Seminario de Física de Partículas y Campos - 2021
Departamento de Física - UNLP

Práctica 1

1. Campo escalar

   (a) Las densidades lagrangianas del un campo escalar real y del campo complejo estan dadas por

   $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^2 - m^2\phi^2), \tag{1}$$
   $$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi\phi^*, \tag{2}$$

   ¿Porqué puedo asegurar que son invariantes de Lorentz?

   (b) Encontrar las respectivas ecuaciones de movimiento.

   (c) Demuestre que la expansión en ondas planas de ϕ

   $$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3p \ N_p(a_p \ e^{-ip\cdot x} + b_p^* \ e^{ip\cdot x}), \tag{3}$$

   donde N_p es una constante a determinar, es una solución de las ecuaciones de movimiento. En el caso del campo real $b_p^* = a_p^*$.

   (d) Encuentre los momentos canónicos conjugados a ϕ para ambas teorías en terminos de a_p, a_p^*, b_p, b_p^*. Luego, cuantizar al campo postulando que las constantes a_p y a_p^* se conviertan en operadores, y obtenga las relaciones de conmutación entre $\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger$, y $b_p, b_p^\dagger$ imponiendo las relaciones de conmutación canónicas.

   $$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = 0, \quad [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = 0 \tag{4}$$

   (e) Invierta la relación (3) y obtenga los operadores $\hat{a}_p(t)$ y $\hat{a}_p^\dagger(t), \hat{b}_p, \hat{b}_p^\dagger$ en función de $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$(y su adjunto $\dagger$) y el momento conjugado.

   (f) muestre que $[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] \propto \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$ (igualmente para el conmutador entre $\hat{b}_p$ y $\hat{b}_p^\dagger$), y fije N_p de manera tal que la constante de proporcionalidad sea 1.

   (g) Obtenga el Hamiltoniano para el campo complejo en términos de $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ primero, y luego reescribalos en términos de los operadores de creación y destrucción. (Comente sobre el uso del producto normal $: \cdot :$, y porque se introduce)

   (h) Usando las expresiones en operadores de creación y destrucción, compruebe que $\phi(t, x) = e^{i\hat{H}t}\phi(0, x)e^{-i\hat{H}t}$ (es suficiente que lo haga para un sistema, sea el campo complejo ó el real).

   (i) En el caso del campo real, expresar en términos de los operadores $\hat{a}_p$ y $\hat{a}_p^\dagger$ al operador momento definido por

   $$\hat{\vec{P}} = -\int d^3x \ \hat{\pi}(x)\vec{\nabla}\hat{\phi}(x) \tag{5}$$

   Muestre que $\phi(\vec{x}, t) = e^{i\hat{\vec{P}}.x}\phi(0, t)e^{-i\hat{\vec{P}}.x}$ y que $[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$

2. El espacio de Fock esta definido como los estados que puedo crear a partir del vacío $|0\rangle$(estado aniquilado por todos los $\hat{a}_{\vec{k}}$), por medio de los operadores $a_{\vec{k}}^\dagger$ para distintos $\vec{k}$.

   (a) Calcular la acción de $\hat{H}$ y $\hat{\vec{p}}$ sobre un estado genérico $a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_3}^\dagger \cdots \cdot |0\rangle$. Interprete estos estados de acuerdo a los resultados.

   (b) Calcular $< 0|\hat{\phi}(x)|\vec{p} >$ e interpretar físicamente el resultado.

(c) El momento angular en mecánica clásica es definido como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde una de sus componentes se puede escribir de la siguiente manera $l_i = \epsilon_{ijk}\; x_j p_k$. El momento angular de un campo escalar real esta dado por,

$$\hat{J}_i = -\epsilon_{ijk} \int d^3x\; x_j\; \hat{\pi}\; \partial_k \hat{\phi}, \tag{6}$$

- Probar que este operador genera las rotaciones del campo.
- Escribir al operador momento angular en términos de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ y mostrar que los estados creados por $a_p^\dagger$ no tienen momento angular definido.

3. Discutir el problema de causalidad a partir de los conmutadores de dos campos reales. Probar para un intervalo de tipo-tiempo que $[\hat{\phi}(\vec{x}, x^0), \hat{\phi}(\vec{x}, y^0)] \neq 0$ y que para un intervalo de tipo-espacio que $[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = 0$.

4. Demostrar que la función de Green de Feynman del campo de Klein-Gordon complejo toma la siguiente forma:

$$iG_F(x-y) = \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} = D(x-y) \text{ si } x^0 > y^0 \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip\cdot(x-y)} = D(y-x) \text{ si } x^0 < y^0 \end{cases} \tag{7}$$

cuando se dan las prescripciones adecuadas para rodear los polos en $-E_p$ y en E_p, mediante el contorno de integración apropiado en el plano complejo.
Por otro lado el propagador del campo escalar complejo esta dador por

$$\langle 0|T\left\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\right\}|0\rangle. \tag{8}$$

Mostrar que

$$G_F(x-y) \propto \langle 0|T\left\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\right\}|0\rangle. \tag{9}$$

5. Calcular G_F para un intervalo tipo-tiempo y tipo-espacio

6. A partir de la ecuación de Klein-Gordon para el campo complejo y de su conjugada, obtener la ecuación de continuidad asociada. ¿ Por qué no es posible interpretarla como una densidad de probabilidad?

7. Si bien la ρ del inciso anterior no es una densidad de probabilidad, con ella se puede construir el operador de carga $\hat{Q}$. Realice este operador en términos de $\hat{a}_p$, $\hat{a}_p^\dagger$, $\hat{b}_p$ y $\hat{b}_p^\dagger$, de forma tal que se pueda interpretar al estado $\hat{a}_p^\dagger|0\rangle$ que tenga carga $q = +1$, y al estado $\hat{b}_p^\dagger|0\rangle$ que tenga carga $q = -1$.

8. Calcular

$$\hat{Q}\hat{\phi}^\dagger =, \qquad \hat{Q}\hat{\phi} = \tag{10}$$

y

$$[\hat{Q}, \hat{\phi}(x)] =, \quad [\hat{Q}, \hat{\phi}^\dagger(x)] = . \tag{11}$$

9. Sea el estado $|\alpha\rangle$ autoestado del operador de carga, mostrar que el operador $\hat{\phi}^\dagger$ incrementa la carga del estado en una unidad. Similarmente mostrar que el estado $\hat{\phi}$ disminuye en una unidad la carga del estado.

10. Mostrar que el operador de carga $\hat{Q}$ construido en (7), es una magnitud conservada.

11. Creación de partículas mediante una fuente clásica externa j(x), para el campo real de Klein-Gordon.

La densidad lagrangiana correspondiente a un campo escalar real acoplado a una fuente clásica externa está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j(x)\phi(x) \tag{12}$$

(a) Encontrar la ecuación clásica de movimiento del campo.

(b) Suponer que la fuente actúa sólo en un intervalo finito de tiempo. Antes de que la fuente se prenda, el campo escalar $\phi_0(x)$ puede escribirse en términos de operadores de creación y destrucción como

$$\hat{\phi}_0(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_p \; e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_p^\dagger \; e^{ip\cdot x}) \tag{13}$$

En ausencia de fuente, ésta sería la solución $\forall t$. En presencia de una fuente, la solución puede ser construida usando la función de Green retardada. Probar que $\phi(x)$ puede ser escrita como

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left\{ \left(\hat{a}_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}(p) \right) \; e^{-ip\cdot x} + h.c. \right\} \tag{14}$$

donde $\tilde{j}(p)$ es la transformada de Fourier de j evaluada en p tal que $p^2 = m^2$.

(c) Calcular el Hamiltoniano luego de que la fuente haya actuado.

(d) Hallar el valor medio de la energía de vacío del problema luego de que la fuente se haya apagado.

(e) El resultado anterior permite interpretar $\frac{|\tilde{j}(p)|^2}{\sqrt{2E_p}}$ como la densidad de probabilidad de crear una partícula en el modo p. Calcular el número total de partículas producidas.

References

[1] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory.

[2] Mandl and Shaw. Quantum Field theory.

[3] Greiner Reinhardt. Field Quantization.

[4] José Ignacio Illana. Teoría Cuántica de Campos.

[5] David Tong. Quantum Field Theory.

[6] Greiner Reinhardt. Quantum Electrodynamics.