señal original $x(t)$ en tiempo continuo a partir de sus muestras?

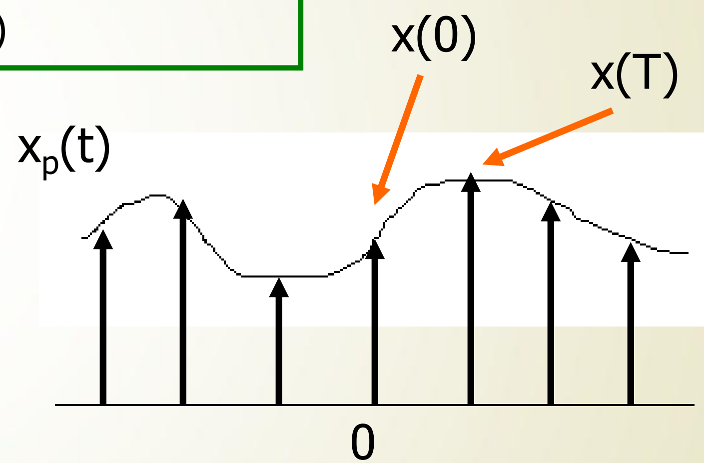
Prof. Jorge Runco

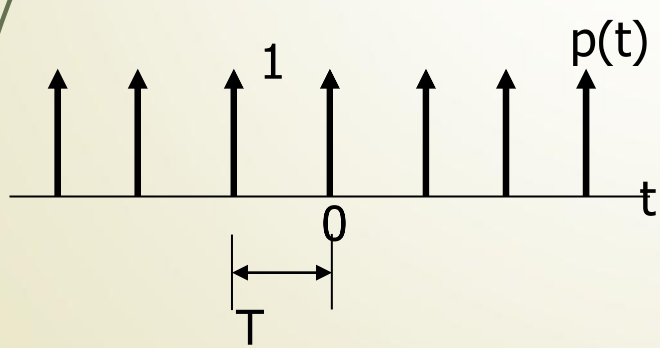
Muestreo ideal



La señal x(t) es multiplicada por p(t), obteniendo la señal muestreada $x_p(t)$







p(t) es un tren de impulsos ideales de período T, que es el intervalo de muestreo

Muestreo ideal

$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

$$X_p(f) = [X(f) * P(f)]$$

Si multiplicamos en el tiempo, convolucionamos en frecuencia

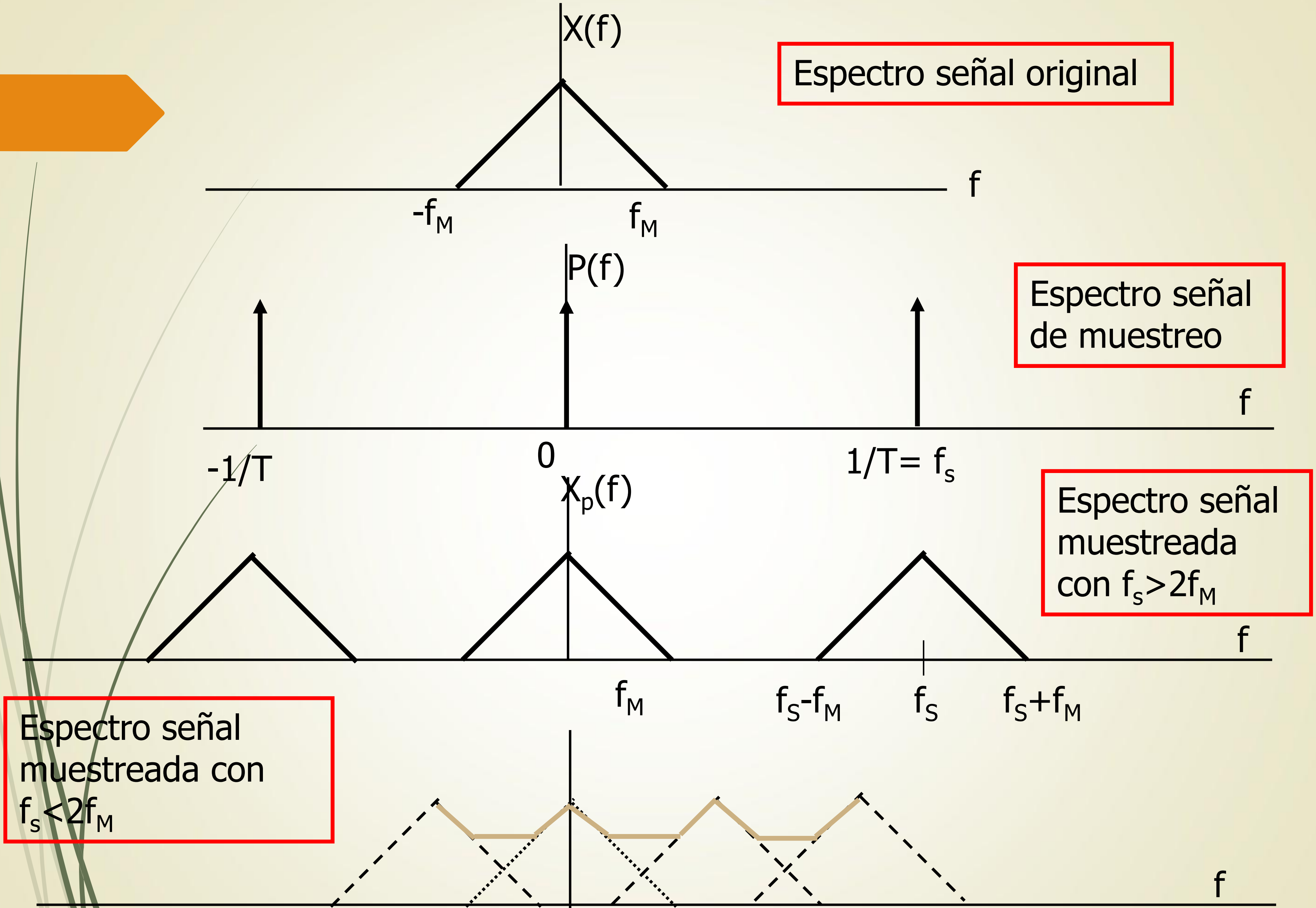
Muestreo ideal

$$P(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-k\,f_s)$$

Cada convolución con un impulso, reproduce la otra función desplazada a la posición del impulso.

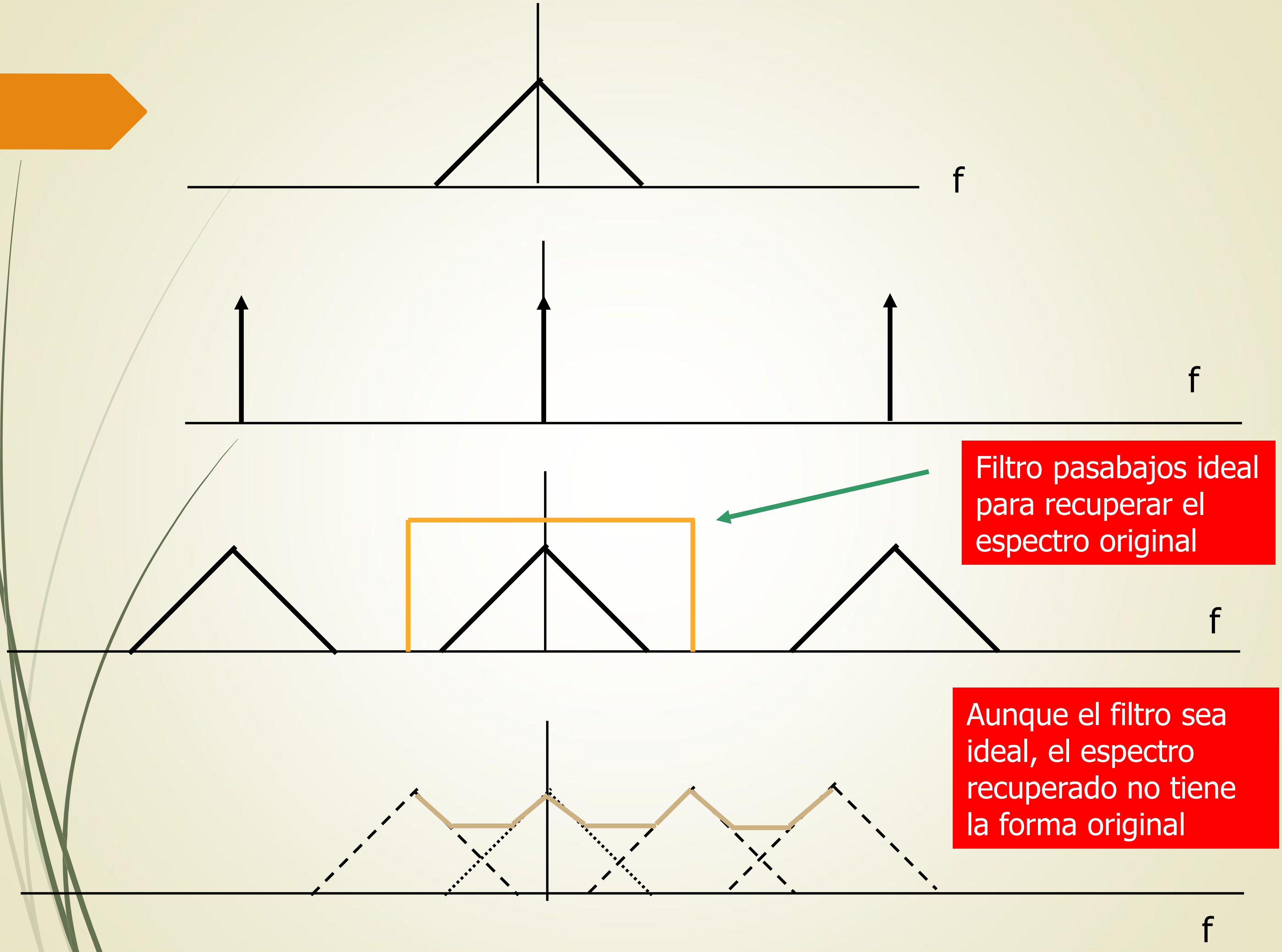
$$X_p(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(w-k\,f_s)$$

El espectro en f de la señal muestreada $x_p(t)$, es el espectro de la señal original X(w) desplazado en múltiplos de la f de muestreo $w_s=1/T$


X(f)
Espectro señal original
f
-fM
fM
P(f)
Espectro señal de muestreo
f
-1/T
0
1/T= fs
Xp(f)
Espectro señal muestreada con fs>2fM
f
fM
fS-fM
fS
fS+fM
Espectro señal muestreada con fs<2fM
f

- Vemos que el efecto del muestreo ideal sobre el espectro en f original, es repetirlo alrededor de la frecuencia de muestreo $f_{S.}$
- Si disminuimos el valor de f_S los espectros se empiezan a acercar y no hay problema hasta $f_S-f_M=f_M$
- Como vemos en el espectro $X_p(f)$ de la figura anterior, podremos recuperar X(f) original siempre y cuando $f_S-f_M>f_M$ y los espectros repetidos no se solapen. En efecto si disminuimos f_S hasta llegar a un punto en que se mezclen, espectro en azul, no será posible recuperar el espectro original.

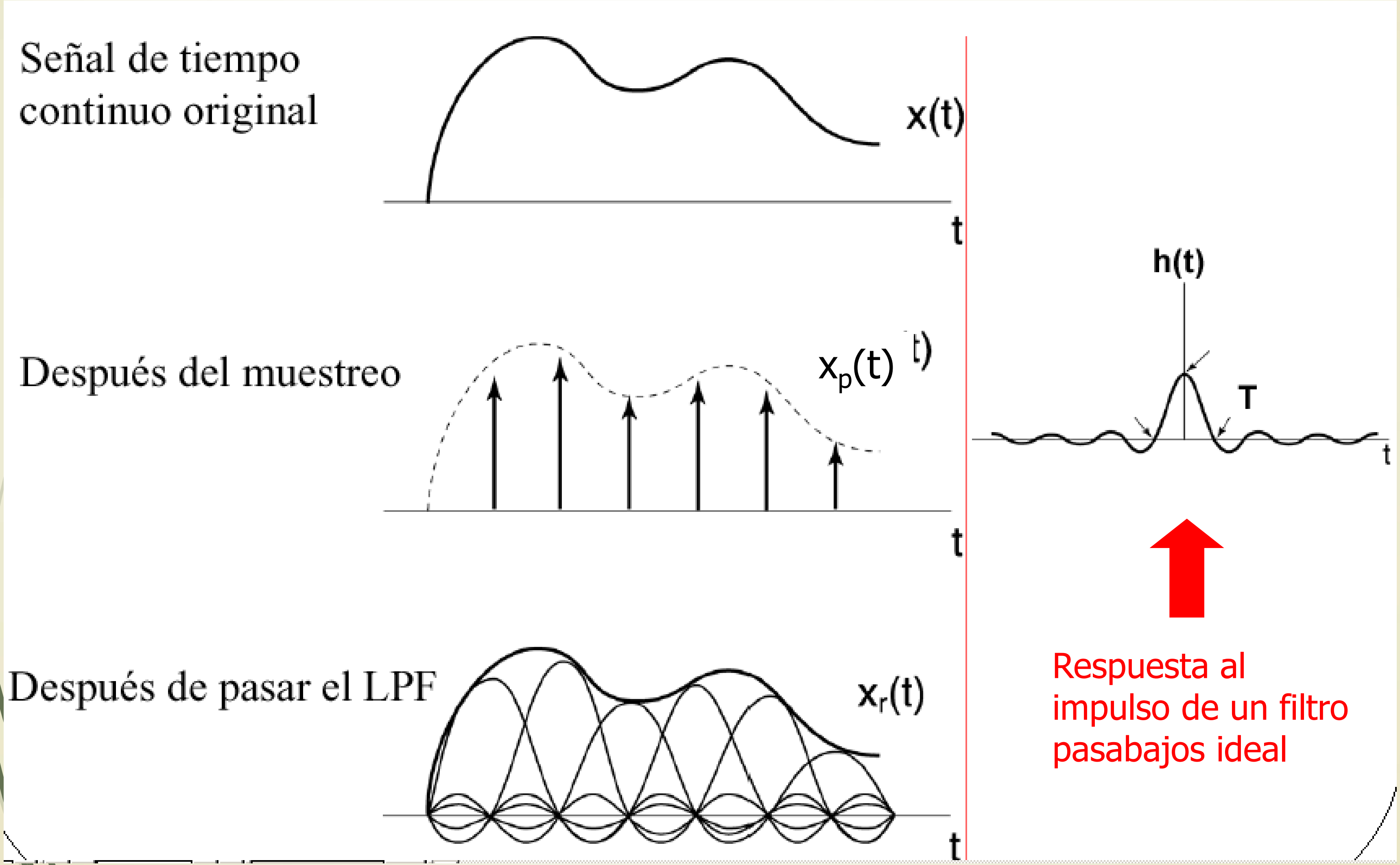
Prof. Jorge Runco



Teorema del muestreo

- Si x(t) es de banda limitada con $X(f)=0$ para $|f|>f_M$ entonces x(t) está unívocamente determinada por sus muestras x(nT), n=0,±1,±2..... Si $f_s>2f_M$.
- Para recuperar la señal original, se procesan las muestras con un filtro pasabajos ideal, con f de corte $>f_M$ y menor que f_s-f_M.
- f_s se la conoce como la frecuencia de Nyquist.

Ilustración gráfica de la interpolación en el dominio del tiempo



Prof. Jorge Runco

Interpolación

- Vimos de la diapositiva anterior que la función de interpolación es sent/t, para el caso del filtro pasabajos ideal, sumando precursores y postcursores. Este filtro es no-causal.

- En un filtro real la transferencia en f no será rectangular (rojo), pues su respuesta al impulso será 0 para $t<0$.

Prof. Jorge Runco

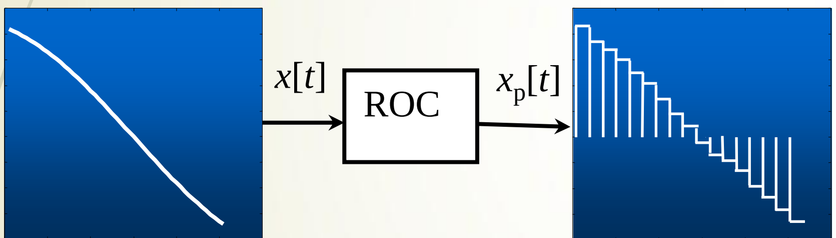
Muestreo práctico

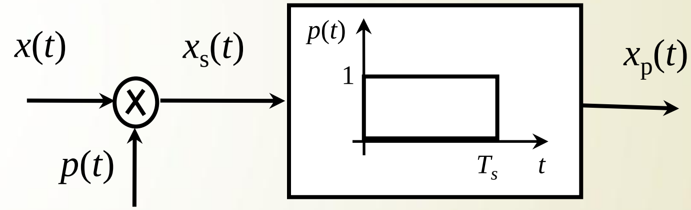
- La onda muestreada está formada por pulsos que tienen amplitud y duración finitas.
- Los mensajes están limitados en tiempo y por ello no pueden ser de banda limitada (aliasing).
- Los filtros de reconstrucción no son ideales.

Prof. Jorge Runco

Muestreo práctico

Pulsos: en general se emplea la técnica de muestreo y retención (Sample and Hold ≡ S&H) ⇒ Retenedor Orden Cero





$$x_p(t) = \sum_k x(kT)\, p(t-kT) = [q(t)] * [\sum_k x(kT)\,\delta(t-kT)]$$

entonces

$$X_p(f) = Q(f)[\sum_n X(f-k\,f_s) = Q(f)\,X_\delta(f)$$

Señal de muestreo no impulsiva

Forma del pulso de muestreo. Deforma la señal muetreada en forma ideal.

Muetreo ideal

$$x_p(t) = \sum_k x(kT)\,p(t-kT) = [q(t)] * [\sum_k x(kT)\delta(t-kT)]$$

entonces

$$X_p(f) = Q(f)[\sum_n X(f-k\,f_s) = Q(f)\,X_\delta(f)$$

Efecto sobre el espectro por muestrear con una señal no impulsiva

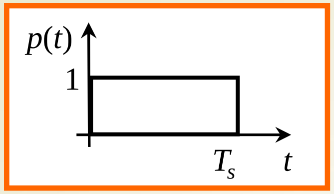
Espectro con muestreo ideal

Prof. Jorge Runco

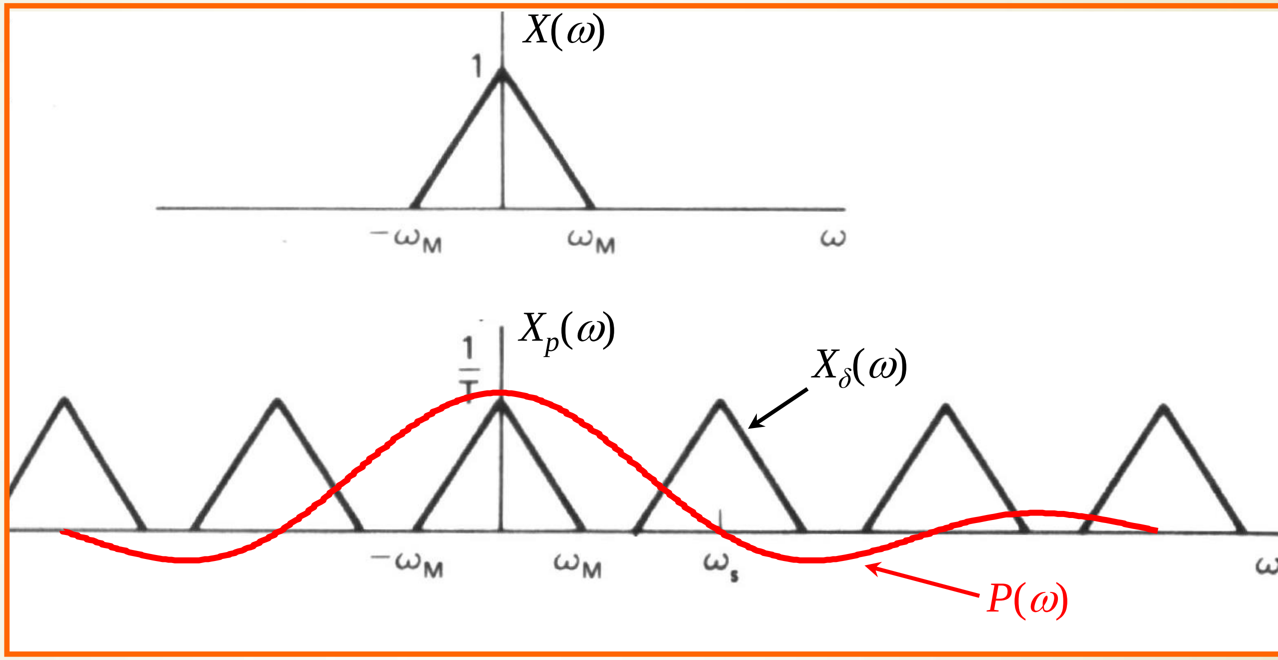
Muestreo práctico

- Se puede interpretar la expresión anterior como que Q(f) es un filtro operando sobre el espectro del muestreo ideal $X_\delta(f)$ y atenuando a componentes de f. Por lo general la señal reconstruída estará distorsionada.
- A esta pérdida de componentes de alta f, se la denomina a veces como efecto de apertura (duración del pulso).
- Si el efecto es muy grande se puede corregir con un filtro ecualizador.

Prof. Jorge Runco

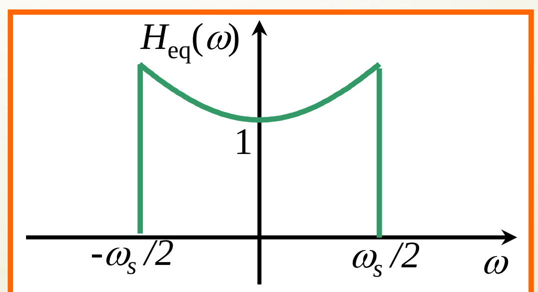


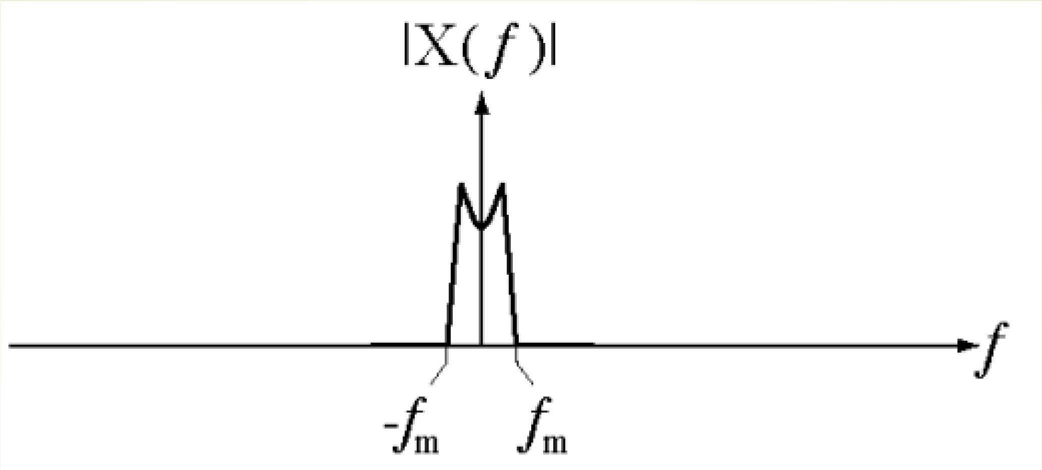
$$p(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le T_s\\ 0 & \forall\, t\end{cases} \longrightarrow \boxed{P(\omega)=e^{-j\omega T_s/2}\left[\frac{2\sin(\omega T_s/2)}{\omega}\right]}$$

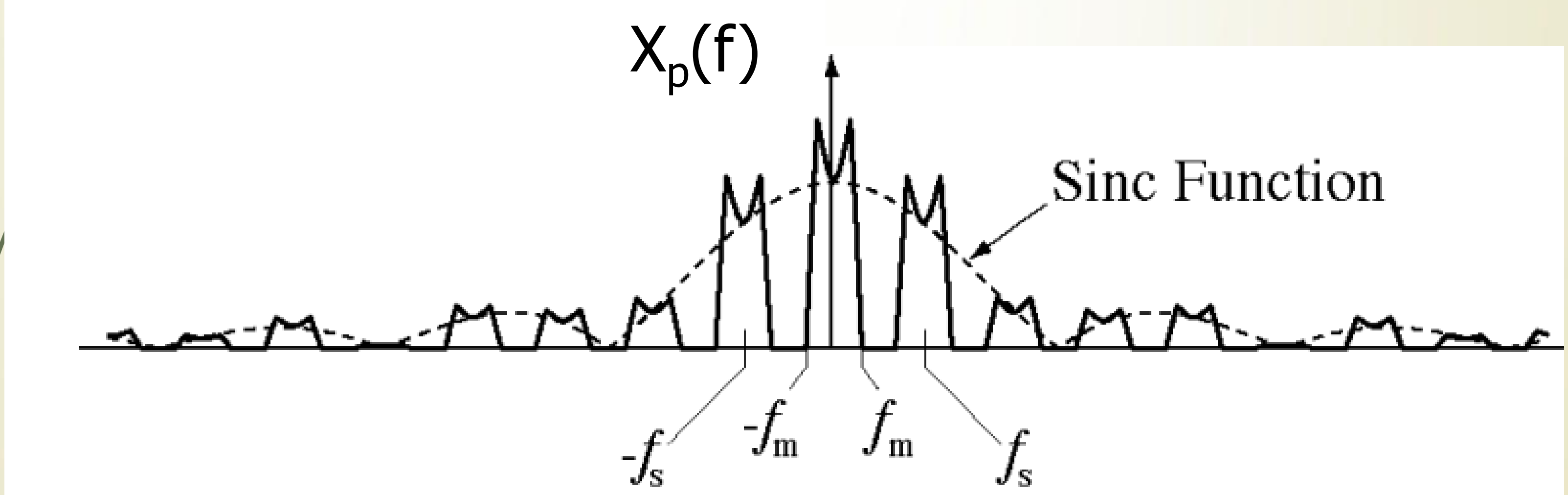


El espectro de la señal muestreada dejará de ser los "triángulos" repetidos. Los mismos serán multiplicados por P(w).

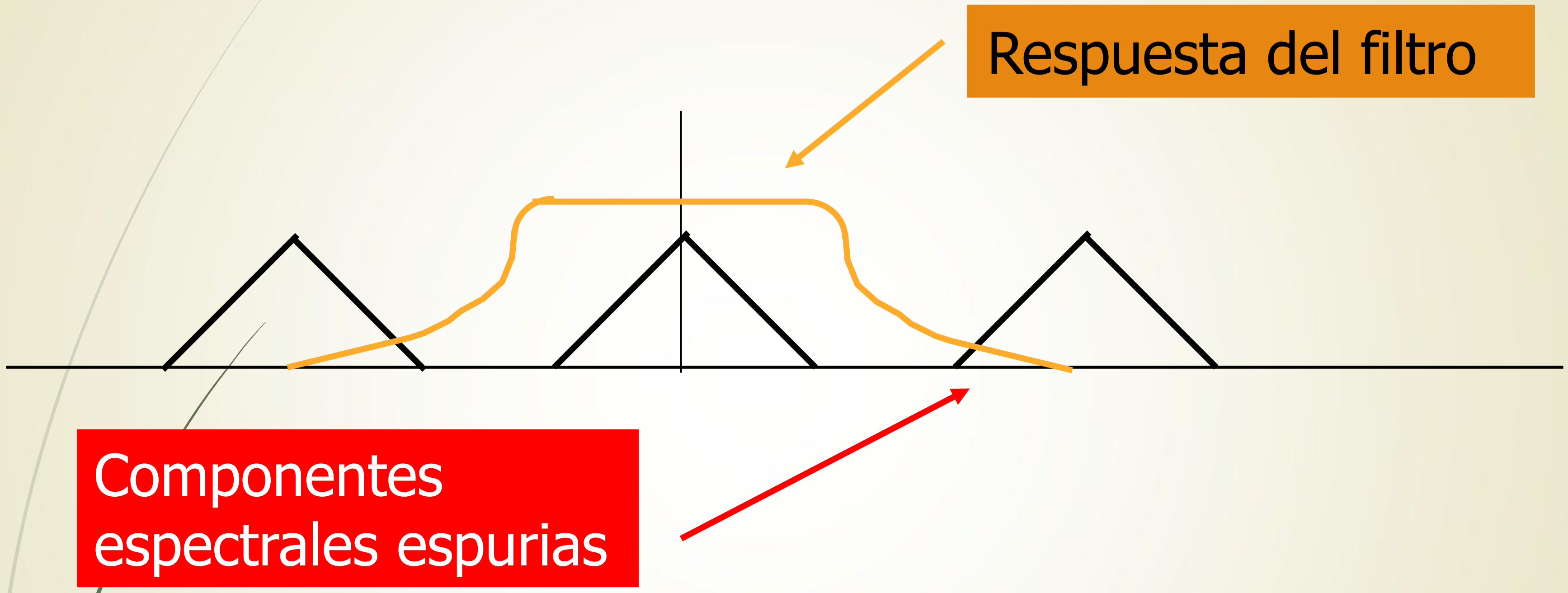
$$\Rightarrow H_{eq}(\omega)=\frac{1}{P(\omega)}$$




|X(f)|
f
-fm
fm


Xp(f)
Sinc Function
-fs
-fm
fm
fs

Filtros de reconstrucción no ideales



Filtros de reconstrucción reales: se recurre al empleo de bandas de seguridad $\Rightarrow$ incrementar ω_s

Prof. Jorge Runco

Filtros de reconstrucción no ideales

- ✓ El problema se puede tratar en el dominio de la frecuencia. Vemos que las componentes no deseadas están muy atenuadas.
- ✓ El mejor procedimiento es un cuidadoso diseño del filtro.
- ✓ Para una forma de respuesta de filtro dada, se puede mejorar esta interferencia aumentando la f de muestreo.

Prof. Jorge Runco

Interpolación vista en el dominio del tiempo

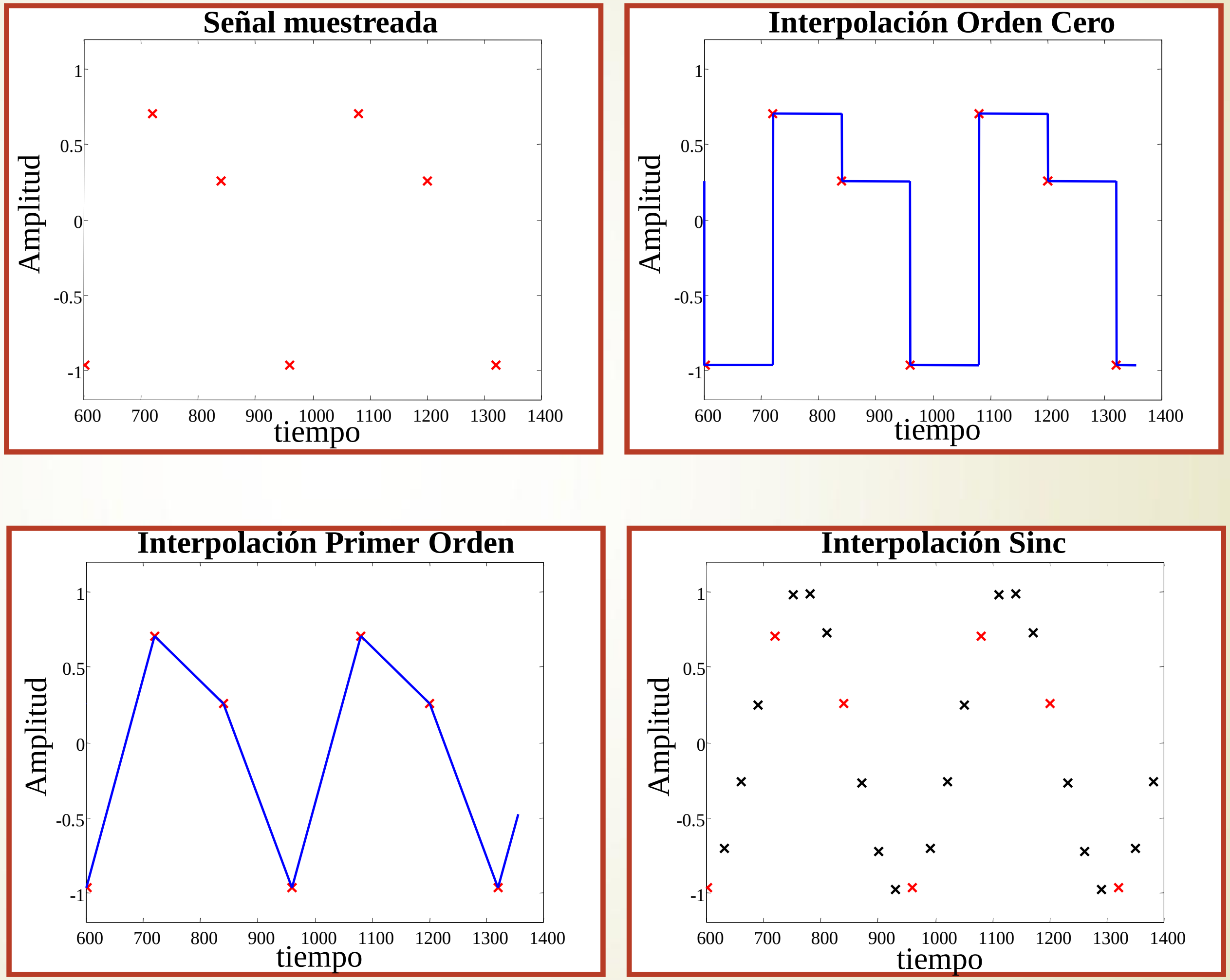
Interpolación ≡ reconstrucción (aproximada ó exacta) de una función a partir de sus muestras.

- <u>Retenedor de Orden Cero</u>: retiene el valor de la muestra hasta la próxima. Es el más simple.

- <u>Interpolación Lineal</u>: los puntos adyacentes se conectan con una línea recta.

- <u>Interpolación de mayor Orden</u>: los puntos se unen mediante polinomios de grado mayor u otras funciones matemáticas.

- <u>Interpolación Sinc</u>: cada muestra corresponde al peso de una **sinc** centrada en el instante de muestreo, y los valores intermedios se otienen sumando las contribuciones de cada una de estas funciones.

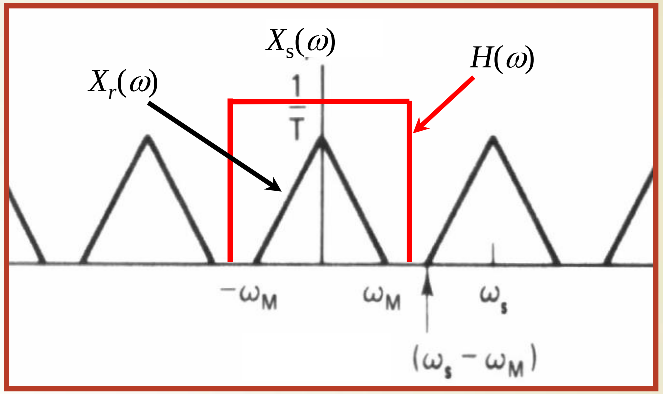


INTERPOLACIÓN SINC

Prof. Jorge Runco

Para reconstruir espectralmente la señal se emplea un LPF ideal

$\Rightarrow X_r(f) = X_s(f) \cdot H(f)$ con $H(f) = \text{rect}\,[f/(2f_c)]$ y $f_c = f_s/2$



$$x_{r(t)} = x_s(t) * h(t)$$

$$= h(t) * \sum_n x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$

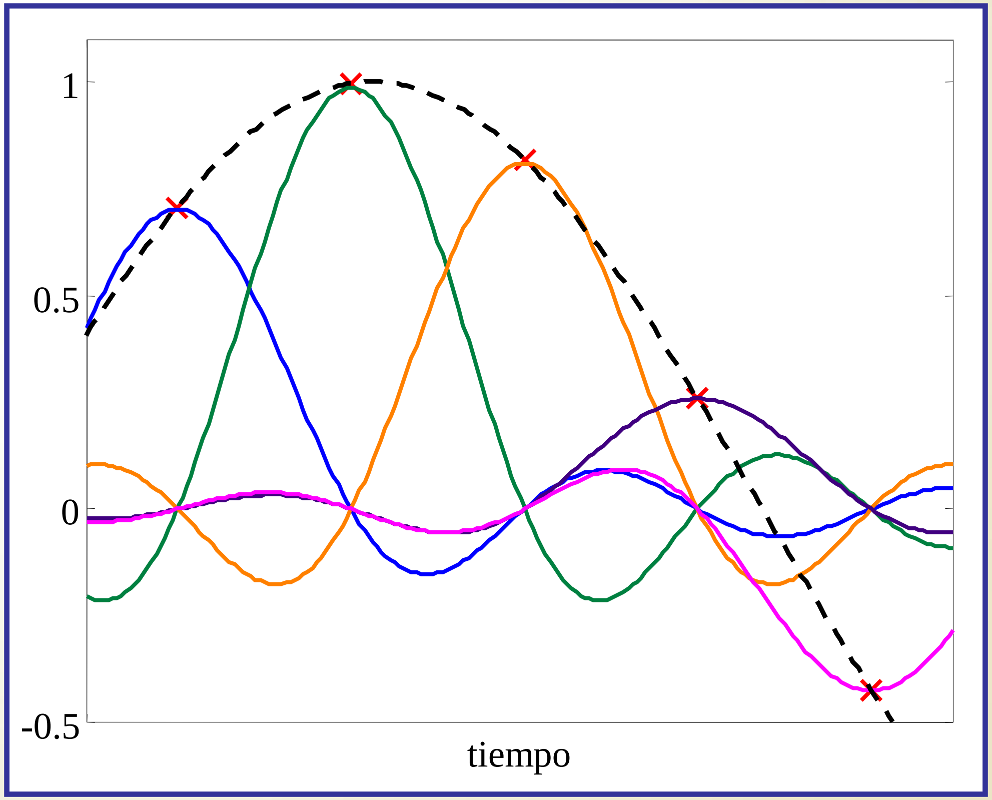
$$= \sum_n x(nT_s) \cdot h(t - nT_s)$$

$$h_r(t) = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

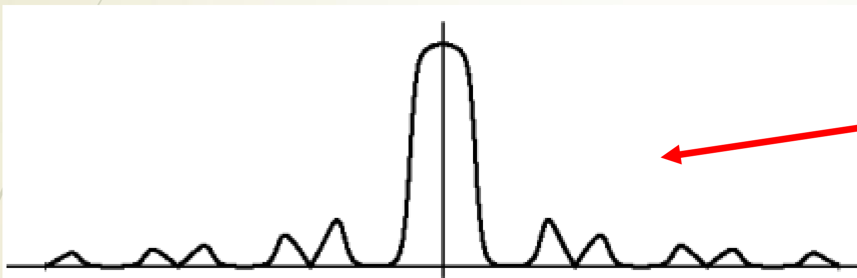
$$x_r(t) = \sum_n x(nT_s) \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\omega_c (t - nT_s)}{\pi}\right]$$

considerando $f_c = f_s/2$:

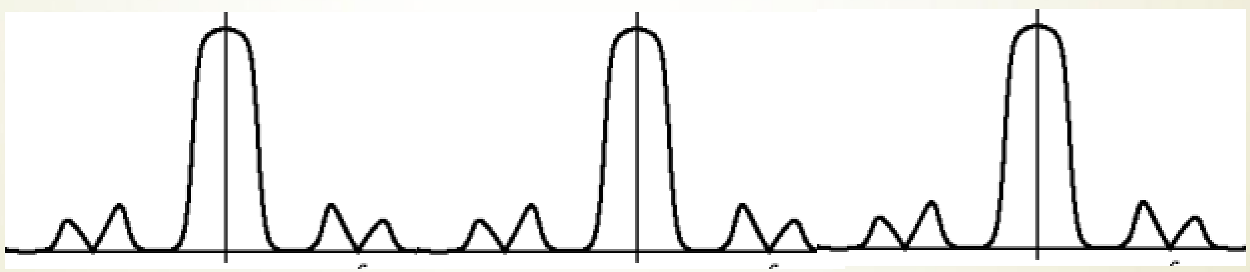
$$\boxed{x_r(t) = \sum_n x(nT_s) \cdot \text{sinc}(f_s t - n)}$$



Señales de banda limitada- Interferencia de colas espectrales (aliasing)



Espectro de la señal original



Espectro de mensaje muestreado con interferencia

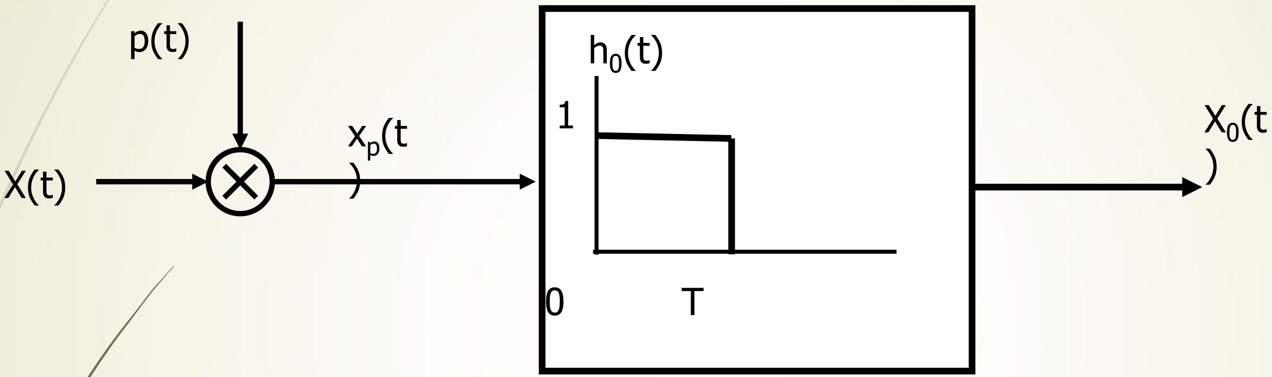
Hay que filtrar la señal antes de muestrear

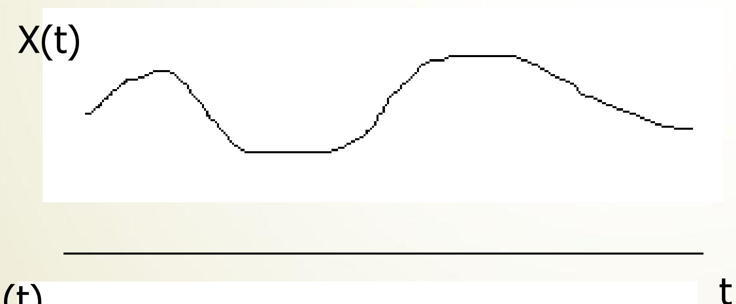
Prof. Jorge Runco

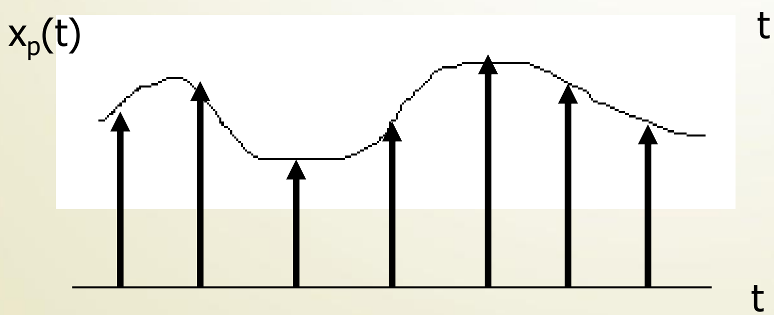
Filtro de Aliasing

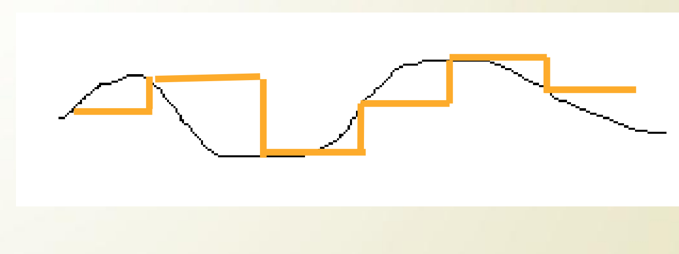
Señal NO limitada en banda: se debe asegurar que la señal no tenga componentes superiores a $\omega_s/2$ $\Rightarrow$se aplica un filtro pasabajos en la entrada $\equiv$ Filtro anti-aliasing (es el peor inconveniente porque modifica la información).

Muestreo con un Retenedor de Orden Cero









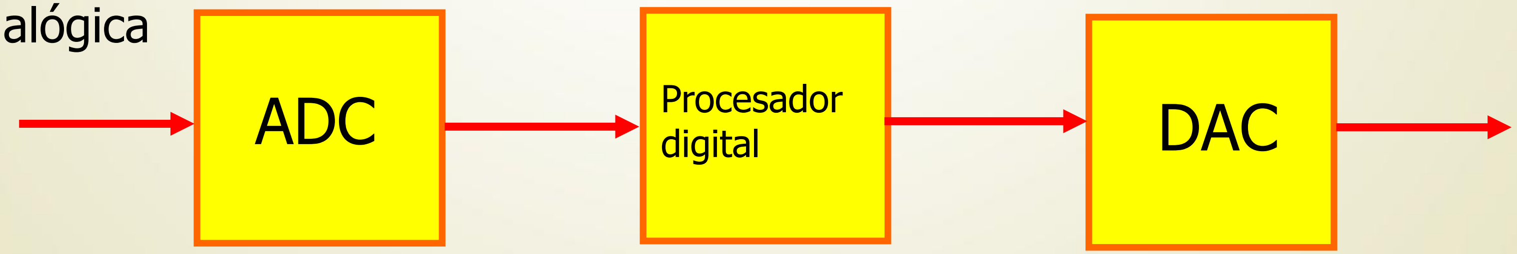
Prof. Jorge Runco

Procesamiento digital

Prof. Jorge Runco

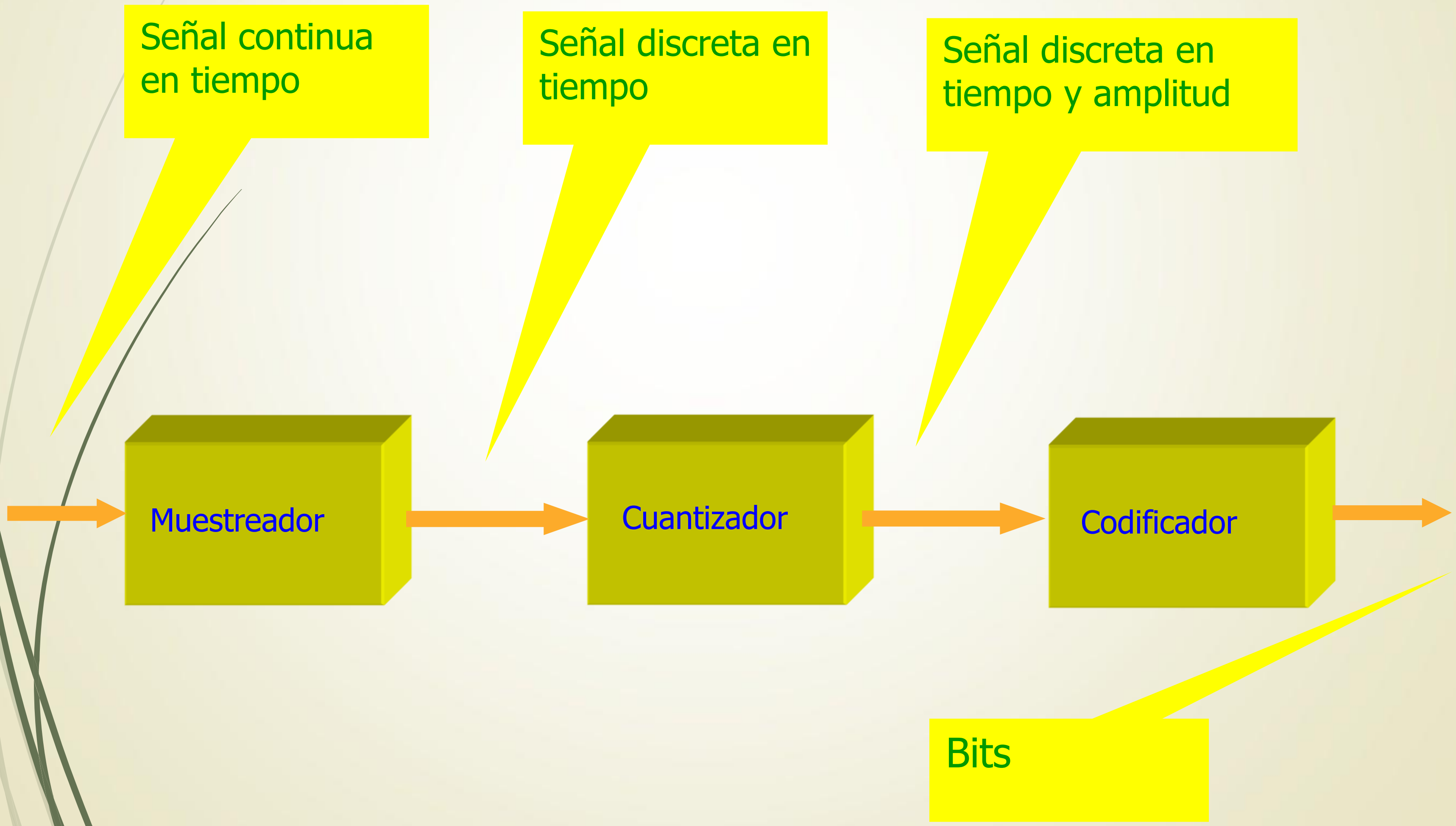
Las técnicas de señales digitales proporciona un método alternativo para procesar una señal analógica de interés práctico tales como la voz, señales biológicas, sísmicas, del sonar y de los distintos tipos de comunicaciones. Para realizar esto, es necesario antes que nada de una interfaz entre la señal analógica y el procesador digital y viceversa. Estas interfaces son el convertidor Analógico-Digital (ADC) y el convertidor Digital-Analógico (DAC) como se muestra en la figura

Señal analógica



Señal analógica

Conversión A/D - Digitalización



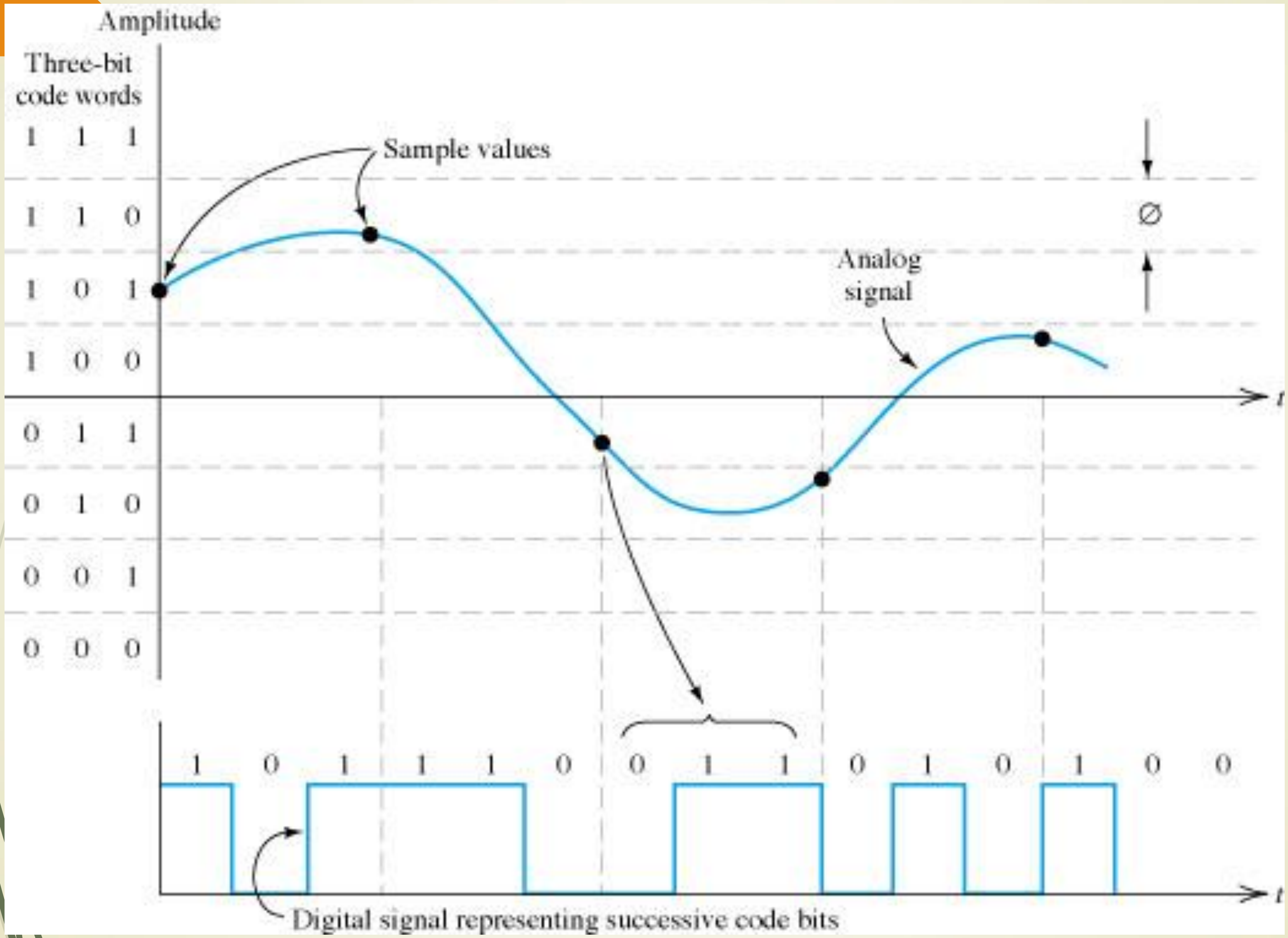
Prof. Jorge Runco

Prof. Jorge Runco

Conversión Analógico-Digital y Digital-Analógico

- Para procesar señales analógicas por medios digitales es necesario convertirlas a formato digital, esto es, transformarlas en una secuencia de números de precisión finita. Este procedimiento se denomina conversión analógico-digital (ADC).

Conversión analógica digital



ADC : cuatro procesos

- *Muestreo (sampling)*: tomar muestras periódicas de la amplitud de la onda.
- *Retención (hold)*: las muestras son retenidas hasta "evaluarlas".
- *Cuantificación*: la amplitud de la señal muestreada toma valores discretos.
- *Codificación*: se traducen los valores obtenidos a N bits, asigna un valor entre 2^N posibles.

Prof. Jorge Runco

Hasta aquí ADC

- Luego se podría *comprimir* la información, en bits, para tener en cuenta la capacidad de almacenamiento, tasa de datos, etc. que el sistema de cómputo puede manejar. (MP3, JPEG, etc)

Seguimos……

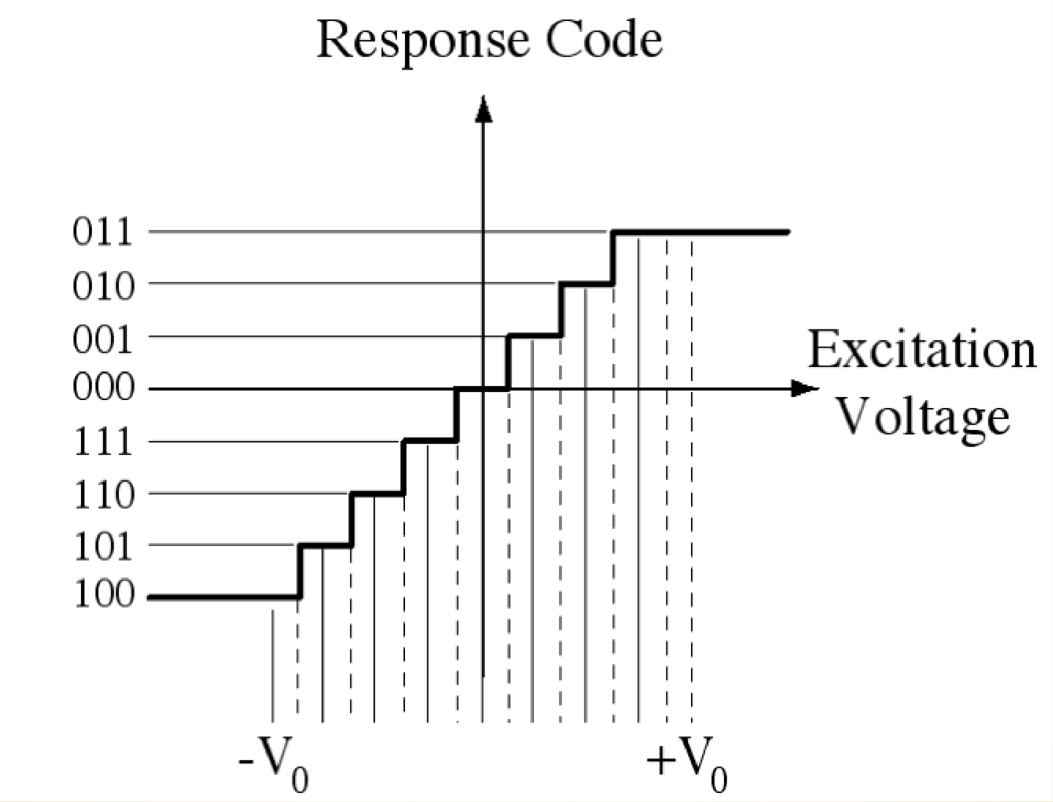
- De acuerdo a lo que es una señal analógica, esta puede tener una cantidad de valores infinitos.
- Como es imposible representarlos a todos, estas señales se dividen en niveles determinados, y así se convertirán en un número finito de niveles (niveles de cuantización).
- Las muestras se convierten en un número binario, cuyo valor es cercano al valor de la muestra.
- Ej : con 8 bits podemos representar 256 niveles

Prof. Jorge Runco

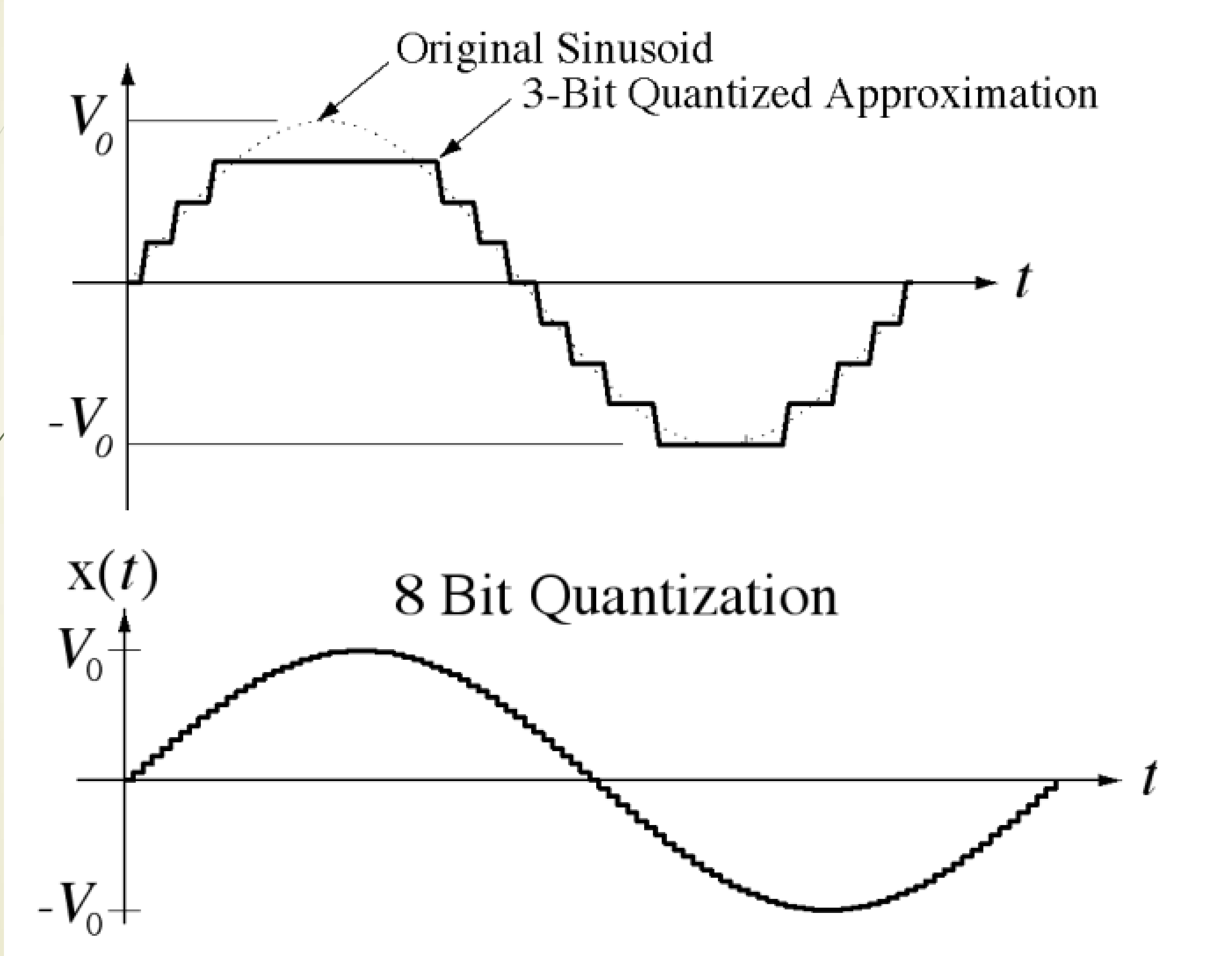
Relación entrada/salida para un ADC

Prof. Jorge Runco

Código digital de salida

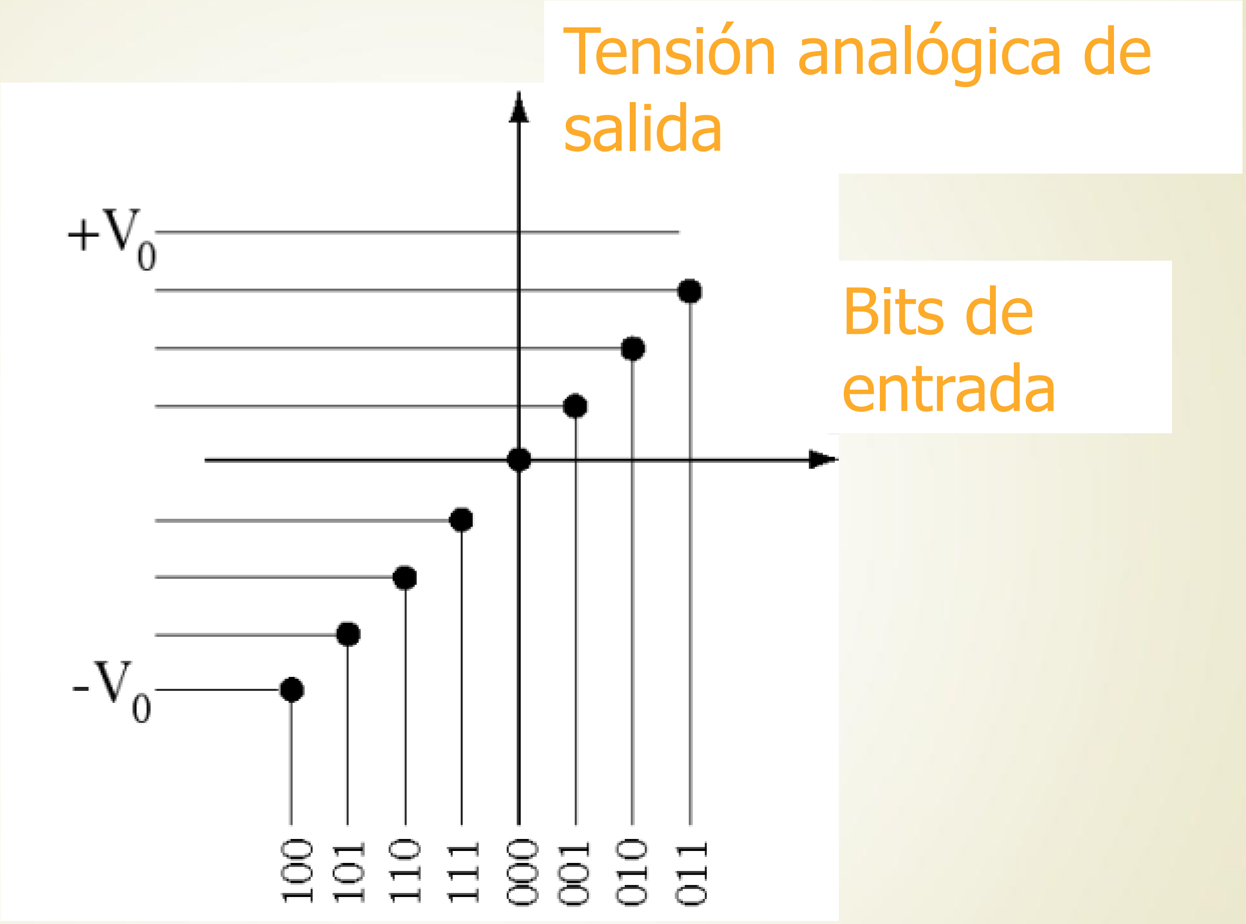


Señal analógica de entrada



Prof. Jorge Runco

Relación entrada salida DAC



Ejemplo

- Supongamos un convertidor A/D produce 4 bits de salida.
- Con estos 4 bits tenemos 16 niveles de voltaje a representar.
- De acuerdo a la figura, consideremos un intervalo de señal analógica entre 0 y 15 volts.

Ejemplo

- El convertidor A/D divide el intervalo en 16 niveles, los cuales representan 15 incrementos, entre 0 y 15 volts.
- Si medimos el valor 0 Volt, el ADC producirá el valor binario 0000.
- Si la muestra es de 8 volt, obtendremos un 1000.

Ejemplo

- Si ahora medimos 11,8 Volts, el ADC, produce el número binario 1100, cuyo equivalente decimal es el 12.
- Por lo tanto aquí apreciamos el error producido y que según vimos es el ERROR DE CUANTIZACION.
- Para reducirlo , no nos queda más que aumentar la cantidad de niveles de voltaje, lo que lleva a aumentar la cantidad de bits a utilizar
- Ej : con 8 bits, tendremos 256 niveles para dividir la señal analógica.
- Así, podemos acercarnos más al valor real analógico

Ejemplo

- La conversión A/D , es un proceso de muestreo o de mediciones de la señal analógica, en intervalos de tiempos regulares.
- En los tiempos mencionados, se mide el valor instantáneo de la señal analógica, y se genera un valor binario proporcional a la muestra.

Prof. Jorge Runco

Ejemplo

- Como ya vimos este tiempo está dado por la frecuencia de muestreo expresada por Nyquist, que dará un número de muestras que nos permitirá representar en forma adecuada la señal analógica.
- Por lo tanto “tenemos” que conocer la máxima frecuencia presente en la señal a muestrear.
- El fabricante suele especificar un tiempo llamado de conversión: “de la señal analógica a los bits”.
- Este tiempo nos fija la máxima frecuencia de mustreo con un dado conversor.

Ejemplo

- ✓ Analicemos el caso de una emisora de FM, que deseamos digitalizar.
  - ✓ La frecuencia más alta de audio es 15 (KHZ)
  - ✓ Por lo tanto la frecuencia de muestreo debiera ser de 30(KHZ).
  - ✓ Pero la frecuencia real de muestreo se hace entre 3 a 10 veces mayor, es decir entre 45 a 150 (KHZ).
- ✓ En el caso de discos compactos CD, que almacenan señales de música hasta 20 (KHZ), usan frecuencias de muestreo de 44,1 a 48 (KHZ)

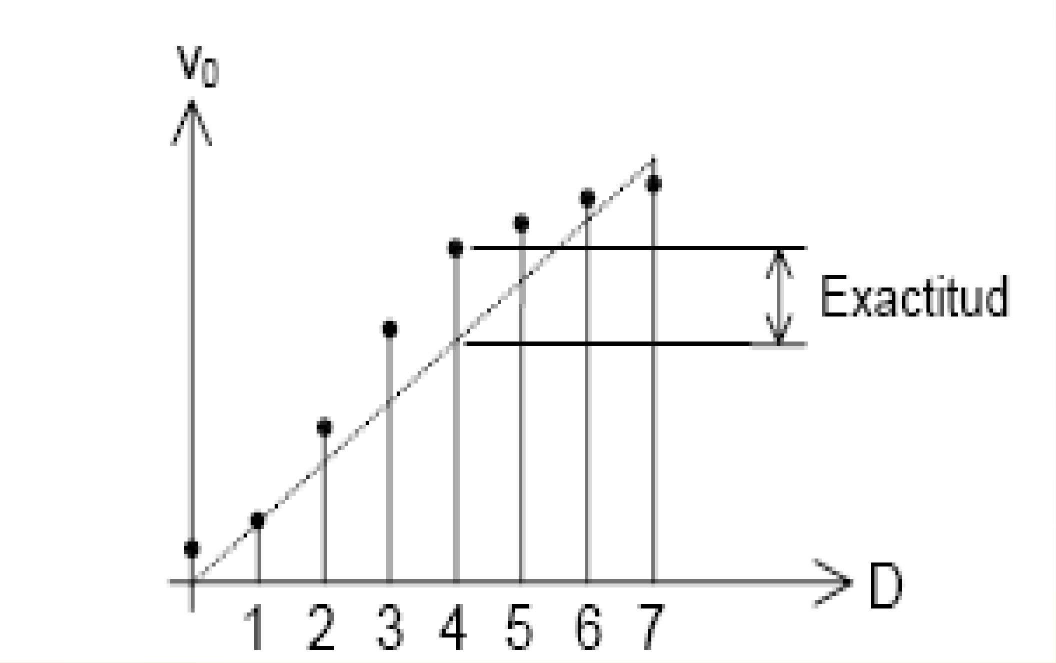
Prof. Jorge Runco

Especificaciones

- Resolución: es la cantidad de bits o dígitos binarios que acepta en su entrada. También puede expresarse como el porcentaje del valor nominal máximo (fondo de escala). Ejemplo: un conversor de 10 bits también puede tener su resolución expresada como $1/2^{10} \cong 0{,}0976$ %. Observar que la resolución por sí sola no indica nada respecto a la precisión del conversor.

- Exactitud: es la máxima desviación respecto a la línea recta que une el mínimo y el máximo valor ideales. Se expresa en LSB (least significant bit), lo cual significa que se usa el salto mínimo nominal como unidad. Otra forma de expresarlo es en porcentaje del valor máximo nominal. La exactitud ideal es 0 LSB. Es necesario tener en cuenta que esta especificación incluye todos los errores posibles del conversor.

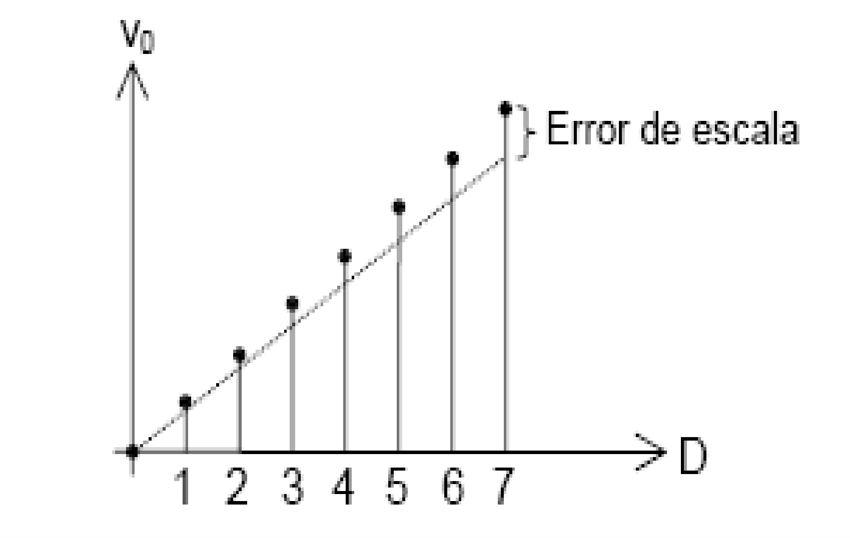
Especificaciones



Prof. Jorge Runco

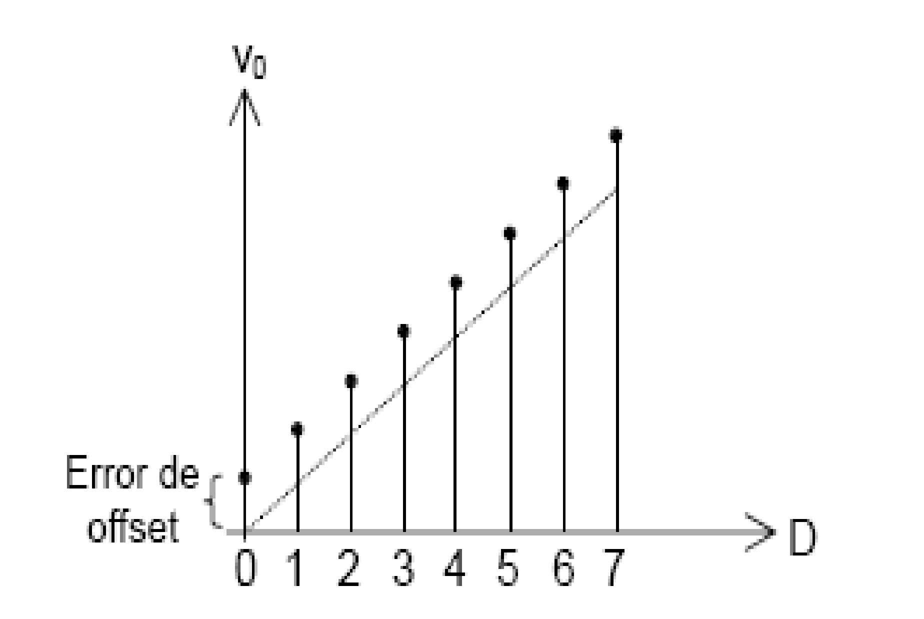
Especificaciones

- Error de escala: Es el error que se obtiene a fondo de escala con respecto al valor ideal. Se debe en general a errores de ganancia, en la referencia o en la red resistiva. Se expresa también en LSB a fondo de escala. El error de escala ideal es 0 LSB.



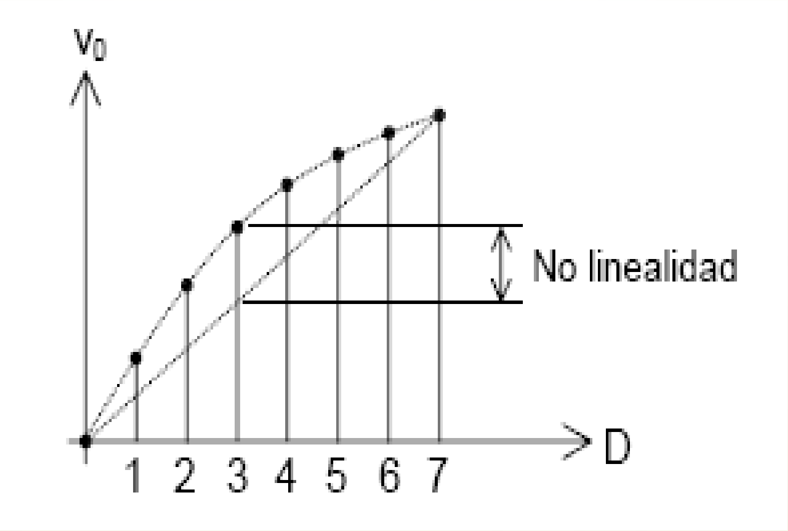
Especificaciones

- Error de offset: Es el valor de salida obtenido cuando la entrada es nula. Se mide en porcentaje del máximo nominal o en LSB. El valor ideal es 0 LSB.



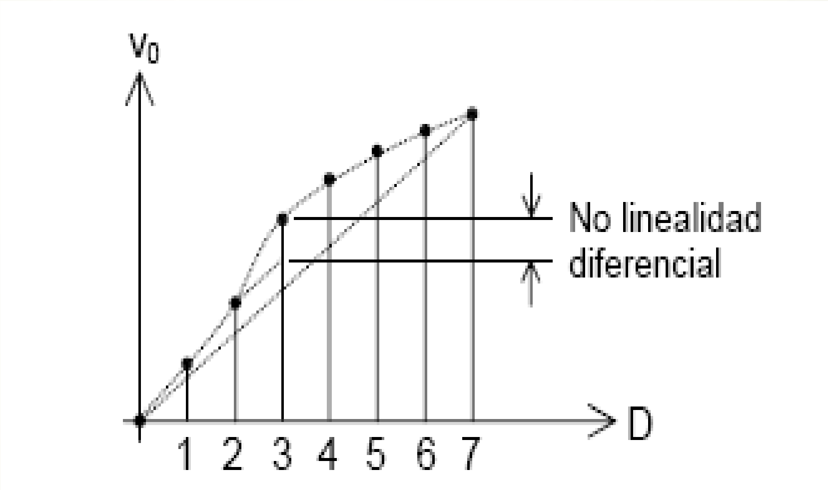
Especificaciones

- No linealidad: Indica la máxima separación de la línea recta que resulta luego de eliminar los errores de escala y de offset.



Especificaciones

- No linealidad diferencial: Es la máxima diferencia entre un salto a la salida debido a un cambio de 1 LSB y el salto ideal. Se expresa como porcentaje del máximo nominal o en LSB. El valor ideal es 0 LSB.



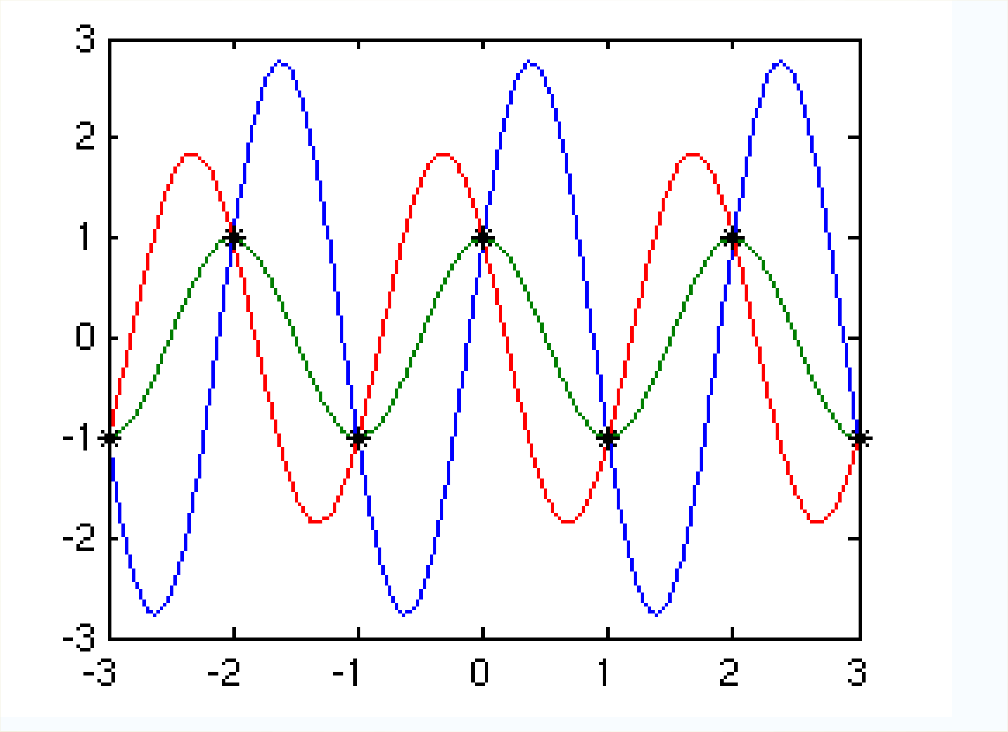
Prof. Jorge Runco

Especificaciones

- Tiempo de establecimiento: Es el máximo tiempo transcurrido luego de un cambio de código de entrada arbitrario para alcanzar el valor analógico correspondiente con un error de a lo sumo ± 0,5 LSB. El tiempo de establecimiento de un conversor D/A tiene dos componentes: una debida al comportamiento dinámico lineal y otra debido al *slew-rate* del amplificador operacional (fenómeno no lineal). La primera se debe a las capacidades parásitas en paralelo con las llaves analógicas, que hacen que la conmutación entre un código de entrada y otro no sea instantánea.

- Sus características son similares a las de cualquier transitorio, con una aproximación exponencial al valor final. La componente debida al *slew-rate* del amplificador se caracteriza por un crecimiento lineal con pendiente fija, por lo cual cuanto mayor sea la amplitud del salto (por ejemplo un cambio en la entrada de 00...0 a 11...1) mayor será el tiempo de crecimiento. En general predomina el efecto del *slew-rate*, salvo que se usen amplificadores de muy alta velocidad.

Muestreo de un sen con f = frecuencia límite de Nyquist



La señal a muestrear no debe tener componentes en el límite establecido por Nyquist

Prof. Jorge Runco