Profesor
Dr. Pablo Pisani
pisani@fisica.unlp.edu.ar
JTP
Dr. Alejandro Giordano
giordano@fisica.unlp.edu.ar

Práctica 1

1 Entrenamiento

1.1 Esquemas en Mecánica cuántica

1.1.1

Definir los esquemas de Schrödinger y Heisenberg.

1.1.2

Sea $\hat{A}_S$ un operador asociado a cierto observable en el esquema de Schrödinger, y $\hat{A}_H$ un operador asociado al mismo observable en el esquema de Heisenberg, encontrar una relación entre ambos.

1.1.3

A partir de la relación obtenida en 1.1.2, obtener la ecuación de Heisenberg.

1.1.4

Resolver el oscilador armónico cuántico en el esquema de Heisenberg.

1.2 Oscilador armónico cuántico a partir de los operadores de creación y destrución

1.2.1

Dado el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\ x^2, \tag{1}$$

realizar el siguiente cambio de variables:

$$P = \frac{p}{\sqrt{\hbar\omega m}}, \qquad Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \tag{2}$$

luego, obtener el Hamiltoniano en términos de P y Q.

1.2.2

a)Definiendo los operadores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP), \tag{3}$$

escribir el hamiltoniano en términos de ellos.
b) Sea $|n\rangle$ un autoestado del operador número de ocupación, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ Calcular $[\hat{H}, \hat{a}]$, $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger]$ y luego

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle), \tag{4}$$

$$\hat{H}(\hat{a^\dagger}|n\rangle), \tag{5}$$

$$\hat{N}(\hat{a}|n\rangle), \tag{6}$$

$$\hat{N}(\hat{a^\dagger}|n\rangle), \tag{7}$$

discutir los resultado.
c)Demostrar que si $n = 0$ entonces $\hat{a}|n\rangle = 0$

1.2.3

Dado que $\hat{H}$ conmuta con $\hat{N}$ (probarlo), justificar la interpretación de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ como operadores de aniquilación y creación de cuantos respectivamente.

1.2.4

Demostrar que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \tag{8}$$

e interpretar.

1.2.5

Calcular los elementos de matriz del operador número, $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, y de los operadores $\hat{a}^\dagger,\ \hat{a}$, en la base de ocupación del oscilador armónico unidimensional.

1.2.6

A partir de los operadores de creación y destrucción definidos, encontrar la función de onda del estado fundamental. (Ayuda: Observar que la solución a la ecuación diferencial $\partial_x\phi(x) + x\phi(x) = 0$ es $\phi(x) = Ae^{-x^2/2}$.)

1.3 Funciones de Green

1.3.1

Obtener la función de Green de la ecuación de Poisson en 3 dimensiones. (Ayuda: Barut, Electrodynamics and classical theory of fields and particles.)

1.3.2

Obtener la función de Green de la ecuación

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi = \rho, \tag{9}$$

con $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

1.3.3

Obtener las diferentes funciones de Green (retardada y avanzada) de la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \rho. \tag{10}$$

1.4 Propagadores de Mecánica cuántica

Función de onda de una partícula relativista y causalidad.

1.4.1

Una partícula libre no relativista se propaga desde un punto $\vec{x}_0$ en el tiempo t_0 hasta otro punto $\vec{x}$ en el tiempo $t > 0$. Calcular la amplitud de transición de este proceso

$$U(t) = \langle \vec{x}, t | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | \vec{x_0}, t_0 \rangle \qquad con \qquad \hat{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}. \tag{11}$$

1.4.2

Usando la expresión del Hamiltoniano relativista de una partícula libre: $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$, mostrar que

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x_0}|} \int_0^\infty dp\ p\ e^{-it\sqrt{\hat{p}^2+m^2}} \sin(p|\vec{x} - \vec{x_0}|). \tag{12}$$

Evaluar la expresión (12), para ello usar la expresión

$$\int dx\ x\ e^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}\ \sin bx = \frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2 + b^2} K_2(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}), \tag{13}$$

comprobar que la ecuación (13) es la fórmula 3.914.6 de la Table of Integrals, Series and Products de I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik (2007).

1.5 Infinitos Osciladores acoplados

1.5.1

Obtener el lagrangiano y las correspondientes ecuaciones de movimiento, de un sistema formado por n osciladores armónicos acoplados.

1.5.2

Argumentar como un campo escalar describe un continuo de osciladores.