

Práctica 0

## Esquemas en Mecánica cuántica

1. Esquemas en Mecánica cuántica

- (a) Definir los esquemas de Schrödinger y Heisenberg.
- (b) Dado un observable, tenemos operadores asociados  $\hat{A}_S$  y  $\hat{A}_H$  en el esquema de Schrödinger y Heisenberg respectivamente. Encontrar una relación entre ambos. Use el operador evolución que se define como:

$$U(t) = e^{-iH_s t}, \quad (1)$$

donde  $H_s$  es el Hamiltoniano en el esquema de Schrödinger.

Mostrar que si  $\hat{A}_S$  conmuta con  $H_s$ , entonces  $\hat{A}_S = \hat{A}_H$ . De un ejemplo de un observable de un sistema cuántico para el cual esto suceda.

- (c) A partir de la relación obtenida en 1b, obtener la ecuación de Heisenberg.
  - (d) Resolver el oscilador armónico cuántico en el esquema de Heisenberg.
2. Tome de nuevo el Hamiltoniano del oscilador armónico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2, \quad (2)$$

- (a) Obtenga nuevos operadores canónicos del problema tales que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  y  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ ,  $\hat{a}$  es llamado operador de aniquilación (o destrucción) y  $\hat{a}^\dagger$  de creación.
- (b) Asuma que estamos en la base en que el operador número  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  es diagonal, i.e  $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$  (con  $n \in \mathbb{Z}_+$ ), Demuestre que en dicha base del espacio de Hilbert,  $\hat{H}$  también es diagonal.
- (c) En esta base del espacio de Hilbert es transparente porque llamamos a  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  operadores de aniquilación y creación. Explique esto usando el conmutador con el operador  $\hat{N}$ . Con respecto a  $\hat{H}$  que podemos decir de la acción de  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  sobre los estados  $|n\rangle$ .
- (d) Demuestre que  $\hat{a}|0\rangle = 0$ , y que a partir de dicho estado puedo encontrar todo los demás  $|n\rangle$ , usando  $\hat{a}^\dagger$ . Usando estos resultados muestre como lucen los elementos de matriz en la base  $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  de  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{N}$  y  $\hat{H}$ .
- (e) A partir de los operadores de creación y destrucción definidos, encontrar la función de onda del estado fundamental  $|0\rangle$ .

## Funciones de Green

3. Funciones de Green

- (a) Obtener la función de Green de la ecuación

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi = \rho, \quad (3)$$

con  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . considerando también el caso  $m^2 = 0$ .

4. Propagadores de La Mecánica cuántica

- (a) Una partícula libre no relativista se propaga desde un punto  $\vec{x}_0$  en el tiempo  $t_0$  hasta otro punto  $\vec{x}$  en el tiempo  $t > 0$ . Calcular la amplitud de transición de este proceso

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-i\hat{H}t} | \vec{x}_0 \rangle \quad \text{con} \quad \hat{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}. \quad (4)$$

- (b) Usando la expresión del Hamiltoniano relativista de una partícula libre:  $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$ , mostrar que

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty dp p e^{-it\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}} \sin(p|\vec{x} - \vec{x}_0|). \quad (5)$$

Evaluar la expresión (5), mostrando que, (use para ello el medio que desee, por mano propia, algún programa como *Mathematica* o una tabla de integrales)

$$\int_0^\infty dx x e^{-\beta\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \sin bx = \frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2 + b^2} K_2(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}), \quad (6)$$

¿Cómo es el comportamiento de  $U$  para  $t = 0$ ? y ¿Cuándo  $|x - x_0| \gg t$ ?

## 5. Infinitos Osciladores acoplados

- (a) Obtener el Lagrangiano y las correspondientes ecuaciones de movimiento, de un sistema formado por  $n$  osciladores armónicos acoplados.  
 (b) Argumentar como un campo escalar describe un continuo de osciladores.

## Electromagnetismo

### 6. El tensor del campo electromagnético se define como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (7)$$

- (a) Construir, en términos de los campos eléctricos y magnéticos, la matriz de  $4 \times 4$  que representa al tensor  $F^{\mu\nu}$ . Recuerde que subimos y bajamos con la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  (tome  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ )  $F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$ .  
 (b) Verificar que en estas dos expresiones

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (8)$$

$$\partial_\alpha (*F)^{\alpha\beta} = 0 \text{ con } (*F)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\delta\gamma}, \quad (9)$$

$$(10)$$

están contenidas las 4 ecuaciones de Maxwell.

## Ecuación de Dirac

### 7. En busca de una versión relativista de la ecuación de Schrödinger. Si tomo como Hamiltoniano relativista de una partícula libre a

$$H = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}. \quad (11)$$

Y sabiendo que la relatividad impone  $H^2 = E^2 = p^2 + m^2$ . Mostrar que para reescribir  $H$  como  $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ .  $\alpha_{x,y,z}$  y  $\beta$  deben ser matrices que satisfacen

- (a) 
$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \alpha_i^2 = \text{Id}, \quad \beta^2 = \text{Id} \quad (12)$$

- (b) Argumente porque  $4 \times 4$  es la mínima dimensionalidad que pueden tener estas matrices. La forma que toman las matrices  $\beta$  y  $\vec{\alpha}$  en la representación de Dirac es

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

donde  $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ , siendo las  $\sigma^i$  las matrices de Pauli. Compruebe que estas matrices tienen las propiedades descritas.

- (c) Escribir la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano  $H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$  (la D de Dirac), realizando las reglas de cuantización canónica habituales ( $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$  y  $E = i\frac{\partial}{\partial t}$ ). Considerar la función de onda como un objeto de 4 componentes, es decir

$$\Psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi^1(\vec{x}, t) \\ \psi^2(\vec{x}, t) \\ \psi^3(\vec{x}, t) \\ \psi^4(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Mostrar que puedo llevar dicha ecuación a la forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{1}_{4 \times 4}) \Psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (15)$$

con

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i \rightarrow \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}). \quad (16)$$

- (d) Verificar que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (17)$$

- (e) Encontrar los autovalores (energía) de la matriz

$$H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \quad (18)$$

- (f) Resolver la ecuación de Dirac en un sistema de referencia en reposo ( $\vec{p} = \vec{0}$ ).  
 (g) Construya las autofunciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre en la representación de Dirac .

8. Sea una partícula de masa  $m$  y carga eléctrica  $q$  en un campo electromagnético  $(\vec{E}, \vec{B})$ , el lagrangiano no relativista clásico de la partícula es

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} \quad (19)$$

- (a) Calcular el momento conjugado  $\vec{P}$ .  
 (b) Verificar que el Hamiltoniano del sistema en términos del momento conjugado es

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - q\vec{A}) \cdot (\vec{P} - q\vec{A}) + q\phi. \quad (20)$$

- (c) En el caso en que  $\phi = 0$  y  $\vec{B} = (0; 0; B)$ . Tome el gauge  $\vec{A} = \frac{1}{2}B(-y; x; 0)$  y recordando que la energía potencial de un momento magnético en un campo magnético externo es

$$U_B = -\vec{\mu}_L \cdot \vec{B}, \quad \text{donde } \vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m}\vec{L} = -\beta\frac{\vec{L}}{\hbar}, \quad \beta = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (21)$$

escribir el Hamiltoniano en términos del momento angular.

- (d) Si ahora se tiene un electrón en el mismo campo magnético de (8c), experimentalmente se sabe que además del momento dipolar  $\vec{\mu}_L$ , el electrón tiene un momento dipolar intrínseco

$$\vec{\mu}_s \propto \vec{S} \quad (22)$$

donde  $\vec{S}$  es un momento angular de Spin. Si el electrón pudiera ser descrito como un cuerpo rígido cargado que rota, la relación entre  $\vec{\mu}_s$  y  $\vec{S}$  sería la misma que entre  $\vec{\mu}_L$  y  $\vec{L}$ . Dado que no es así, se debe escribir

$$\vec{\mu}_s = -g_s\beta\frac{\vec{S}}{\hbar}, \quad (23)$$

donde  $g_s$  se denomina razón giromagnética del electrón. El valor experimental de  $g_s$  es 2.0024. Escribir el nuevo Hamiltoniano no relativista.

En el marco de la Mecánica cuántica no relativista no puede predecirse el valor de  $g_s$ . Recién cuando se hace un análisis relativista se obtiene un valor teórico muy próximo al experimental,  $g_s = 2$ .

- (e) Obtener el valor teórico clásico (el que se puede deducir de la ecuación de movimiento) de  $g_s$ . Para ello es suficiente escribir la ecuación de Dirac (15) en presencia de un Campo de Gauge  $A_\mu$ , es decir:

$$\left[ i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) - mc \right] \Psi(\vec{x}, t) = 0 \leftrightarrow \left[ \gamma^\mu(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc \right] \Psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (24)$$

y estudiar sus estados estacionarios.

- i. Mostrar que (24) implica

$$\left[ (p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu)(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu) - i\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\frac{\hbar e}{2c}F_{\mu\nu} - mc^2 \right] \Psi = 0. \quad (25)$$

- ii. Proponga el *ansatz* de onda plana para los estados estacionarios de la ecuación (25),

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \psi^1(\vec{x}) \\ \psi^2(\vec{x}) \\ \psi^3(\vec{x}) \\ \psi^4(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

y probar que de (25) se obtiene

$$\left[ (E - e\phi)^2 - (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\hbar c(\vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - i\vec{\alpha} \cdot \vec{E}) \right] \Psi(\vec{x}) = m^2c^4\Psi(\vec{x}). \quad (27)$$

Para ello use el conmutador  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . y que el operador de spin para el electrón es

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, \quad \text{con } \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

- iii. Escriba en (27) la energía  $E$ , como  $E = E' + mc^2$ , tome el límite  $E' \ll mc^2$  y obtenga  $g_s = 2$  usando la discusión en (8d) y (8c).

- (f) Encontrar el factor giromagnético a través de la ecuación de Dirac en  $2+1^1$  dimensiones con un  $A^\mu = \frac{B}{2}(0, -y, x)$ .

En este caso se tienen 3 matrices de Dirac  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2)$  donde

$$\gamma^0 = a\sigma^3, \quad \gamma^1 = b\sigma^1, \quad \gamma^2 = c\sigma^2 \quad (29)$$

Encontrar cuanto tienen que valer las constantes  $a, b, c$  para cumplir con (17).

Un conjunto de referencias acotado que les puede ayudar esta listado. Hay muchas más. Pueden usar las que quieran. Escojan su aventura.

## References

- [1] Goldstein. Mecánica Clásica.  
[2] J. B Marion. Dinámica clásica de las partículas y sistemas.  
[3] Barut, Electrodynamics and classical theory of fields and particles.  
[4] J.D. Jackson. Electrodinámica Clásica.

<sup>1</sup>En  $2+1$  dimensiones, los espinores tienen 2 componentes.

- [5] Fidel Schaposnik. Notas del curso Mecánica Cuántica 2 de la licenciatura en Física de la UNLP.  
<https://sites.google.com/site/schaposnik/>
- [6] Hans A. Bethe and Roman W. Jackiw. Intermediate Quantum Mechanics.
- [7] Feynman volumen II: Electromagnetismo y materia.
- [8] V. B Berestetskii, E. M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. Teoría Cuántica Relativista, volumen 4 Parte I del curso de Física Teórica.
- [9] Greiner, Walter, Reinhardt, Joachim. Field Quantization.
- [10] Greiner, Walter Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations.