Seminario de Partículas y Campos – Curso 2023

Práctica 3: Campo Electromagnético

1. Muestre que la densidad Lagrangiana de Fermi,

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)),$$

es equivalente a añadir el término $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu(x))(\partial_\nu A^\nu(x))$ a la densidad Lagrangiana de Maxwell

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x).$$

2. A partir de las ecuaciones de movimiento sin fuentes y agotando toda la libertad proporcionada por la invariancia de gauge, muestre que hay solo dos estados de polarización independientes y que son transversales a la dirección de propagación. ¿Ocurriría lo mismo si el fotón fuese masivo?.

3. (a) Pruebe que $[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}), a_3^\dagger(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})] = 0$, donde los subíndices 3 y 0 hacen referencia a los modos longitudinales y escalares, respectivamente.

(b) Muestre que el estado más general para el vacío, es decir, para el estado en el cual no hay fotones transversales y que solo contiene la mezcla más general permitida de fotones longitudinales y escalares, viene dado por

$$|\Psi_{\mathrm{SL}}\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} ... \, c(n_1, n_2, ...) \prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^\dagger)^{n_i}|0\rangle,$$

donde $\alpha_i \equiv a_3(\mathbf{k}_i) - a_0(\mathbf{k}_i)$ y $|0\rangle$ es el estado de vacío en el que no hay fotones de ningún tipo presentes.

(c) Pruebe que la norma del estado resulta $\langle\Psi_{\mathrm{SL}}|\Psi_{\mathrm{SL}}\rangle = |c(0, 0, ...)|^2$.

(d) De la expresión del estado más general con un número n de fotones transversales con momento $\mathbf{k}$ y polarización r.

4. Considere un estado $|\Psi_{\mathrm{T}}\rangle$ que contiene únicamente fotones transversales. Sea el estado

$$|\Psi'_{\mathrm{T}}\rangle = \{1 + C\,[a_3^\dagger(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})]\,\}|\Psi_{\mathrm{T}}\rangle,$$

con C una constante. Muestre que el reemplazo de $|\Psi_{\mathrm{T}}\rangle$ por $|\Psi'_{\mathrm{T}}\rangle$ corresponde a una transformación de gauge, es decir, que

$$\langle\Psi'_{\mathrm{T}}|A^\mu(x)|\Psi'_{\mathrm{T}}\rangle = \langle\Psi_{\mathrm{T}}|A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)|\Psi_{\mathrm{T}}\rangle,$$

con

$$f(x) = \left(\frac{2\hbar c^4}{V\omega_{\mathbf{k}}^3}\right)^{1/2} \mathrm{Re}\,(iCe^{-ikx}).$$

¿Corresponde la transformación efectuada al gauge de Lorentz?.

5. Considere la siguiente generalización de la densidad Lagrangiana de Fermi para el campo electromagnético:

$$\mathscr{L}_\xi = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2.$$

(a) Obtenga las ecuaciones de movimiento en el espacio de configuración y en el de momentos.

(b) Calcule el propagador en el espacio de momentos a partir de la inversa del operador en el espacio de momentos obtenido en el inciso anterior. Para ello comience escribiendo la inversa de la forma más general admitida por la invariancia de Lorentz.

(c) ¿Qué ocurre si intenta obtener el propagador utilizando el procedimiento del inciso anterior pero a partir del Lagrangiano de Maxwell?.

6. Considere la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} F^{\dagger}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m_W^2 \, W^{\dagger}_{\mu} \, W^{\mu},$$

la cual describe un campo vectorial $W^{\mu}(x)$ de masa m_W, siendo $F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\nu} W^{\mu} - \partial^{\mu} W^{\nu}$.

(a) Derive la ecuación de Proca, es decir, la ecuación de movimiento para $W^{\mu}(x)$.

(b) Muestre que de las ecuaciones de movimiento se tiene automáticamente que $\partial_{\mu} W^{\mu} = 0$ para $m_W \neq 0$.

(c) Escriba la ecuación de Proca en el espacio de momentos y obtenga el propagador a partir de la inversa del operador que se aplica sobre W^{μ} en dicha ecuación.