Seminario de Física de Partículas y Campos - 2021
Departamento de Física - UNLP

Práctica 4

1. Muestre que los operadores

$$L_{\mu\nu} = i\,(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

representan los generadores del grupo de Lorentz sobre las funciones del espacio de Minkowski.

2. Muestre que las traslaciones son un grupo de simetrías de una teoría con lagrangiano para un campo escalar real en autointeracción(¿Qué suposición tuvo que hacer para mostrarlo?)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\,\varphi^2 - V(\varphi)\,.$$

Calcule las cuatro cargas conservadas correspondientes, muestre que generan traslaciones sobre el operador de campo en el espacio de Fock y verifique que reproducen el álgebra abeliana de las traslaciones.

3. Dado un campo escalar complejo de lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*, \tag{1}$$

obtener la corriente de Noether asociada a la simetría U(1) y la carga conservada.

4. Encuentre las soluciones clásicas ψ_{cl} a la ecuación de Dirac

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_{\rm cl} = 0$$

correspondientes a un fermión de masa m en reposo. Aplique una transformación de Lorentz a $\psi_{\rm rep}$ para obtener las soluciones clásicas correspondientes a un fermión de impulso $\vec{p}$.

5. Dado el lagrangiano de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi\,,$$

   (a) obtener la corriente de Noether asociada a la simetría U(1) y la carga conservada.
   (b) Argumente la invarianza bajo el grupo de Lorentz para la teoría con este lagrangiano

6. Para el lagrangiano libre de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2}$$

   (a) Obtener el tensor de energía-impulso.
   (b) El resultado obtenido anteriormente da como resultado un $T^{\mu\nu}$ que no es simétrico. Simetrizarlo, y obtener las componentes T^{00}, T^{0i} e interpretarlos físicamente.

7. Demuestre que el tensor de momento energía de QED se conserva.

8. Mostrar como debe transformar A_μ para que el lagrangiano de Dirac acoplado a un campo de Gauge mediante acoplamiento mínimo

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(iD\!\!\!\!/ - m)\psi\,, \tag{3}$$

sea invariante invariante bajo la simetraía Gauge $U(1)$. ¿ Cómo transforma la derivada covariante?

$$D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu. \tag{4}$$

9. (a) Repita el procedimiento del ejercicio anterior para el grupo $SU(2)$
   (b) Calcular

$$[D_\mu, D_\nu] \tag{5}$$

¿ Es $F_{\mu\nu}$ invariante?

(c) Probar que

$$tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \tag{6}$$

es invariante frente al grupo SU(2).

10. Para una teoría Yang-Mills $SU(2)$ acoplada a un fermion de Dirac.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}tr\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big) + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{7}$$

(a) Calcular

$$tr\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big), \tag{8}$$

expresando el resultado en términos de A^i_μ.

(b) Describir con diagramas los vértices de la teoría.

11. Calcule el álgebra de $SU(3)$ y encuentre una base para sus generadores.
Describa la estructura de color de los quarks y los gluones.

12. Un quark q transforma en la representación fundamental D (es decir en la representación de definición) y un antiquark $\bar{q}$ en la conjugada D^* del grupo de color $SU(3)$; sean $\{q_r, q_g, q_b\}$ y $\{\bar{q}_r, \bar{q}_g, \bar{q}_b\}$ bases de los espacios correspondientes.

Un par $q\bar{q}$ transforma en la representación producto: el espacio está generado por la base $q_i\bar{q}_j$, con $i, j = r, g, b$, y la transformación está dada por

$$q_i\bar{q}_j \to D_{ik}\, D^*_{j\ell}\; q_k\bar{q}_\ell\,. \tag{9}$$

Muestre que esta representación contiene un vector en la representación trivial, i.e., existe un estado de $q\bar{q}$ que es *colorless*.

Muestre que el par qq no contiene estados en la representación trivial pero que, en cambio, un sistema de tres quarks qqq sí contiene estados sin carga de color.

13. Los bariones formados por u,d y s vienen dados por el producto de representaciones de $SU(3)$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{10}$$

donde tengo un decuplete, dos octetes y un singlete. ¿Podría decir entonces que tengo un decuplete y dos octetes de color? Explique.

14. Muestre que la transformación de paridad $P = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ satisface $PRP = R$ y $PBP = B^{-1}$ para toda rotación R y todo *boost* B.

Verifique que las componentes *left* y *right* de un espinor transforman del mismo modo ante rotaciones y de manera opuesta ante *boosts*.

Utilice los resultados anteriores para mostrar que γ^0 representa una transformación de paridad sobre los espinores. Muestre que el lagrangiano de Dirac es invariante ante paridad.

15. Muestre que el hamiltoniano de Dirac conmuta con el operador de Heliciddad $\vec{\Sigma}.\vec{p}$ Donde $\Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ y $\vec{\Sigma}$ el operador de espín, mientras que γ_5 conmuta con el hamiltoniano de Dirac sólo si la masa es cero. Cuando la masa es cero el concepto de quiralidad y helicidad son equivalentes, Explique.

16. Con la matriz,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{11}$$

defina

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \qquad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \tag{12}$$

(a) Pruebe que $P_{L,R}$ son proyectores

(b) Si $P_L\psi = \Psi_L(x)$ y $P_R\psi = \Psi_R(x)$ muestre que

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\Psi}_L(x)\gamma^\mu\Psi_L(x) + \bar{\Psi}_R(x)\gamma^\mu\Psi_R(x) \tag{13}$$

17. Considere el lagrangiano leptónico sin quarks

$$\mathcal{L}_0 = i\left[\bar{\psi}_l(x)\partial\!\!\!/\psi_l(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}(x)\right], \tag{14}$$

(a) Escribir el lagrangiano (14) en término de sus componentes derechas e izquierdas.

(b) Definiendo los campos $\Phi_{lL}(x)$

$$\Phi_{lL}(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{\nu_l L}(x) \\ \Psi_{l\,L}(x) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

escribir $\mathcal{L}_0$ en términos de dobletes de SU(2) $\Phi_{lL}(x)$ y singletes de SU(2) ψ_R.

(c) Los datos experimentales son consistentes con que los campos leptonicos entran en interacción solamente bajo la forma

$$J^\mu \propto \sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}(x). \tag{16}$$

Escribir esta corriente en terminos de $\Psi_{\nu_l L}(x)$ y $\Psi_{l\,L}(x)$

(d) Utilizando el teorema de Noether encontrar la corriente J^μ_Y asociada a la simetría $U(1)$.

(e) Utilizando el teorema de Noether encontrar la corriente J^μ_i asociada a la simetría $SU(2)$.

(f) Para el lagrangiano obtenido en el inciso (17b), promueva la derivada a derivada covariante segun sea la carga respectiva de cada campo, por ejemplo para uno cargado bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2}\vec{\sigma}.\vec{W}_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu$.
Obtener el lagrangiano de interacción. Es decir, escribir $\mathcal{L}^L$ de la siguiente forma

$$\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \tag{17}$$

(g) En el inciso anterior identificar las corrientes de interacción, y compararlas con lo obtenido en los incisos 17d) y 17e).

(h) Muestre como aparece la relación de Gellman -Nishina $Q = t_3 + y_L$ a nivel de las corrientes.

(i) Definiendo

$$W^+_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} - iW_{2\mu}) \tag{18}$$

$$W^\mu_3 = \cos\theta_w Z^\mu + \sin\theta_w A^\mu \tag{19}$$

$$B^\mu = -\sin\theta_w Z^\mu + \cos\theta_w A^\mu \tag{20}$$

Escriba el lagrangiano de interacción en terminos de estos nuevos campos, acoplado a las corrientes electromagnetica, neutra y electrodébil(recuerde que $g\sin\theta_w = g'\cos\theta_w = e$). Discutir resultados.

18. Explique por que términos de masa $m^2\,A^a_\mu A^{a\,\mu}$ y $m\,\bar{\psi}\psi$ no son incluidos en el ejercicio anterior.

19. Higgs

Explicar el mecanismo de Higgs , usando

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \tag{21}$$

siendo ϕ un campo escalar complejo, con $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ de simetría U(1), y eligiendo a

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2, \tag{22}$$

con $\mu^2 > 0$ y λ positivo. Comentar como adquiere masa el campo escalar y el campo de Gauge A_μ.

20. Suponga una teoría con un sector escalar donde el Higgs esta en la adjunta de $SU(2)$, escriba el potencial escalar más general(que sea renormalizable) consistente con la simetría $SU(2)$. El campo escalar $\phi = \frac{1}{2}\phi^a \sigma^a$ adquiere un VEV no nulo ¿Cuál es la subsimetría que no se rompe espontáneamete?.

21. Analice el decaimiento $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ y muestre que a bajas energías la amplitud de transición está dada por

$$\langle \texttt{out}|\texttt{in}\rangle = -i\,\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(J^{(\mu^-)\dagger}\cdot J^{(e^-)} + J^{(e^-)\dagger}\cdot J^{(\mu^-)}\right) ,$$

donde $J_\mu^{(\ell)} = \bar{\nu}_\ell\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,\ell$ es la corriente V–A asociada al doblete del leptón ℓ.

A partir de este proceso se ha determinado el valor $G_F \sim 1.17\cdot 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$ para la constante de Fermi. Utilice este resultado y el cálculo anterior para obtener el v.e.v. 246 GeV del campo de Higgs.

Utilice el v.e.v. $\langle\varphi\rangle$ del campo de Higgs y el valor de la masa del bosón de Higgs aceptado actualmente para determinar el orden de magnitud de la constante de auto-acoplamiento λ y juzgar la validez del tratamiento perturbativo.