Práctica 4-2015

Interación de Pares Nuclear.

La contribuciones de corto alcance de la fuerza nucleón-nucleón son las responsables de la interacción de pares nuclear. Esta interacción es más efectiva entre pares de nucleones aoplados a momento angular $I = 0$.

1. Esquema de Seoridad en una capa.

   Considere un sistema que consiste de N partículas en una capa de momento angular j, y degeneración $2\Omega = 2j + 1$. Si colocamos la capa j a energía cero, el Hamiltoniano puede escribirse como

   $$H = -G \sum_{m,m'>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger a_{-m'} a_{m'} = -GS_+S_-,$$

   con

   $$S- = \sum_{m>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger, \qquad S_- = (S_+)^\dagger.$$

   Los operadores S_+ y S_- pueden entenderse como operadores "ficticios" de momento angular que llamamos operadores de "pseudo-espín" ("quasi-spin"). Para cada subestado $m > 0$, introduciremos los siguientes operadores:

   $$\begin{aligned} s_+(m) &= a_m^\dagger a_{-m}^\dagger, \\ s_-(m) &= a_{-m} a_m, \\ s_0(m) &= \frac{1}{2}(a_m^\dagger a_m + a_{-m}^\dagger a_{-m} - 1). \end{aligned}$$

   Estos operadores satisfacen las reglas de conmutación del álgebra $su(2)$:

   $$[s_+(m), s_-(m)] = 2s_0(m),$$

   $$[s_0(m), s_\pm(m)] = \pm s_\pm(m).$$

   El operador $s_0(m)$ tiene autovalor $\pm 1/2$, según el par $(m, -m)$ este ocupado o vacio. El operador $\mathbf{s(m)}$ tiene espín $1/2$ para 0 o 2 partícula en la capa j. El operador total de momento angular es $\mathbf{S}$, definido por

   $$\mathbf{S} = \sum_{m>0} \mathbf{s}(m).$$

   (a) Muestre que el Hamiltoniano, H, puede escribirse como

   $$H = -G(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) - S_0^2 + S_0,$$

siendo $S_0 = (1/2)(\hat{N} - \Omega)$. A partir de las propiedades de momento angular resulta que

$$S \geq S_0 = \frac{1}{2}|N - \Omega|.$$

Por lo tanto, el valor máximo que puede tomar S es $S = \Omega/2$. Es decir que S puede tomar valores $\Omega/2,\ (\Omega/2) - 1,\ (\Omega/2) - 2...,\ (\Omega/2) - N/2$.

El Hamiltoniano H, conmuta con $\mathbf{S}$ y S_0.

(b) Pruebe que los autoestados de energía están dados por

$$E(S) = -G(S(S+1) - \frac{1}{4}(N_\Omega)^2 + \frac{1}{2}(N_\Omega)),$$

y que el estado más bajo corresponde a $S = \Omega/2$.

Podemos introducir, el llamado "número cuántico de señoridad",s, tal que $S = \frac{1}{2}(\Omega - s)$, y con

$$\begin{aligned} s &= 0, 2, 4, ...N, \quad \text{for } N \text{ even}, \\ s &= 1, 3, 5, ...N, \quad \text{for } N \text{ odd}. \end{aligned}$$

(c) Escriba los estados de energía de H en función del número cuántico de seridad, s. Pruebe que para un sistema par de partícula , la energía del primer estado excitado es $G\Omega$.

2. El modelo BCS.

El modelo de señoridad, no estálimitado a las configuraciones de una capa. Sin embargo, para sistemas lejos de capa cerrada el modelo se torna inaplicable. Lo importante del modelo de señoridad es mostrar que la interacción de pares es importante en los núcleos fuera de capa cerrada. En los casos mas generales, usaremos la aproximación BCS. En la aproximación BSC proponemos que la función del estado fundamental de un núcleo par-par es:

$$|\text{BCS} >= \prod_{jm>0} (u_j + v_j a^\dagger_{jm} a^\dagger_{j\overline{m}}) >, \tag{1}$$

donde u_j y v_j representan parámetros varacionales. Las amplitudes u_j^2 y v_j^2 representan la probabilidad que un par $(jm, j\overline{m})$ estéocupado o desocupado, por lo tanto no son independientes. La normalización del estado $|\text{BCS} >$, requiere que $u_j^2 + v_j^2 = 1$.

Consideremos el caso particular de una fuerza simple de interacción de pares.

$$H = \sum_{jm>0} \epsilon_j \; (a^\dagger_{jm} a_{jm} + a^\dagger_{j\overline{m}} a_{j\overline{m}}) - G \sum_{\substack{j \quad m>0 \\ j' \quad m'>0}} a^\dagger_{jm} a^\dagger_{j\overline{m}} a_{j'\overline{m'}} a_{jm'}.$$

La ventaja de escribir el estado fundamental como lo hicimos en la Eq.(1) es que se puede escribir como un estado producto de un nuevo tipo de fermiones, llamados cuasipartícula s:

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{jm} \\ \alpha_{j\overline{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j & -v_j \\ v_j & u_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_{jm} \\ a_{j\overline{m}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La ecuación muestra que la cuasipartícula tiene comparte algunas propiedades de partícula desnuda y algunas de agüjero desnudo: encima de la superficie de Fermi (v_j^2 es pequeño) es casi una partícula , debajo de la superficie de Fermi (u_j^2 es pequeño) es casi un agüjero.

A través de la transformación lineal de Bogoliubov de la Eq.(2), obtenemos la represntación del estado fundamental de pares de partícula interactuantes, como un gas de partícula s independientes, las cuai-partícula s.

(a) Pruebe que $\alpha_{jm}|\mathrm{BCS}>= 0$, para todo m.

Como $|\mathrm{BCS}>$ no tiene buen número de partícula s, debemos trabajar con $H' = H - \mu\hat{N}$, y pedir que $<\mathrm{BCS}|\hat{N}|\mathrm{BCS}>= N$.

(b) Escriba H' en la base de cuasi-partícula . Utilice el Teorema de Wick para ordenar los distintos términos del hamiltoniano ($H' = H'_{00} + H'_{11} + H'_{20} + H'_{res}$). Minimizando H_{00} respecto a u_j y v_j, derive las ecuaciones a resolver para obtener las energía s de las cuasi-partícula s y del gap de energía :

$$H' = -\frac{\Delta^2}{G} + \sum_{jm} E_j \alpha^\dagger_{jm} \alpha_{jm} + H_{res}, \tag{3}$$

con

$$\begin{aligned}
E_j &= \sqrt{(\epsilon_j - \mu)^2 + \Delta^2}, \\
\Delta &= G \sum_j u_j v_j \Omega_j, \\
u_j^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\epsilon_j - \mu)}{E_j}\right), \\
v_j^2 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\epsilon_j - \mu)}{E_j}\right),
\end{aligned}$$

3. Finalmente las ecuaciones a resolver, en forma autoconsistente, son

$$\begin{aligned} N &= 2\sum_j v_j^2 2\Omega_j, \\ \frac{1}{G} &= G\sum_j \frac{\Omega_j}{2E_j}. \end{aligned}$$

Cálcule las energía s de cuasi-partícula s, el valor de Δ y de μ, para los isotopos de estaño (^{126}Sn). Compare Δ con el valor experimental, obtenido a partir de los datos tabulados en el Nuclear Data Sheet.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= -\frac{1}{4}(S_n(N-1,Z) - 2S_n(N,Z) + S_n(N+1,Z)), \\ \Delta_p &= -\frac{1}{4}(S_n(N,Z+1) - 2S_n(N,Z) + S_(N,Z+1)), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \S_n(N,Z) &= B(N,Z) - B(N-1,Z)), \\ \S_p(N,Z) &= B(N,Z) - B(N,Z-1)). \end{aligned}$$