Seminario de Física de Partículas y Campos - 2022
Departamento de Física - UNLP

Práctica 0

Esquemas en Mecánica cuántica

1. Esquemas en Mecánica cuántica

   (a) Definir los esquemas de Schrödinger y Heisenberg.

   (b) Dado un observable, tenemos operadores asociados $\hat{A}_S$ y $\hat{A}_H$ en el esquema de Schrödinger y Heisenberg respectivamente. Encontrar una relación entre ambos. Use el operador evolución que se define como:
   $$U(t) = e^{-iH_s t}, \tag{1}$$
   donde H_s es el Hamiltoniano en el esquema de Schrödinger.
   Mostrar que si $\hat{A}_S$ conmuta con H_s, entonces $\hat{A}_S = \hat{A}_H$. De un ejemplo de un observable de un sistema cuántico para el cual esto suceda.

   (c) A partir de la relación obtenida en 1b, obtener la ecuación de Heisenberg.

   (d) Resolver el oscilador armónico cuántico en el esquema de Heisenberg.

2. Tome de nuevo el Hamiltoniano del oscilador armónico
   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\ \hat{x}^2, \tag{2}$$

   (a) Obtenga nuevos operadores canónicos del problema tales que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ y $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$, $\hat{a}$ es llamado operador de aniquilación(o destrucción) y $\hat{a}^\dagger$ de creación.

   (b) Asuma que estamos en la base en que el operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger a$ es diagonal, i.e $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$(con $n \in \mathbb{Z}_+$), Demuestre que en dicha base del espacio de Hilbert, $\hat{H}$ tambien es diagonal.

   (c) En esta base del espacio de Hilbert es claro el porque llamamos a $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ operadores de aniquilación y creación. Explique esto usando el conmutador con el operador $\hat{N}$. Con respecto a $\hat{H}$ que podemos decir de la acción de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ sobre los estados $|n\rangle$.

   (d) Demuestre que $\hat{a}|0\rangle = 0$, y que a partir de dicho estado puedo encontrar todo los demás $|n\rangle$, usando $\hat{a}^\dagger$. Usando estos resultados muestre como lucen los elementos de matriz de los operadores $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{N}$ y $\hat{H}$ en la base $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

   (e) A partir de los operadores de creación y destrucción definidos, encontrar la función de onda del estado fundamental $|0\rangle$.

Funciones de Green

3. Funciones de Green

   (a) Obtener la función de Green de la ecuación
   $$(-\nabla^2 + m^2)\phi = \rho, \tag{3}$$
   con $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. considerando tambien el caso $m^2 = 0$.

4. Propagadores de La Mecánica cuántica

   (a) Una partícula libre no relativista se propaga desde un punto $\vec{x}_0$ en el tiempo t_0 hasta otro punto $\vec{x}$ en el tiempo $t > 0$. Calcular la amplitud de transición de este proceso
   $$U(t) = \langle\vec{x}|e^{-i\hat{H}t}|\vec{x_0}\rangle \qquad con \qquad \hat{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}. \tag{4}$$

(b) Usando la expresión del Hamiltoniano relativista de una partícula libre: $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$, mostrar que

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x_0}|} \int_0^\infty dp\; p\; e^{-it\sqrt{\hat{p}^2+m^2}} \sin(p|\vec{x} - \vec{x_0}|). \tag{5}$$

Evaluar la expresión (5), mostrando que, (use para ello el medio que desee, por mano propia, algún programa como *Mathematica* o una tabla de integrales)

$$\int_0^\infty dx\; x\; e^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}\; \sin bx = \frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2 + b^2} K_2(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}), \tag{6}$$

¿Cómo es el comportamiento de U para $t = 0$? y ¿Cuándo $|x - x_0| >> t$?

5. Infinitos Osciladores acoplados

   (a) Obtener el Lagrangiano y las correspondientes ecuaciones de movimiento, de un sistema formado por n osciladores armónicos acoplados.

   (b) Argumentar como un campo escalar describe un continuo de osciladores.

Electromagnetismo

6. El tensor del campo electromagnético se define como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{7}$$

   (a) Construir, en términos de los campos eléctricos y magnéticos, la matriz de 4×4 que representa al tensor $F^{\mu\nu}$. Recuerde que subimos y bajamos con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$(tome $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$) $F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$.

   (b) Verificar que en estas dos expresiones

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \tag{8}$$

$$\partial_\alpha (*F)^{\alpha\beta} = 0 \text{ con } (*F)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\delta\gamma}\,, \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

   están contenidas las 4 ecuaciones de Maxwell.

Ecuación de Dirac

7. En busca de una versión relativista de la ecuación de Schrödinger en 3+1 dimensiones. Si tomo como Hamiltoniano relativista de una partícula libre a

$$H = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}. \tag{11}$$

Y sabiendo que la relatividad impone $H^2 = E^2 = p^2 + m^2$. Mostrar que para reescribir H como $H = \vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m$. $\alpha_{x,y,z}$ y β deben ser matrices que satisfacen

   (a)

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \alpha_i^2 = \text{Id}, \quad \beta^2 = \text{Id} \tag{12}$$

   (b) Argumente porque 4×4 es la mínima dimensionalidad que pueden tener estas matrices. La forma que toman las matrices β y $\vec{\alpha}$ en la representación de Dirac es

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

   donde $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, siendo las σ^i las matrices de Pauli. Compruebe que estas matrices tienen las propiedades descritas.

(c) Escribir la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano $H_D = \vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m$ (la D de Dirac), realizando las reglas de cuantización canónica habituales ($\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ y $E = i\frac{\partial}{\partial t}$). Considerar la función de onda como un objeto de 4 componentes, es decir

$$\Psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \psi^1(\vec{x},t) \\ \psi^2(\vec{x},t) \\ \psi^3(\vec{x},t) \\ \psi^4(\vec{x},t) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Mostrar que puedo llevar dicha ecuación a la forma

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{1}_{4\times 4}\right)\Psi(\vec{x},t) = 0, \tag{15}$$

con

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i \to \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}). \tag{16}$$

(d) Verificar que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{17}$$

(e) Encontrar los autovalores (energía) de la matriz

$$H_D = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m, \tag{18}$$

(f) Resolver la ecuación de Dirac en un sistema de referencia en reposo ($\vec{p} = \vec{0}$).

(g) Construya las autofunciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre en la representación de Dirac .

8. Sea una partícula de masa m y carga eléctrica q en un campo electromagnético $(\vec{E}, \vec{B})$, el lagrangiano no relativista clásico de la partícula es

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - q\phi + q\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}} \tag{19}$$

(a) Calcular el momento conjugado $\vec{P}$.

(b) Verificar que el Hamiltoniano del sistema en términos del momento conjugado es

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - q\vec{A})\cdot(\vec{P} - q\vec{A}) + q\phi. \tag{20}$$

(c) En el caso en que $\phi = 0$ y $\vec{B} = (0;0;B)$. Tome el gauge $\vec{A} = \frac{1}{2}B(-y;\ x\ ;0)$ y recordando que la energía potencial de un momento magnético en un campo magnético externo es

$$U_B = -\vec{\mu}_L\cdot\vec{B}, \ \text{ donde } \ \vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m}\vec{L} = -\beta\frac{\vec{L}}{\hbar}, \quad \beta = \frac{e\hbar}{2m}, \tag{21}$$

escribir el Hamiltoniano en términos del momento angular.

(d) Si ahora se tiene un electrón en el mismo campo magnético de (8c), experimentalmente se sabe que además del momento dipolar $\vec{\mu}_L$, el electrón tiene un momento dipolar intrínseco

$$\vec{\mu}_s \propto \vec{S} \tag{22}$$

donde $\vec{S}$ es un momento angular de Spin. Si el electrón pudiera ser descrito como un cuerpo rígido cargado que rota, la relación entre $\vec{\mu}_s$ y $\vec{S}$ sería la misma que entre $\vec{\mu}_L$ y $\vec{L}$. Dado que no es así, se debe escribir

$$\vec{\mu}_s = -g_s\beta\frac{\vec{S}}{\hbar}, \tag{23}$$

donde g_s se denomina razón giromagnética del electrón. El valor experimental de g_s es 2.0024. Escribir el nuevo Hamiltoniano no relativista.

En el marco de la Mecánica cuántica no relativista no puede predecirse el valor de g_s. Recién cuando se hace un análisis relativista se obtiene un valor teórico muy próximo al experimental, $g_s = 2$.

(e) Obtener el valor teórico clásico(el que se puede deducir de la ecuación de movimiento) de g_s . Para ello es suficiente escribir la ecuación de Dirac (15) en presencia de un Campo de Gauge A_μ, es decir:

$$\left[i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) - mc\right]\Psi(\vec{x},t) = 0 \leftrightarrow \left[\gamma^\mu(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc\right]\Psi(\vec{x},t) = 0, \tag{24}$$

y estudiar sus estados estacionarios.

i. Mostrar que (24) implica

$$\left[(p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu)(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu) - i\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\frac{\hbar e}{2c}F_{\mu\nu} - mc^2\right]\Psi = 0. \tag{25}$$

ii. Proponga el *ansätz* de onda plana para los estados estacionarios de la ecuación (25),

$$\Psi(\vec{x},t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\begin{pmatrix}\psi^1(\vec{x})\\ \psi^2(\vec{x})\\ \psi^3(\vec{x})\\ \psi^4(\vec{x})\end{pmatrix}, \tag{26}$$

y probar que de (25) se obtiene

$$\left[(E - e\phi)^2 - (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\hbar c(\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} - i\vec{\alpha}\cdot\vec{E})\right]\Psi(\vec{x}) = m^2c^4\Psi(\vec{x}). \tag{27}$$

Para ello use el conmutador $[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$. y que el operador de spin para el electrón es

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, \quad \text{con} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{28}$$

iii. Escriba en (27) la energía E, como $E = E' + mc^2$, tome el límite $E' << mc^2$ y obtenga $g_s = 2$ usando la discusión en (8d) y (8c).

(f) Encontrar el factor giromagnético a través de la ecuación de Dirac en 2+1[1] dimensiones con un $A^\mu = \frac{B}{2}(0,-y,x)$.

En este caso se tienen 3 matrices de Dirac $\gamma^\mu = (\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2)$ donde

$$\gamma^0 = a\sigma^3, \quad \gamma^1 = b\sigma^1, \quad \gamma^2 = c\sigma^2 \tag{29}$$

Encontrar cuanto tienen que valer las constantes a, b, c para cumplir con (17).

Un conjunto de referencias acotado que les puede ayudar, esta listado abajo. Hay muchas más. Pueden usar las que quieran. Escojan su aventura.

References

[1] Goldstein. Mecánica Clásica.

[2] J. B Marion. Dinámica clásica de las partículas y sistemas.

[3] Barut, Electrodynamics and classical theory of fields and particles.

[4] J.D. Jackson. Electrodinámica Clásica.

[1]En 2+1 dimensiones, los espinores tienen 2 componentes.

[5] Fidel Schaposnik. Notas del curso Mecánica Cuántica 2 de la licenciatura en Física de la UNLP. https://sites.google.com/site/schaposnik/

[6] Hans A. Bethe and Roman W. Jackiw. Intermediate Quantum Mechanic.

[7] Feynman volumen II: Electromagnetismo y materia.

[8] V. B Berestetskii, E. M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. Teoría Cuántica Relativista, volumen 4 Parte I del curso de Física Teórica.

[9] Greiner, Walter, Reinhardt, Joachim. Field Quantization.

[10] Greiner, Walter Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations.