

Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica VI (Curso 2023)

I. Fidelidad y distancia.

1-a) Hallar la fidelidad $F = \text{Tr}[\rho_1^{1/2} \rho_2 \rho_1^{1/2}]$ y la distancia $D = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho_1 - \rho_2|$ entre el estado $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ y el estado máximamente mezclado $\rho_2 = I/d$.

1-b) Idem si $\rho'_1 = x\rho_1 + (1-x)\rho_2$.

2) Si $|\Psi\rangle$ es un estado de Bell de dos qubits, verificar: $D(\rho_1^A, \rho_2^B) \leq D(\rho_1, \rho_2)$.

3) Probar que en general $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$.

II. Estados coherentes.

1) Sea

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

un estado coherente, donde $|n\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle / \sqrt{n!}$ y a^\dagger, a son operadores de creación y aniquilación bosónicos. Demostrar las siguientes propiedades:

a) $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle$

b) $|\alpha\rangle = T(\alpha) |0\rangle$, donde $T(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] = \exp[-i\sqrt{2}(\text{Re}(\alpha)p - \text{Im}(\alpha)q)]$ es un operador de traslación y $p = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2i}}$, $q = \frac{a^\dagger+a}{\sqrt{2}}$ son los operadores impulso y coordenada asociados. Esto muestra que $|\alpha\rangle$ es un estado fundamental de oscilador armónico "trasladado". Notar que $T(\alpha)$ es unitario.

c) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ (autoestado del operador aniquilación).

d) $P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2$ sigue una distribución de Poisson, con $E(n) = \langle \alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2 = V(n)$.

e) $\langle \alpha|p|\alpha\rangle = \sqrt{2}\text{Im}(\alpha)$, $\langle \alpha|q|\alpha\rangle = \sqrt{2}\text{Re}(\alpha)$.

f) Si $H = \hbar\omega a^\dagger a \Rightarrow \exp[-iHt]|\alpha\rangle = |\alpha(t)\rangle$, con $\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha$.

La evolución temporal de $|\alpha\rangle$ es pues una rotación del parámetro complejo α , con frecuencia angular ω .

e) No ortogonalidad: $\langle \beta|\alpha\rangle = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2+\beta^*\alpha}$

h) (Sobre)completitud: $\frac{1}{\pi} \int_C d\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = I$ (Identidad).

i) Incerteza Mínima: $\Delta p \Delta q = 1/2$, donde $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$, $(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$, con los valores medios tomados respecto de $|\alpha\rangle$. Los estados coherentes son pues los estados cuánticos más "ceranos" a estados clásicos de oscilador armónico.

2) a) Mostrar que el efecto de un divisor de haces (beamsplitter), representado por el operador unitario $U = \exp[-i\theta(a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2)]$, sobre un estado coherente es

$$U|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = |\alpha \cos \theta - i\beta \sin \theta\rangle \otimes |\beta \cos \theta - i\alpha \sin \theta\rangle$$

b) Hallar $U|10\rangle$, $U|01\rangle$, donde $|10\rangle = a_2^\dagger|00\rangle$, $|01\rangle = a_1^\dagger|00\rangle$.