

1. Breve repaso de cálculos que necesitará usar en esta práctica.

(a) *Integral Gaussiana*: Resolver explícitamente la integral Gaussiana:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

para ello resuelva primero I^2 , recordando pasar a coordenadas polares.

(b) *Suma geométrica*: muestre que la serie $S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge para $|r| < 1$, y que en ese caso se obtiene que: $S = \frac{a}{1-r}$

2. *Teorema de Equipartición de la Energía*: Considere un sistema clásico donde se precisen $6N$ coordenadas e impulsos generalizados para describir cualquiera de sus microestados. Suponga que el Hamiltoniano de este sistema puede escribirse como la suma de M términos cuadráticos, ya sean en las coordenadas o en los impulsos.

- (a) Encontrar la función de partición.
- (b) Calcular el valor medio de la energía.
- (c) Encontrar el teorema de equipartición de la energía.
- (d) Obtener el calor específico.

3. *Modelos clásicos - Ley de Dulong-Petit*: En este modelo se considera que los átomos que conforman un sólido interactúan por medio de un potencial armónico, como si estuvieran unidos por resortes con cierta constante elástica k .

- (a) Utilizando estadística de Boltzmann, obtener la energía media y demostrar que el calor específico es $C_v = 3k_B$.
- (b) Realizar lo mismo que el ítem anterior pero utilizando el Teorema de Equipartición de la Energía. ¿Es necesario suponer que la frecuencia de oscilación es la misma en todas las direcciones para obtener dicho resultado?, ¿Es válido este resultado para toda temperatura?, ¿Por qué?

4. Modelos cuánticos: Einstein y Debye: Con la finalidad de describir el calor específico a bajas temperaturas, se acude a la mecánica cuántica en donde se mantiene la idea que los átomos interactúan por medio de un potencial tipo oscilador armónico. Considere un sólido de N átomos en d dimensiones, cuya energía asociada a las vibraciones es $E_n = \sum_{i=1}^N \hbar \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$, donde $n_i = 0, \dots, \infty$ indica el estado de excitación de cada sitio.

- (a) Obtener la función de partición canónica Z_N para los modos de vibración, calcular la energía media U y el calor específico C_v .
- (b) *Modelo de Einstein*: se considera que todos los átomos vibran con una misma frecuencia w_E , es decir, que todos los fonones tienen la misma energía. Calcular la energía media y el calor específico bajo estas consideraciones. Analizar el valor de C_v para los casos de alta y baja temperatura. ¿Reproduce este modelo la Ley de Dulong-Petit?, ¿Es adecuado para describir los valores experimentales a baja temperatura donde se observa una dependencia con T^3 ?
- (c) *Modelo de Debye*: A diferencia del modelo de Einstein, se propone que la frecuencia siguiera una relación de dispersión $w = v|\mathbf{k}|$, donde cada \mathbf{k} puede tener tres modos de oscilación posible.
 - i. ¿Con qué está relacionado v ?, ¿Cuáles son esos tres modos de oscilación de \mathbf{k} ?
 - ii. Calcular el valor de C_v para bajas temperaturas y demostrar su dependencia T^3 .
 - iii. Repetir la interpolación de Debye, proponiendo una frecuencia de corte, y obtener una expresión para la frecuencia de Debye (w_D) y la temperatura de Debye (Θ_D). Calcular C_v en el límite de altas temperaturas. ¿Cómo es ese límite si no se propone una frecuencia de corte?
 - iv. El He^3 es una sustancia que permanece líquida a temperaturas lo suficientemente bajas como para presentar un comportamiento T^3 . Considerando que su densidad es $\rho = 0.1455\text{g/cm}^3$ y tomando $v = 238\text{ m/s}$, obtener el calor específico por unidad de masa a bajas temperaturas y comparar con el valor experimental $c_v = (0.0201 \pm 0.0004)T^3\text{ J/g K}$.