

# Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

## Práctica V (Curso 2023)

Verificar las cuentas, en los casos en que sea posible, con *mathematica*, *Jupyter notebook*, o algún software similar.

### I. Evolución de sistemas cuánticos abiertos

1) Dado un estado inicial producto  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  de un sistema bipartito, y un operador evolución  $U_{AB} = \exp[-iH_{AB}t]$ , derivar la expresión

$$\rho'_A = \text{Tr}_B [U_{AB} \rho_{AB} U_{AB}^\dagger] = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \rho_A E_{\alpha}^\dagger$$

dando la forma explícita de  $E_{\alpha}$ . Probar también que  $\sum_{\alpha} E_{\alpha}^\dagger E_{\alpha} = I_A$ .

2) a) Mostrar que para el caso de la evolución por un operador control not  $U_{AB} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$  de un estado producto de dos qubits  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$ , se obtiene

$$\rho'_A = (1-p)\rho_A + pZ\rho_A Z$$

Dar el valor explícito de  $p$  e identificar los operadores  $E_0$  y  $E_1$ .

Interpretar el resultado como disminución de elementos no diagonales en una determinada base e indicar para cuales estados iniciales  $|\psi_B\rangle$  se obtiene i)  $p = 1/2$  (decoherencia completa) ii)  $p = 0$  (ausencia de decoherencia). Discutir la variación de la entropía de  $\rho_A$ .

b) Hallar la evolución de  $\rho_A$  para el mismo operador  $U_{AB}$  y un estado inicial producto general  $\rho_A \otimes \rho_B$ . Indicar que sucede si  $\rho_B = I_B/d_B$ .

3) Considerar los operadores  $E_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|$ ,  $E_2 = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|$ , con  $p \in [0, 1]$ .

a) Mostrar que satisfacen en general  $\sum_{i=1,2} E_i^\dagger E_i = I$ , pero  $\sum_{i=1,2} E_i E_i^\dagger \neq I$  si  $p \neq 0$ .

b) Dar una expresión de  $\rho'_A = \sum_{i=1,2} E_i \rho_A E_i^\dagger$  para un operador densidad  $\rho_A$  general de un qubit. Interpretar y discutir la variación de la entropía de  $\rho_A$ .

4) Considerando un átomo de 2 niveles con estados  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  con energías 0 y  $\varepsilon$ , y los estados de campo  $|0\rangle$  y  $|1\rangle = a_w^\dagger |0\rangle$ , con  $\hbar\omega = \varepsilon$ , mostrar que si

$$U_{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la base producto estándar, entonces

$$\rho'_A = \text{Tr}_C [U_{AC} \rho_A \otimes |0\rangle\langle 0| U_{AC}^\dagger] = E_0 \rho_A E_0^\dagger + E_1 \rho_A E_1^\dagger$$

con

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar también  $\rho'_A$  para  $\rho_A = p_0|0\rangle\langle 0| + p_1|1\rangle\langle 1|$ .

Determinar también un  $H_{AC}$  y un tiempo  $t$  tal que  $\exp[-iH_{AC}t] = U_{AC}$ .