Seminario de Física de Partículas y Campos - 2021
Departamento de Física - UNLP

Práctica 2

1. Esquema de Interacción

   La ecuación de Schrödinger esta dada como

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_s = H_s|\psi(t)\rangle_s, \qquad H_s = H^{(0)} + (H_{int})_s, \tag{1}$$

   donde $H^{(0)}$ es el Halmitoniano de un problema que sabemos la solución. $(H_{int})_s$ es el Hamiltoniano de interacción en el esquema de Schrödinger, y $|\psi(t)\rangle_s$ describe el estado en dicho esquema. Se conoce que los estados en el esquema de Schrödinger y Heinsenberg están relacionados a través del operador evolución de la siguinte manera

$$|\psi(t)\rangle_s = U(t)|\psi\rangle_H. \tag{2}$$

   Si se reemplaza (2) en la ecuación de Schrödinger, se obtiene la ecuación

$$i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H_s(t)U(t). \tag{3}$$

   (a) Proponiendo $U(t) = U^{(0)}(t)U_I(t)$, donde $U^{(0)}(t) = e^{-itH^{(0)}}$, obtener la ecuación (3) para $U_I(t)$.

   (b) Construir el esquema de interacción definiendo apropiadamente la relación entre los estados en los esquemas de Schrödinger, Heinsenberg y de interacción.

   (c) Encontrar la solución de forma aproximada, de la ecuación (3) obtenida en el inciso 1a.

   (d) Probar

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \;\; T\{H(t_1)H(t_2)\} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \;\; H(t_1)H(t_2). \tag{4}$$

   (e) Utilizando el resultado obtenido en 1d escribir el operador $U_I(t)$ en términos del operador orden temporal.

2. Teoría $\lambda\phi^4$

   Considere una partícula asociada a un campo escalar real de masa m, con una autointeracción $\lambda\phi^4$.

   (a) Estudie el proceso de dispersión de dos de estas partículas con impulsos iniciales $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ y calcule la amplitud de transición a un estado con impulsos finales $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ a orden cero, primer orden y segundo orden.

   (b) Utilice argumentos dimensionales para mostrar que la sección eficaz total es proporcional a $\lambda^2\, s^{-1}$.

   (c) Calcule la sección eficaz diferencial a primer orden y verifique que es isótropa.

   (d) Calcule la amplitud de transición a segundo orden de un estado con impulsos iniciales $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ a un estado con impulsos finales $\vec{q}_1, \vec{q}_2$. Discuta el resultado. ¿Qué problemas observa?

   (e) Considere, en el marco de la mecánica cuántica no-relativista, el proceso de dispersión de dos partículas de spin cero y masa m sometidas a un potencial $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Calcule en el esquema de interacción, a primer orden en V, la amplitud de transición entre los estados $|p_1, p_2\rangle$ y $|q_1, q_2\rangle$. Compárelo con el resultado obtenido anteriormente.

   Este ejercicio muestra que la autointeracción $\lambda\phi^4$ corresponde, en el límite de la mecánica cuántica no-relativista, a un potencial *de contacto* repulsivo,

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{6\lambda}{m^2}\; \delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\,. \tag{5}$$

3. Teoría $\lambda\phi^3$

   Nuevamente, considere una partícula asociada a un campo escalar real de masa m, pero ahora con una autointeracción $\lambda\phi^3$.

   (a) Estudie a primer orden, el proceso de decaimiento de una partícula en dos.
   (b) Estudie el proceso de dispersión de dos de estas partículas y calcule la sección eficaz $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ a orden dominante en λ.
   (c) Analice el límite no-relativista $E_{\rm cm} \approx m + \frac{p^2}{2m}$ y verifique que la dispersión es isótropa si uno desprecia términos de orden $\frac{p^4}{m^4}$.
   (d) Muestre que en el límite ultra-relativista $E_{\rm cm} \gg m$ la sección eficaz corresponde mayormente al *forward* y *backward scattering* $(\theta = 0, \pi)$.
   (e) Calcule la sección eficaz total σ. Estudie los límites no-relativista y ultra-relativista.
   (f) Muestre que el impulso interno en los canales `s`, `t` y `u` es *off-shell*.

4. Modelo de Yukawa (escalar)

   Considere el siguiente modelo

$$\mathcal{L} = \partial\phi^\dagger\partial\phi - M^2\phi^\dagger\phi + \frac{1}{2}(\partial A)^2 - \frac{1}{2}m^2A^2 - g\,\phi^\dagger\phi\,A \tag{6}$$

   en el que $\phi(x)$ es un campo escalar complejo que representa una partícula n^+ y su antipartícula n^-, en tanto $A(x)$ es un campo escalar real que representa un mediador de spin 0.

   (a) Verifique que el Hamiltoniano $\hat{H}$ del sistema no conmuta con el operador número de partículas $\hat{N} = \hat{N}_+ + \hat{N}_- + \hat{N}_A$. Muestre que, sin embargo,

$$[\hat{H}, \hat{N}_+ - \hat{N}_-] = 0\,, \tag{7}$$

   de modo que se conserva el número de partículas menos el número de antipartículas del campo ϕ.
   (b) Estudie la probabilidad del decaimiento $A \to n^+\,n^-$ a orden dominante en la constante de acoplamiento y muestre que presenta un *branch cut* en el umbral $m = 2M$. Estime la vida media del mesón A si $m \simeq 100\,\mathrm{Gev}$ (suponga $g \sim 0.01\,m$).
   (c) Estudie el proceso de dispersión $n^+\,n^+ \to n^+\,n^+$ y muestre que la amplitud de transición se obtiene a partir de los canales `t` y `u`.
   Verifique que la transición es simétrica frente al intercambio de los impulsos externos.
   (d) Estudie el proceso de dispersión $n^+\,n^- \to n^+\,n^-$ y muestre que la amplitud de transición se obtiene a partir de los canales `t` y `s`.
   Muestre que para cierto valor de $E_{\rm cm}$ el impulso interno en el canal `s` es *on-shell* y explique cómo puede verificarse la existencia de mesones A en experimentos de dispersión de partículas n^+ y n^-.
   (e) Considere el límite no-relativista de los procesos $n^+\,n^\pm \to n^+\,n^\pm$ y muestre que el mesón oficia de mediador de una interacción atractiva correspondiente al potencial de Yukawa

$$V(r) = -\frac{g^2}{16\pi M^2}\,\frac{e^{-mr}}{r}\,. \tag{8}$$

   ¿Cómo podría modificarse este mecanismo para generar interacciones tanto atractivas como repulsivas entre n^+ y $n^\pm$?
   (f) Estudie el proceso de dispersión $AA \to AA$. ¿Cuál es el orden perturbativo de la contribución dominante? Este proceso ilustra la dispersión de fotones en QED.
   (g) Analice el diagrama de la figura en el que las líneas rectas representan propagadores del campo ϕ y las onduladas del campo A y muestre que el número de integrales sobre los impulsos internos coincide con el número de *loops* del diagrama. ¿Cuáles de ellas son divergentes?

Mark Srednicki. Quantum Field Theory

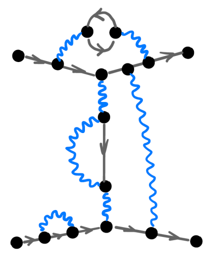

Figure 1: Contribución a la función de 4 puntos. Las líneas rectas representan propagadores del campo ϕ; las onduladas, del campo A.

References

[1] Greiner Reinhardt. Field Quantization.

[2] Albert Messiah. Mecánica Cuántica tomo I y II.

[3] Mark Srednicki. Quantum Field Theory

[4] José Ignacio Illana. Teoría Cuántica de Campos.