

Seminario de Partículas y Campos – Curso 2023

Práctica 4: Matriz S

- (a) A partir de la relación entre las representaciones de Heisenberg y de Interacción y la representación de Schrödinger, deduzca las relaciones entre operadores y estados en las representaciones de Heisenberg y de Interacción en términos del operador unitario:

$$U(t) = e^{iH_0^S(t-t_0)} e^{-iH^S(t-t_0)},$$

donde H_0^S y H^S hacen referencia al hamiltoniano libre y total en la representación de Schrödinger, respectivamente.

- (b) Encuentre cómo es la evolución temporal de los operadores y estados en la representación de Interacción. Dicho de otro modo, deduzca las ecuaciones de movimiento:

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{O}^I(t) = [\mathcal{O}^I(t), H_0] \quad \text{y} \quad i \frac{d}{dt} |A, t\rangle_I = H_{int}^I(t) |A, t\rangle_I$$

siendo H_0 el Hamiltoniano libre (que es el mismo en las representaciones de Schrödinger y de Interacción) y $H_I^{I(S)}(t)$ el Hamiltoniano de interacción en la representación de Interacción (Schrödinger) dado por

$$H_I^I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_I^S(t) e^{-iH_0(t-t_0)}$$

- Suponga que el operador O es una constante de movimiento en la representación de Heisenberg para campos libres. Suponga ahora que se tienen campos interactuantes de manera que el hamiltoniano puede separarse como $H_0 + H_I$, con H_0 el hamiltoniano que describe los campos libres y H_I el hamiltoniano que describe su interacción.
 - Demuestre que $[O^I, H_0^I] = 0$. ¿Puede decirse entonces que O representa una constante de movimiento para campos interactuantes?
 - Indique qué condición debe satisfacer el operador O para constituir una constante de movimiento y muestre que lo es para cualquiera de las tres representaciones.
- (a) La matriz S es unitaria. Partiendo de la definición en términos del Hamiltoniano, demuestre que la matriz S a segundo orden en teoría de perturbaciones verifica explícitamente esta condición.
 - Verifique que dicha condición está relacionada con la conservación de la probabilidad, es decir, que las interacciones mantienen el espectro en el sentido de que los estados iniciales y finales posibles desarrollan un mismo espacio de Hilbert. ¿Qué característica del Hamiltoniano asegura esta conservación?
- Pruebe la equivalencia entre las series de Dyson escritas sin y con orden temporal. Explícitamente:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \dots H_{int}(t_n) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \dots H_{int}(t_n)\} \end{aligned}$$

¿Qué ventaja tiene la expresión con el orden temporal explícito?

5. (a) Para la demostración del Teorema de Wick es útil descomponer un campo A en sus partes lineales en operadores de creación y aniquilación, sean A^\pm . ¿Cómo actúan estos operadores A^+ y A^- sobre el vacío?

(b) Demuestre que

$$AB - N\{AB\} = [A^+, B^-]_{\mp}$$

donde $[\cdot, \cdot]_-$ es el conmutador para campos bosónicos y $[\cdot, \cdot]_+$ es el anticonmutador para campos fermiónicos.

(c) A partir de lo anterior muestre que

$$T\{A(x)B(y)\} = N\{A(x)B(y)\} + \langle 0|T\{A(x)B(y)\}|0\rangle$$

tanto para campos bosónicos como fermiónicos.