Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica VII (Curso 2023)

Verificar las cuentas, en el caso de ser posible, con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.

I. Hallar las energías y autoestados exactos del Hamiltoniano

$$H = \sum_i (bc_i^\dagger c_i - v(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i))$$

en los casos fermiónico y bosónico, para $i = 1, \ldots n$ y $n + 1 \equiv 1$ (condición cíclica).
Interpretar H (Sugerencia: aplicar la transformada de Fourier discreta).

II. Sistemas en interacción

1) Hallar el estado fundamental, su energía y su entrelazamiento para:

$$H = B(\sigma_z^A + \sigma_z^B) - J(\sigma_+^A \sigma_-^B + \sigma_-^A \sigma_+^B)$$

Considerar los casos i) $0 < J < B$ y ii) $0 < B < J$.

b) (dos osciladores cuánticos acoplados, $a^\dagger$, a operadores de creación y aniquilación bosónicos)

$$H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) - \hbar\gamma(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad |\gamma| < \omega$$

3) Consideremos el Hamiltonian de Jaynes Cummings para un campo cuántico,

$$H = \omega_0 S_z + \omega(a^\dagger a + 1/2) + \tfrac{1}{2} g(S_+ a + S_- a^\dagger)$$

Para espín 1/2 (o sea, un sistema equivalente a un átomo de 2 estados) mostrar que:
a) El sistema acopla sólo estados $|0, n\rangle$ con $|1, n - 1\rangle$, donde $0, 1$ representa el estado atómico y n el del campo, y que por lo tanto, las energías exactas para $n \geq 1$ son

$$E_n^\pm = \omega n \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + ng^2}$$

Hallar explícitamente los autoestados para $\delta = 0$ (caso resonante). Mostrar también que si $|\delta| \gg g\sqrt{n} \Rightarrow \delta E_\pm^n \approx \pm\frac{1}{2} ng^2/\delta$.
b) Si inicialmente el sistema se encuentra en un estado separable $|0, n\rangle$, mostrar que al tiempo t el sistema en el caso resonante se encontrará en el estado

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i\omega nt}[\cos(\sqrt{n}gt/2)|0, n\rangle - i\sin(\sqrt{n}gt/2)|1, n - 1\rangle]$$

c) Indicar para que tiempos se obtendrá un estado entrelazado de Bell entre el átomo y campo.

4) Consideremos el Hamiltoniano fermiónico

$$H=\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{p}(c^{\dagger}_{p+}c_{p+}-c^{\dagger}_{p-}c_{p-})-\frac{1}{2}V\sum_{p\neq q}(c^{\dagger}_{p+}c^{\dagger}_{q+}c_{q-}c_{p-}+c^{\dagger}_{p-}c^{\dagger}_{q-}c_{q+}c_{p+})-G\sum_{p\neq q}c^{\dagger}_{p+}c^{\dagger}_{q-}c_{q+}c_{p-}$$

donde $V>0$, $G>0$ y $p,q=1\ldots,\Omega$.
a) Plantear las ecuaciones de Hartree-Fock para el caso de $N=\Omega$ fermiones, hallando la solución de energía mínima para $G>0$, $V>0$.
b) Identificar el umbral para ruptura de simetría (cual?) en la aproximación.
c) Hallar también la energía mínima en esta aproximación, y las energías de partícula independiente.