Seminario de Partículas y Campos – Curso 2023

Práctica 5: Cálculo de amplitudes.

1. A partir del desarrollo perturbativo de la matriz S para QED, calcule la contribución, en el espacio de configuración y al orden más bajo no nulo, a los procesos que se listan a continuación. En cada caso haga una representación diagramática de las contribuciones relevantes.

   (a) Dispersión Compton de positrones, $e^+ + \gamma \to e^+ + \gamma$.
   (b) Aniquilación electrón-positrón a fotones, $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$.
   (c) Dispersión Bhabha, $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$. Para este caso muestre que aparece un signo relativo entre las dos contribuciones relevantes. Relacione ambos diagramas en términos del intercambio de un electrón inicial con un positrón final.

2. (a) Muestre por argumentos cinemáticos que cualquier proceso que involucre dos fermiones y un fotón reales (en capa de masa) es incompatible con la conservación del cuadrimomento.
   (b) A partir del resultado del inciso anterior muestre que el elemento de matriz del término de orden 1 en el desarrollo de la matriz S para QED es nulo.

3. Calcule el elemento de matriz para la dispersión Compton de positrones en el espacio de momentos. Indentifique la expresión para la amplitud de Feynman y compruebe que es posible obtenerla aplicando directamente las reglas de Feynman para QED sobre los diagramas relevantes.

4*. Repita el ejercicio anterior para el caso de dispersión Compton de electrones.

5. Considere la densidad Lagrangiana que describe la dinámica entre un campo escalar real $\phi(x)$ y un campo feriónico $\psi(x)$ dada por $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{int}$ siendo $\mathscr{L}_0$ la parte libre para ambos campos y la parte de interacción pseudoescalar viene dada por:

$$\mathscr{L}_{int}(x) = -iy'\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\phi(x),$$

   donde y' es un parámetro real.

   (a) Demuestre que el Hamiltoniano correspondiente es hermítico. ¿Qúe término debería agregarse en caso de que el campo ϕ fuese complejo para respetar la hermiticidad?.
   (b) Deduzca la regla de Feynman para el vértice asociado a esta interacción. Muestre que la regla para el vértice no se modifica por considerar todos los momentos entrantes o uno entrante y dos salientes.

6. (a) En el contexto de QED, utilice el Teorema de Wick para identificar cuál es el término que da lugar al diagrama de autoenergía del fotón a 1-loop.
   (b) Demuestre, partiendo del resultado del inciso anterior, que la amplitud de Feynman asociada a dicho diagrama viene dada por:

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu \, (ie^2\, \Pi^{\mu\nu}(q)),$$

   con q el momento del fotón y donde la autoenergía es definida según:

$$ie^2\, \Pi^{\mu\nu} = \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4}(-1) \int d^4p' \, \mathrm{Tr}\,[\gamma^\mu iS_F(p'+q)\gamma^\nu iS_F(p')].$$

(c) Corrobore el resultado anterior aplicando directamente las reglas de Feynman para QED.

(d) Evalúe la traza en el espacio de Dirac usando las siguientes identidades:

$$\mathrm{Tr}[I_4] = 4$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}}] = 0$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 g^{\mu\nu}$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4\left(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}\right)$$

(e) ¿Qué dependencia en el momento del fotón impone la identidad de Ward para la función autoenergía?

7. Considere la densidad Lagrangiana $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{int}$ que describe un campo escalar real $\phi(x)$ siendo $\mathscr{L}_0$ la parte libre y donde

$$\mathscr{L}_{int}(x) = -\frac{\lambda_3}{3!}\phi(x)^3$$

representa la autointeracción (λ_3 es un parámetro real).

(a) Deduzca la ecuación de movimiento para este campo.

(b) A partir del desarrollo de la matriz S, obtenga la amplitud de dispersión en el espacio de momentos asociada al proceso $\phi(p_1)\phi(p_2) \to \phi(p_1')\phi(p_2')$.

(c) Escriba las distintas contribuciones al proceso anterior obtenidas en el inciso anterior en términos de las variables de Mandelstam: $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2$, $t = (p_1 - p_1')^2 = (p_2' - p_2)^2$ y $u = (p_1 - p_2')^2 = (p_1' - p_2)^2$. Demuestre la siguiente relación entre estas variables:

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 + p_2'^2.$$

8*. Suponga que a la densidad Lagrangiana del problema anterior se le agrega una autointeracción cuártica, de manera que se tiene:

$$\mathscr{L}_{int}(x) = -\frac{\lambda_3}{3!}\phi(x)^3 - \frac{\lambda_4}{4!}\phi(x)^4$$

(a) Deduzca la ecuación de movimiento para este campo en esta teoría.

(b) A partir del desarrollo de la matriz S, calcule la amplitud de dispersión en el espacio de momentos asociada al proceso $\phi(p_1)\phi(p_2) \to \phi(p_1')\phi(p_2')$. Estudie las contribuciones solo hasta segundo orden en los acoples λ_3 y λ_4. Compare con lo obtenido en el problema anterior.