

Práctica 3

1. A partir del lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1)$$

obtener la ecuación de movimiento para $\bar{\psi}$. Luego, a partir de esta ecuación de movimiento y utilizando la relación $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, obtener la ecuación de movimiento para ψ .

2. Obtener el propagador de Feynman para fermiones, $\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle$.

3. Demostrar las siguientes identidades:

$$\not{p}\sigma\not{p} = p^2$$

$$\not{p}^2 = p^2$$

$$u_{s,\vec{p}}^\dagger u_{r,\vec{p}} = v_{s,\vec{p}}^\dagger v_{r,\vec{p}} = 2E \delta_{sr}$$

$$\bar{u}_{s,\vec{p}} u_{r,\vec{p}} = -\bar{v}_{s,\vec{p}} v_{r,\vec{p}} = 2m \delta_{sr}$$

$$\sum_s u_{s,\vec{p}} \bar{u}_{s,\vec{p}} = \not{p} + m$$

$$\sum_s v_{s,\vec{p}} \bar{v}_{s,\vec{p}} = \not{p} - m$$

4. A partir del lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2)$$

obtener las ecuaciones de movimiento para el campo A^μ .

5. Considerar la teoría de Yukawa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{M^2}{2}\varphi^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - g\varphi\bar{\psi}\psi, \quad (3)$$

donde $\psi, \bar{\psi}$ describen un nucleón N y su antipartícula \bar{N} , y φ es un campo escalar real.

- a) Calcular la vida media de la partícula escalar.
b) Calcular la amplitud de dispersión para los procesos

$$N\bar{N} \rightarrow N\bar{N} \quad (4)$$

$$N + \bar{N} \rightarrow \varphi + \varphi. \quad (5)$$

- c) Calcular la amplitud de dispersión al cuadrado para un escalar decayendo en un electrón con espín s_1 y un positrón con espín s_2 . En el centro de masa la dirección en que se mueven los fermiones es eje el z y la dirección de cuantización del espín es el eje x . Discuta el resultado.

6. Mostrar que el lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (6)$$

es invariante ante transformaciones $U(1)$ globales,

$$\psi(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha}. \quad (7)$$

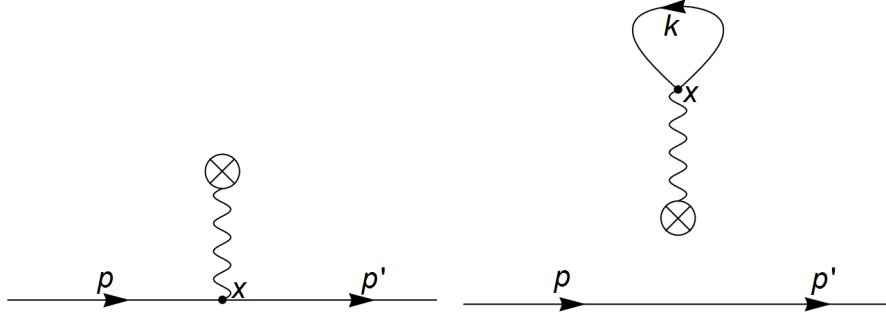
Explicar en detalle de qué manera la introducción de un campo de gauge permite extender esta simetría, cuando las transformaciones son locales.

7. Escribir el lagrangiano de QED y obtener las ecuaciones de movimiento para ψ , $\bar{\psi}$ y A^μ .
8. Calcular la sección eficaz diferencial del proceso de QED en el que un electrón y un positrón se aniquilan para dar lugar a un muón y un antimuón, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Calcular la sección eficaz total en el límite ultrarrelativista.
9. Obtener la amplitud de dispersión de los siguientes procesos en QED:
 - a) $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Bhabha)
 - b) $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Möller)
10. Considerar el proceso de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ en QED.
 - a) Dibujar los dos diagramas relevantes y escribir la amplitud de transición entre el estado “in” $|\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2\rangle$ y el estado “out” $|\vec{q}_1, \lambda_1; \vec{q}_2, \lambda_2\rangle$. Mostrar que esta amplitud se anula si la polarización de uno de los fotones es proporcional a su impulso; e.g., $\epsilon^{\lambda_1} \sim q_1$. ¿A que se debe esto?
 - b) Calcular la sección eficaz del proceso de aniquilación promediando sobre los espines entrantes y las polarizaciones salientes. Mostrar que la sección eficaz es isótropa en el límite no-relativista y que, en cambio, los fotones salen mayormente en la dirección de las partículas incidentes en el límite ultrarelativista.
 - c) Calcular la sección eficaz total y mostrar que diverge a bajas energías. Estudiar los límites no-relativistas y ultra-relativistas. Mostrar que, en este último caso, $\sigma_{E \gg m} \sim s^{-1} \log(s/m^2)$.
11. Estudie uno de los diagramas relevantes en la dispersión $\gamma+\gamma \rightarrow \gamma+\gamma$, aisle la parte divergente y muestre que dicha contribución es nula.
12. En el tratamiento de Gupta-Bleuler $|\alpha\rangle_{\text{Phys}} \sim |\alpha\rangle + (a_{\text{temp}}^\dagger - a_{\text{long}}^\dagger)|0\rangle$ mostrar que el término $(a_{\text{temp}}^\dagger - a_{\text{long}}^\dagger)|0\rangle$ corresponde a una transformación de gauge.
13. Considerar el efecto Compton $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$ en QED.
 - a) Considerar los diagramas relevantes y compararlos con los del proceso $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Mostrar que el fotón dispersado no tiene polarización longitudinal, $\epsilon_\mu(\vec{p}) \sim p_\mu$.
 - b) Utilizar la simetría de *crossing* para calcular la sección eficaz del proceso a partir del resultado obtenido para la aniquilación e^+e^- .
 - c) Verificar que a bajas energías se obtiene la sección eficaz de Thomson, basada en el comportamiento ondulatorio de la luz. Muestre que, por el contrario, la sección eficaz depende en general de la energía del fotón incidente y que tiende a cero a altas energías.
14. Estudiar en forma semiclásica el proceso de dispersión de Rutherford para un electrón por repulsión con un núcleo fijo en el espacio. Para ello, seguir los siguientes pasos:
 - a) Escribir el hamiltoniano de interacción de QED considerando que ψ y $\bar{\psi}$ son campos cuantizados mientras que A_μ es un campo clásico (no cuantizado).
 - b) Obtener la amplitud de transición del proceso $e^- \rightarrow e^-$ a primer orden:

$$\text{out}\langle p', s' | p, s \rangle_{\text{in}} = -ie \int d^4x A_\mu(x) \langle p', s' | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | p, s \rangle, \quad (8)$$

donde se ha llamado $|p, s\rangle$ y $|p', s'\rangle$ al estado inicial y final del electrón respectivamente. Es decir, p y s son el momento y el espín del electrón en su configuración inicial, mientras que p' y s' representan las mismas cantidades para su configuración final.

- c) Mostrar que $\langle p', s' | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | p, s \rangle$ puede escribirse como una suma que sólo involucra dos términos no nulos. Identificar ambos términos con los siguientes diagramas:



- d) En un proceso de dispersión puede descartarse el segundo diagrama (¿por qué?). Entonces, considerando sólo el primero de los diagramas anteriores, obtener una expresión para $\text{out}\langle p', s' | p, s \rangle_{\text{in}}$. Mostrar que si A_μ es independiente del tiempo, entonces dicha expresión se reduce a

$$\text{out}\langle p', s' | p, s \rangle_{\text{in}} = -ie \bar{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \tilde{A}_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times (2\pi) \delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}) \quad (9)$$

donde \tilde{A}_μ es la (tri-)transformada de Fourier de A_μ .

- e) A partir de ahora, considerar el potencial coulombiano (independiente del tiempo):

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi r} \delta_\mu^0 \quad (10)$$

(Notar la convención $\varepsilon_0 = 1$). Calcular \tilde{A}_μ para dicho caso, y con ello obtener una expresión para $\text{out}\langle p', s' | p, s \rangle_{\text{in}}$.

- f) A partir de la cantidad $\text{out}\langle p', s' | p, s \rangle_{\text{in}}$ obtenida en el inciso anterior para el potencial coulombiano, calcular la sección eficaz diferencial en el límite no relativista, verificando que coincide con la fórmula de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4m^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}, \quad (11)$$

donde $v = |\mathbf{p}|/E_{\mathbf{p}}$ es la velocidad inicial del electrón y $\alpha = e^2/4\pi$ es la constante de estructura fina.