

Glosario de notación y definiciones de Geometría Diferencial

- . V : espacio vectorial
- . V^* : espacio dual a V
- . \mathcal{M} : variedad, manifold. $\dim \mathcal{M} = n$
- . p, q : puntos en la variedad \mathcal{M}
- . $T_p(\mathcal{M})$: espacio tangente en el punto p
- . $T_p^*(\mathcal{M})$: espacio cotangente en el punto p (dual a $T_p(\mathcal{M})$)
- . $T(\mathcal{M}) = \cup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})$: fibrado tangente
- . $T^*(\mathcal{M}) = \cup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*(\mathcal{M})$: fibrado cotangente
- . x^μ : coordenadas locales de una carta. Parametrizan un abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$
- . μ, ν : índices griegos denotan componentes en base de coordenadas. world indices
- . a, b : denotan componentes en el espacio tangente. tangent space indices¹
- . $\mathcal{C}, \gamma(\lambda)$: curva sobre \mathcal{M}
- . $x^\mu(\lambda)$: parametrización de una curva sobre \mathcal{M}

-
- . $\mathcal{F}(\mathcal{M})$: espacio de funciones suaves sobre \mathcal{M}
 - . $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$: espacio de campos vectoriales sobre \mathcal{M} . Espacio de secciones del fibrado tangente

-
- . $\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{T}$: vectores, formas y tensores se denotan en negrita.

-
- . ∂_μ : base local coordenada de $T_p(\mathcal{M})$
 - . dx^μ : base local coordenada de 1-formas. Son duales a ∂_μ :

$$\langle dx^\mu | \partial_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n \quad (1) \quad \boxed{\text{d1}}$$

-
- . \mathbf{E}_a : base local de vectores en p . En base de coordenadas: $\mathbf{E}_a = E_a^\mu(x) \partial_\mu$
 - . \mathbf{e}^a : base local de 1-formas. Son duales a \mathbf{E}_a :

$$\langle \mathbf{e}^a | \mathbf{E}_b \rangle = \delta_b^a, \quad a, b = 1, \dots, n \quad (2) \quad \boxed{\text{d2}}$$

En base de coordenadas: $\mathbf{e}^a = e_\mu^a(x) dx^\mu$. Luego,

$$(1) - (2) \Rightarrow e_\nu^a(x) E_a^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \quad \text{y} \quad e_\mu^a(x) E_b^\mu(x) = \delta_b^a \quad (3) \quad \boxed{\text{bdual}}$$

-
- . $\mathbf{V}[f] = V^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$: acción de un campo vectorial sobre una función
 - . $\mathbf{V} = V^\mu(x) \partial_\mu = V^a(x) \mathbf{E}_a(x)$: campo vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} V^\mu(x) \text{ componentes en base coordenadas} \\ V^a(x) \text{ componentes en base arbitraria} \end{array} \right\} \Rightarrow V^\mu(x) = E_a^\mu(x) V^a(x)$$

- . $\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu(x) dx^\mu = \omega_a(x) \mathbf{e}^a$: campo de 1-forma. ω_μ componentes en base coordenadas. ω_a base arbitraria.
- . $\mathbf{w}(\mathbf{V}) = \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{V} \rangle = \omega_a V^a$: acción de la 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ sobre el vector \mathbf{V}
- . $\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^m, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$: tensor $\binom{m}{n}$ los primeros slots corresponden a 1-formas, luego vectores,

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_m}_{a_{m+1} \dots a_{m+n}} \mathbf{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{a_m} \otimes \mathbf{e}^{a_{m+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{a_{m+n}}$$

donde

$$T^{a_1 \dots a_m}_{a_{m+1} \dots a_{m+n}} = \mathbf{T}(\mathbf{e}^{a_1}, \dots, \mathbf{e}^{a_m}, \mathbf{E}_{a_{m+1}}, \dots, \mathbf{E}_{a_{m+n}})$$

¹Seguimos la convención de Weitzenböck indicando con índices griegos (μ, ν, ρ, \dots) los elementos de las bases coordenadas y con índices latinos (a, b, c, \dots) los de una base general.

. Transformaciones generales de coordenadas (TGC): $x \rightarrow \tilde{x}(x)$ modifican la base coordenada

$$x \rightarrow \tilde{x}(x) \Rightarrow \partial_\mu \rightarrow \tilde{\partial}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\nu \quad \text{y} \quad dx^\mu \rightarrow d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

induciendo transformaciones en las componentes de vectores y formas:

$$x \rightarrow \tilde{x}(x) \Rightarrow V^\mu(x) \rightarrow \tilde{V}^\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x) \quad \text{y} \quad \omega_\mu(x) \rightarrow \tilde{\omega}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\nu(x)$$

. Cambios locales de base (CLB): son transformaciones mas generales que las TGC (TGC \subset CLB).

$C^a_b(x)$: cambio local de la base de 1-formas.

$$\tilde{e}^a = C^a_b(x) e^b \quad \text{donde} \quad C^a_b(x) \in GL(n, \mathbb{R}) \quad (4) \quad \boxed{\text{cb1}}$$

\rightsquigarrow podemos ver que la base $\{\mathbf{E}_a\}$ transforma con la matriz inversa transpuesta.

$C_a^b(x)$: cambio local de la base de vectores. Luego,

$$\tilde{\mathbf{E}}_a = C_a^b(x) \mathbf{E}_b \quad (5) \quad \boxed{\text{cb2}}$$

De la condición de dualidad entre bases de V y V^* , ec (2), resulta

$$\delta_a^b = \langle \tilde{e}^a, \tilde{\mathbf{E}}_b \rangle = \langle e^a, \mathbf{E}_b \rangle \Rightarrow C_a^b(x) C_c^a(x) = \delta_c^b \quad \text{y} \quad C_a^c(x) C_c^b(x) = \delta_a^b \quad (6) \quad \boxed{\text{bases}}$$

La relación entre C^a_b y C_a^b se hace evidente denotando

$$(6) \Rightarrow (C)^a_b = C^a_b, \quad (C^{-1})^a_b = C_b^a$$

En notación matricial escribimos: $\tilde{e} = C \cdot e$, $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cdot C^{-1}$.

. $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mapa entre variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} . Sea $p \in \mathcal{M}$ y $q \in \mathcal{N}$ su imagen, denotamos $q = \psi(p)$

En cartas locales siendo x^α coords de \mathcal{M} y y^β coords de \mathcal{N} , dar ψ equivale a dar $y^\beta(x^\alpha)$

. $\psi^* : \mathcal{F}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M})$ pullback sobre funciones.

Siendo $g \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ denotamos su pullback $g^* \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ como

$$g^* = \psi^* g \doteq g \circ \psi$$

Sea x^α coords locales de \mathcal{M} y y^β coords locales de \mathcal{N} , de $g = g(y) \rightsquigarrow g^*(x) = g(y(x))$.

. $\psi_* : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\psi(p)}(\mathcal{N})$ pushforward. Actúa sobre tensores contravariantes.

Sea $g \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$, $\mathbf{V} \in T_p(\mathcal{M})$, el pushforward a \mathcal{N} se denota $\psi_* \mathbf{V} \in T_{\psi(p)}(\mathcal{N})$ y define por

$$\mathbf{V}_* = \psi_* \mathbf{V}[g] \doteq \mathbf{V}[\psi^* g] = \mathbf{V}[g \circ \psi]$$

En coordenadas locales resulta

$$V_*^\beta(y) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} V^\alpha(x)$$

. \mathbf{V}_* : pushforwarded vector

. $\psi^* : T_{\psi(p)}^*(\mathcal{N}) \rightarrow T_p^*(\mathcal{M})$ pullback. Actúa sobre tensores covariantes.

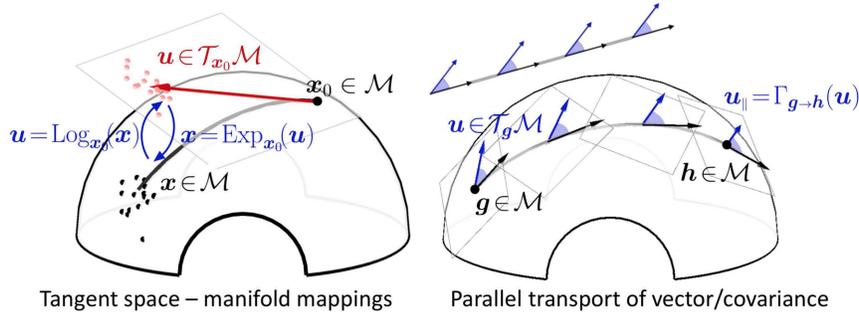
Siendo $\mathbf{V} \in T_p(\mathcal{M})$, $\omega \in T_{\psi(p)}^*(\mathcal{N})$ el pullback a \mathcal{M} se denota $\psi^* \omega \in T_p^*(\mathcal{M})$ y define por

$$\omega^*[\mathbf{V}] = (\psi^* \omega)[\mathbf{V}] \doteq \omega[\psi_* \mathbf{V}]$$

En coordenadas locales

$$\omega^*_\alpha(x) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \omega_\beta(y)$$

. ω^* : pullbacked covariant tensor.



- . $y_{\mathbf{K}}^\alpha(t, y_0)$: curvas integrales/flujo de \mathbf{K} . Soluciones de $\frac{dy_{\mathbf{K}}^\alpha}{dt} = K^\alpha(y_{\mathbf{K}}(t)) \oplus y_{\mathbf{K}}^\alpha(0) = y_0^\alpha$
- . $\psi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ familia monoparamétrica de difeomorfismos. En una carta local $\psi_t : x^\alpha \rightarrow y_{\mathbf{K}}^\alpha(t, x)$
También denotado $\psi_t(x) = e^{t\mathbf{K}}x$ ($= y_{\mathbf{K}}$ en coordenadas locales).
- . $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}$: derivada de Lie a lo largo del vector \mathbf{K}

-
- . d : derivada exterior
 - . Ω^p : espacio de p -formas
 - . \wedge : producto exterior, satisface $\alpha_p \wedge \beta_q = (-)^{pq} \beta_q \wedge \alpha_p$
 - . $i_{\mathbf{X}}$: producto interior sobre formas, contracción con un campo vectorial \mathbf{X} : $(i_{\mathbf{X}}\omega_p)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = X^\nu \omega_{\nu \mu_1 \dots \mu_{p-1}}$

$$\text{Fórmula de Cartan : } \quad \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega = d(i_{\mathbf{X}}\omega) + i_{\mathbf{X}}d\omega \quad \forall \omega_p$$

- . $*$: dual de Hodge

-
- . Métrica: campo tensorial $\binom{0}{2}$ simétrico invertible,

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu$$

donde $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu)$ son las componentes de la métrica en base coordenada.

Permite establecer una correspondencia $V \leftrightarrow V^*$.

Define un producto escalar entre campos vectoriales:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \doteq \mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) W^\nu(x)$$

Nota: cuando la variedad cuenta con una métrica \mathbf{g} , existe una base privilegiada. Aquella cuyos elementos son ortonormales respecto de \mathbf{g} :

$$(\mathbf{g}, \mathcal{M}) \Rightarrow \text{base privilegiada } \{\mathbf{E}_a\} : \quad \mathbf{g}(\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b) = \eta_{ab} \quad \text{y su respectiva base dual } \{e^a\} \quad (7) \quad \boxed{\text{priv}}$$

Ciertamente la base no es única, ya que el subgrupo de transformaciones locales de Lorentz (TLL) contenidas en los cambios de base locales $\Lambda \in SO(n) \subset \mathbb{C} \in GL(n, \mathbb{R})$

$$e^a \rightarrow \tilde{e}^a = \Lambda^a_b(x) e^b \quad \Lambda \in \text{Lorentz} \quad (8) \quad \boxed{\text{TLL2}}$$

generan una nueva base ortonormal $\{\tilde{e}^a\}$.

Una teoría de gravedad se formula dándole dinámica a la base de tétradas ortogonales imponiendo que todas las tétradas relacionadas por (8) sean físicamente equivalentes. Técnicamente, resulta ser una teoría de gauge para las TLL. La conexión de spín oficia de campo de gauge.

-
- . Estructuras geométricas sobre una variedad

La métrica $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$ y la conexión $\nabla \cdot$ son, en principio, estructuras independientes sobre una variedad.

-
- . Conexión afin: $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, esto es un mapa $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ cuyas propiedades son

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \\ \nabla_{(\mathbf{X}+\mathbf{Y})}\mathbf{Z} &= \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \\ \nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \\ \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) &= \mathbf{X}[f] \cdot \mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

la linealidad implica que es suficiente conocer la acción de ∇ en una base de $T_p(\mathcal{M})$ para hallar su acción $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}$. Luego, de las propiedades enunciadas tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{E}_a} \mathbf{E}_b &= \omega^c_b(\mathbf{E}_a) \mathbf{E}_c && \text{acción de la conexión afín en la base } \mathbf{E}_a \\ \nabla_{\mathbf{E}_a} e^b &= -\omega^b_c(\mathbf{E}_a) e^c && \text{acción de la derivada covariante sobre la base dual } e^b.\end{aligned}\quad (\dagger)$$

Frente a cambios locales de base (4)-(5), ω^a_b no es un tensor en índices ab , sino que transforma como un campo de gauge

$$\omega^a_b \rightarrow \tilde{\omega}^a_b = C^a_e \omega^e_d C_b^d + C^a_e dC_b^e \rightsquigarrow \tilde{\omega} = \mathbf{C} \cdot \omega \cdot \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C} \cdot d(\mathbf{C}^{-1}) \quad (9) \quad \boxed{\text{conTr}}$$

En base de coordenadas las componentes de la conexión transforman como

$$\tilde{\omega}^a_b(\partial_\mu) = \tilde{\omega}_\mu^a_b(x) = C^a_e(x) C_b^d(x) \omega_\mu^e_d(x) + C^a_e(x) \partial_\mu(C_b^e(x)) \quad (10) \quad \boxed{\text{sp2}}$$

. Símbolos de Christoffel: es importante distinguir que los índices de la conexión tienen distinto carácter

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \rightarrow (\Gamma_\mu)^\alpha_\beta \quad (11) \quad \boxed{\text{gamma}}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha(x) &= \omega^\alpha_\beta(\partial_\mu). \text{ Coeficientes de la conexión afín en base coordenada. } \omega^\alpha_\beta(\cdot) = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha dx^\mu(\cdot) \\ \omega_a^c_b(x) &= \omega^c_b(\mathbf{E}_a). \text{ Coeficientes en base local. } \omega^c_b = \omega_a^c_b(x) e^a\end{aligned}$$

Los índices μ, a en $\Gamma_{\mu\cdot}^\cdot$ y ω_a^\cdot son componentes de 1-forma, transforman de manera tensorial, frente a CLB (cf. (9)-(10)).

A partir de estas definiciones escribimos

$$\nabla_{\mathbf{E}_a} \mathbf{E}_b = \omega_a^c_b(x) \mathbf{E}_c$$

. Conexión de spin: $\omega_\mu^c_b(x)$, componentes de la 1-forma/conexión ω^c_b en base coordenada

$$\omega^c_b = \omega_\mu^c_b(x) dx^\mu \quad \text{de manera que} \quad \omega_\mu^c_b(x) = e_\mu^a(x) \omega_a^c_b(x)$$

Puesto que $\mathbf{E}_a = E_a^\mu(x) \partial_\mu$, la relación entre los coeficientes de la conexión en base coordenada, Γ^α_β , y en base arbitraria ω^a_b resulta²

$$\partial_\mu E_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu E_a^\rho - E_b^\nu \omega_\mu^b_a = 0 \quad (12) \quad \boxed{\text{vPo}}$$

. Tensor de Torsión: tensor $\binom{1}{2}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (13) \quad \boxed{\text{torsion}}$$

En base coordenada

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^\alpha(x) \partial_\alpha \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \text{donde} \quad T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \quad (14) \quad \boxed{\text{T1}}$$

\rightsquigarrow en base de coordenadas la parte antisimétrica de la conexión es un tensor.

\rightsquigarrow en ausencia de torsión los símbolos de Christoffel en base coordenada son simétricos.

En base arbitraria no holónoma $[\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b] = \Omega_{ab}^c(x) \mathbf{E}_c$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} T_{bc}^a(x) \mathbf{E}_a \otimes e^b \wedge e^c \quad \text{donde} \quad T_{bc}^a = \omega_b^a_c - \omega_c^a_b + 2\Omega_{bc}^a$$

²En el presente contexto (Cartan) la expresión (12) se deduce de las definiciones. En el contexto de gravedad como una teoría de gauge del grupo de Lorentz, la ec. (12) se debe imponer y se conoce como Postulado de vierbein (44).

. Tensor de Curvatura de Riemann: tensor $\binom{1}{3}$

$$\mathbf{R}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}$$

En base de coordenadas

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}$$

que podemos rephrasing, siguiendo (11), como las componentes $\alpha\beta$ del field strength

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu} + [\Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu}]$$

. Tensor de Ricci y curvatura escalar:

$$\begin{aligned} \text{Tensor de Ricci : } R_{\mu\nu} &\doteq R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} && \text{(en general no es simétrico)} \\ \text{Curvatura escalar : } R &\doteq g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

. Ecuaciones de estructura de Cartan:

$$\begin{aligned} \text{1ra Ecuación : } \mathbf{T}^a &= d\mathbf{e}^a + \omega^a_b \wedge \mathbf{e}^b \\ \text{2da Ecuación : } \mathbf{R}^a_b &= d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \end{aligned} \quad (15) \quad \boxed{\text{cartan}}$$

De manera que elegida una base $\{\mathbf{e}^a\}$, toda conexión ∇ queda caracterizada por su torsión \mathbf{T}^a y curvatura \mathbf{R}^a_b . Desde el punto de vista de Cartan ninguna base $\{\mathbf{e}^a\}$ es privilegiada.

. Identidades de Ricci:

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi &= -T^{\alpha}_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \phi \\ [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} &= -T^{\alpha}_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} V^{\rho} + R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma} \\ [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \omega_{\rho} &= -T^{\alpha}_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \omega_{\rho} - R^{\alpha}_{\rho\mu\nu} \omega_{\alpha} \end{aligned} \quad (16) \quad \boxed{\text{ricci}}$$

. Identidades de Bianchi:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta(\mu\nu)} &= 0 \\ R^{\rho}_{[\sigma\mu\nu]} - \nabla_{[\mu} T^{\rho}_{\nu\sigma]} + T^{\gamma}_{[\mu\nu} T^{\rho}_{\sigma]\gamma} &= 0 \\ \nabla_{[\alpha} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu]} - T^{\gamma}_{[\alpha\mu} R^{\rho}_{\sigma\nu]\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (17) \quad \boxed{\text{bianchi}}$$

en la última línea un índice punteado denota que no debe ser simetrizado.

. Descomposición de la conexión

Dada una geometría afín $\mathcal{G} = \{\mathcal{M}, \mathbf{g}, \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\}$, se prueba que existe una descomposición única de la conexión

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K^{\rho}_{\mu\nu} + L^{\rho}_{\mu\nu} \quad (18) \quad \boxed{\text{GG}}$$

donde el primer término es la conexión de Levi-Civita determinada por la métrica (22), el segundo se llama contorsión $K(T)$ y queda determinado por la torsión³

$$K^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{g^{\rho\lambda}}{2} \left(\underbrace{T_{\lambda\mu\nu}}_{\text{antisim.}} + \underbrace{T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu}}_{\text{sim.}} \right)$$

y el último L es la *conexión no métrica* determinada por $Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_{\mu} g_{\nu\rho}$

$$L^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (Q^{\rho}_{\mu\nu} - Q^{\rho}_{\nu\mu} - Q^{\rho}_{\mu\nu})$$

³Notar que la torsión genera contribuciones antisimétricas y simétricas en la contorsión.

. Compatibilidad métrica: una conexión ∇ se dice compatible con la métrica \mathbf{g} sii

$$\nabla_{\mathbf{E}_a} \mathbf{g} = 0, \quad \forall a \quad (\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 \equiv Q = 0) \quad (19) \quad \boxed{\text{mc1}}$$

Escribiendo la métrica en la base ortonormal (7) y usando (†) resulta

$$\mathbf{g} = \eta_{ab} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b \Rightarrow \boxed{\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}} \quad (20) \quad \boxed{\text{cm}}$$

. Conexión de Levi-Civita: es una conexión particular definida unívocamente por la métrica. Resulta de imponer que la conexión ∇ sea compatible con la métrica (19) y que la torsión sea nula⁴

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 \quad \oplus \quad \mathbf{T}^a = 0 \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = \text{Levi-Civita} \quad (21) \quad \boxed{\text{mc}}$$

En base de coordenadas la conexión de Levi-Civita se denota $\{\cdot\cdot\}$ y toma la forma

$$\text{Levi - Civita :} \quad \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}(g) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\beta \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (\partial_{\mu} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\mu\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\mu\beta}) \quad (22) \quad \boxed{\text{LC}}$$

en virtud de (14), la conexión de Levi-Civita es simétrica en sus índices covariantes $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(g) = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}(g)$

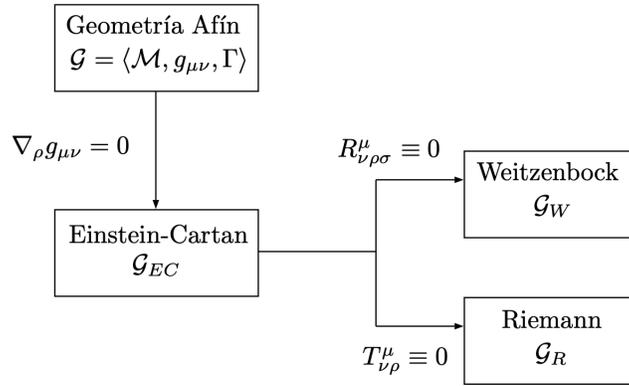


Figura 1: Geometrías afines y condiciones que las definen

- . Geometrías de Einstein-Cartan: conexión Γ_{μ} compatible con la métrica $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$. ($L = 0$)
- . Geometría de Riemann: $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ y torsión $\mathbf{T} = 0 \rightsquigarrow \Gamma_{\mu} = \text{Levi-Civita}$. ($L = K = 0$)
- . Geometría de Weitzenböck: conexión Γ_{μ} con curvatura $\mathbf{R} = 0$

Nota: al introducir una métrica en la variedad aparece η_{ab} en el espacio tangente local, lo que nos permite subir y bajar los índices de la conexión de spín. La condición de compatibilidad métrica impone que la conexión de spín sea antisimétrica en ab , (20) \rightsquigarrow puede ser pensada como un campo de gauge en el grupo de Lorentz. De esta manera la formulación de tetradas (Cartan) se reduce a la formulación de la gravedad como una teoría de gauge del grupo local de Lorentz, ver (8) y (40).

⁴Las condiciones que se derivan de (21) resultan algebraicas para Γ y nos permiten resolverlas en términos de la métrica. La solución es única.

. Geodesicas: cuando consideramos a la métrica y a la conexión afín como variables independientes tenemos dos curvas naturalmente definidas sobre la variedad:

Geodesica métrica : $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$

Curva $x^\mu(\lambda)$ de longitud mínima entre dos puntos.

Obtenida mediante el principio de mínima acción (reparametrization invariant):

$$S = \int ds = \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad \text{donde } \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Ecuación geodésica en parametrización de tiempo propio :

$$\ddot{x}^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad \text{donde } \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (23) \quad \boxed{\text{geoG}}$$

donde el tiempo propio se define como: $d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda$

Curva autoparalela : curva $x^\mu(\tau)$ con vector tangente $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ covariantemente constante.

$$\frac{Dt}{D\tau} = \nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (24) \quad \boxed{\text{geoT}}$$

Físicamente corresponde a una trayectoria no acelerada (fuerzas = 0).

Las geodésicas métricas y curvas autoparalelas no coinciden en general.

Sin embargo, (23) y (24) resultan equivalentes en la geometría Riemanniana, cuando

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad \text{conexión } \nabla = \text{Levi-Civita.}$$

. $\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{V} = 0$: transporte paralelo del vector \mathbf{V} a lo largo de una curva $\gamma(\lambda)$ con vector tangente $\mathbf{t} = \frac{d}{d\lambda}$. En coordenadas locales tenemos $\gamma \mapsto x^\mu(\lambda)$. Dada una condición inicial $V^\mu(0)$ resolvemos

$$\dot{x}^\rho (V_{,\rho}^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\sigma) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{x}^\rho V^\sigma \quad \rightarrow \quad \mathbf{V}(\lambda) = \mathcal{P} e^{-\int^\lambda \Gamma_\mu dx^\mu} \mathbf{V}(0)$$

donde \mathcal{P} indica que la matriz $\Gamma_\mu = (\Gamma_\mu)^\alpha_\beta$ debe ir path ordenada a lo largo de γ .

. $\frac{D}{D\tau} = \nabla_{\mathbf{t}}$: derivada absoluta, caracteriza el cambio de un tensor a lo largo de una curva γ de vector tangente \mathbf{t} . En coordenadas locales $x^\mu(\tau) \rightsquigarrow \mathbf{t} = \frac{d}{d\tau} = \dot{x}^\mu \partial_\mu = t^\mu \partial_\mu \rightsquigarrow t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

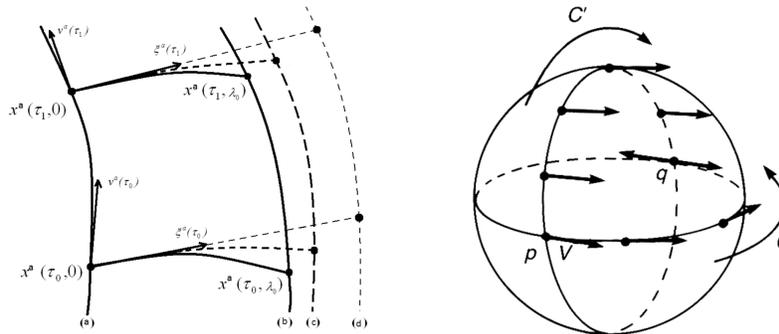


Figura 2: Derecha: transporte paralelo de $p \rightarrow q$, a lo largo de curvas C y C' , del vector \mathbf{V} . La figura muestra que, debido a la curvatura de la esfera, el vector obtenido en q depende del camino.

Interpretación del tensor de Riemann⁵

El tensor de Riemann es una medida de no conmutatividad del transporte paralelo (deficit angular).

El tensor de Riemann es del tipo $\binom{1}{3}$

$$\mathbf{R}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$$

con una entrada para 1-formas y tres entradas para vectores. De manera que si ocupamos las entradas para vectores, $\mathbf{R}(\cdot, \mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ obtenemos un vector que explícitamente resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\cdot, \mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{V}) &= [\nabla_{\mathbf{U}}, \nabla_{\mathbf{V}}]\mathbf{W} - \nabla_{[\mathbf{U}, \mathbf{V}]}\mathbf{W} \\ &= R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} W^{\beta} U^{\mu} V^{\nu} \partial_{\alpha} \end{aligned} \quad (25) \quad \boxed{\text{rim}}$$

Desviación geodésica. Ecuación de Jacobi

Deseamos evaluar si dos geodésicas vecinas inicialmente paralelas, (a) y (b) en la figura, se mantienen paralelas a tiempos posteriores⁶.

A tal fin definimos:

1. Geodésicas: (a),(b),... en la figura, de vector tangente $\mathbf{v} = d/d\tau$ tal que $\frac{D\mathbf{v}}{D\tau} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0 \rightsquigarrow x^a(\tau, \lambda_i) \forall \tau$.
2. Vector de desviación geodésica $\boldsymbol{\xi}$: cuyas curvas integrales unen puntos de igual tiempo propio τ a lo largo de geodésicas vecinas. La parametrización λ de las curvas integrales de $\boldsymbol{\xi} = d/d\lambda$ es tal que cada geodésica (a), (b) o (c) queda identificada por un valor fijo de λ , esto es $\lambda = 0$ para la geodésica (a), $\lambda = \lambda_0$ para la geodésica (b),... Ver figura de la derecha.
Esto significa que los parámetros τ y λ funcionan como coordenadas (“cierran cuadriláteros”): $[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}] = 0$.

Asumimos que inicialmente las geodésicas (a) y (b) son paralelas: esto es, la dirección del vector tangente \mathbf{v} de la geodésica (b) en τ_0, λ_0 se obtiene de transportar paralelamente en la dirección de $\boldsymbol{\xi}$ el vector tangente a la geodésica (a) en el punto $\tau_0, 0$. Para averiguar si este paralelismo se preserva a lo largo de las geodésicas debemos evaluar si el vector tangente a la geodésica (b) en el punto τ_1, λ_0 coincide nuevamente con el transporte paralelo del vector tangente de (a) en $\tau_1, 0$.

Debemos entonces calcular

$$\frac{D}{D\tau}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}) \stackrel{?}{=} 0 \rightsquigarrow \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}) = ?$$

De (25), tomando en cuenta que $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$ y que τ, λ sirven como coordenadas, resulta

$$\mathbf{R}(\cdot, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}) \quad (26) \quad \boxed{\text{desv}}$$

Por otro lado puesto que $[\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}] = 0$, si la torsión es nula, de (13) tenemos que $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\xi}$, que reemplazada en (26) conduce a la ecuación de desviación geodésica

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{R}(\cdot, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}).$$

que en base coordenada toma la forma

$$\text{Ecuación de Jacobi : } \quad \boxed{\frac{D^2 \xi^{\mu}}{D\tau^2} = R^{\mu}_{\beta\rho\sigma} v^{\beta} v^{\rho} \xi^{\sigma}}$$

⁵Se puede encontrar una interpretación análoga para el tensor de torsión (ver Nakahara y Ortín sec. 1.2).

⁶Por ejemplo, los meridianos de una esfera son paralelos en el ecuador pero no lo son en otras latitudes (la curvatura de la variedad los acerca). Ver figura de la derecha.

FORMULACIONES DE LA RELATIVIDAD GENERAL

METRICA

- . Simetría: siendo $\dim \mathcal{M} = n$, las formulaciones de Einstein-Hilbert y Palatini hacen hincapie en la invarianza frente a TGC (grupo de diffeomorfismos $GL(n, \mathbb{R})$)

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x^\alpha), \quad J^\mu_\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \tilde{x}^\mu, \quad (J^{-1})^\alpha_\mu = \tilde{\partial}_\mu x^\alpha, \quad J \in GL(n, \mathbb{R}) \quad (27) \quad \boxed{\text{diff}}$$

A tal fin se introducen los símbolos de Christoffell $\Gamma^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} dx^\mu$ que transforman/ofician de campos de gauge (cf. (9))

$$\tilde{\Gamma}^\rho_\nu = J^\rho_\alpha \Gamma^\alpha_\gamma (J^{-1})^\gamma_\nu + J^\rho_\alpha d(J^{-1})^\alpha_\nu \quad (28) \quad \boxed{\text{gt}}$$

• Formulación de Einstein-Hilbert (2do orden)

La teoría de la Relatividad General de Einstein es una formulación de segundo orden para la métrica. Asume que la conexión Γ sobre la variedad es la conexión de Levi-Civita (21). El único grado de libertad es $g_{\mu\nu}$.

- . Variable dinámica: $g_{\mu\nu}$.
- . Dinámica: definida por

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}(g_{\mu\nu})$$

con \mathcal{F} invariante bajo TGC. Dependerá entonces de contracciones de

$$g_{\mu\nu}, R^\alpha_{\beta\mu\nu}, R_{\mu\nu}, R$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(g_{\mu\nu}) &= eqn(22) \\ R^\alpha_{\beta\mu\nu}(\Gamma(g_{\mu\nu})) &\equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta} \sim \partial^2 g + \dots \\ R_{\mu\nu} &\equiv R^\gamma_{\mu\gamma\nu} \\ R &\equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Como la curvatura de Riemann es un tensor en segundas derivadas en g , solo puede aparecer una potencia del mismo, que al ser contraída para obtener un escalar da como única posibilidad

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^n x \sqrt{g} (R[g_{\mu\nu}] + \Lambda) \quad (29) \quad \boxed{\text{EH}}$$

Lagrangianos arbitrarios con potencias mas altas del Riemman dan lugar en ppio a ecuaciones de cuarto orden o superiores para $g_{\mu\nu}$. En 4d la acción es única y esta dada por S_{EH} . Para $n > 4$ Lovelock descubre en los '70 que existen combinaciones muy particulares del tensor de Riemman que dan lugar a ec de movimiento de 2do orden para la métrica

• Formulación de Palatini (1er orden)

La formulación de Palatini es una formulación de primer orden.

- . Variables dinámicas: $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$.
- . Dinámica:

$$S_{\text{Palatini}}[g_{\mu\nu}, \Gamma^\alpha_{\mu\beta}] = \int \sqrt{g} R(\Gamma) \quad (30) \quad \boxed{\text{pala}}$$

- . Equivalencia EH \leftrightarrow Palatini: La formulación de Palatini es equivalente a (29). La condición

$$\Gamma = \Gamma(g) = \text{Levi-Civita}$$

se obtiene como ecuación de movimiento al variar S_{Palatini} respecto de Γ . Puesto que la ecuación resulta algebraica para Γ , podemos resolverla y obtenemos (22). El lema de eliminación en Práctica 0 nos dice que reemplazar $\Gamma = \text{Levi-Civita}$ en la acción y que variar respecto de $g_{\mu\nu}$ esta permitido y conduce a las mismas eom que la acción original. Obviamente, al escribir $\Gamma = \Gamma(g)$ en (30) obtenemos (29).

TETRADAS

Esta formulación singulariza los frames locales *ortonormales* en el espacio tangente e^a , estos frames en virtud del principio de equivalencia adquieren significado físico. Sin embargo existe una ambigüedad en la definición de los frames debido a (8). El núcleo de la formulación se basa en la invarianza frente a transformaciones locales de Lorentz de los frames (TLL). En la formulación de tetradas la conexión de spin ω se introduce como el campo de gauge del grupo local de Lorentz, necesario para definir derivadas covariantes, y que vive, naturalmente, en el álgebra de Lie de $SO(n-1, 1)$:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}(x)M_{ab}dx^\mu \quad (31) \quad \boxed{\text{sc}}$$

M_{ab} son los generadores de $SO(n-1, 1)$ (antisimétricos en ab)

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc} \quad (32) \quad \boxed{\text{lor}}$$

en la representación de interés.

Recordemos que las transformaciones de Lorentz se definen a partir de

$$\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d\eta_{ab} = \eta_{cd}$$

Escribiendo $\Lambda = e^\theta$ y definiendo $\theta_{ab} \equiv \eta_{ac}\theta^c{}_b$, resulta $\theta_{ab} = -\theta_{ba}$.

Este formalismo permite acoplar espinores a una geometría curva mediante el acoplamiento ‘minimal’ $\partial_a \rightarrow D_a$ (cf.(40)) [Weyl, 1929]

$$\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma^a D_a\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \quad \text{donde} \quad \gamma^\mu = E_a^\mu\gamma^a \quad \text{y} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

• RG como un teoría de gauge del grupo de Lorentz (1er orden)⁷

. Simetría: la teoría se formula de manera de ser invariante bajo TGC en ec. (27) y TLL en ec. (8)⁸

$$e_\mu^a \rightarrow \tilde{e}_\mu^a = \Lambda^a{}_b(x)e_\mu^b, \quad \Lambda^a{}_b(x) \in SO(n-1, 1) \quad (33) \quad \boxed{\text{TLL}}$$

. Variables dinámicas: e^a (tétrada ortonormal), $\omega^a{}_b$ (conexión de spin) y Γ (símbolos de Christoffel)

. Métrica: $g_{\mu\nu}$ es una cantidad derivada a partir de las formas locales $e^a(x)$.

Puesto que la métrica es una forma bilineal simétrica sobre vectores podemos expresarla en base de coordenadas $\{dx^\mu\}$ o en una base de frames locales ortonormales $\{e^a\}$ ⁹

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab}e^a \otimes e^b \quad \text{dado que} \quad e^a = e_\mu^a(x)dx^\mu \Rightarrow \boxed{g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{ab}e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)} \quad (34) \quad \boxed{\text{tet}}$$

Llamando $e = \det e_\mu^a$ tenemos $\sqrt{-g} = e$.

Índices planos y curvos suben y bajan con η_{ab} y $g_{\mu\nu}$.

La relación de dualidad entre las bases $\{e^a\}$ y $\{\mathbf{E}_a\}$, ec. (3), implica

$$E_a^\mu(x) = \eta_{ab}g^{\mu\nu}e_\nu^b(x) \quad \text{y} \quad g^{\mu\nu}(x) = E_a^\mu(x)E_b^\nu(x)\eta^{ab} \quad (35) \quad \boxed{\text{invE}}$$

En virtud de la primera relación, muchos textos optan por definir

$$e_a^\mu(x) \equiv E_a^\mu(x) = \eta_{ab}g^{\mu\nu}e_\nu^b(x) \quad (36) \quad \boxed{\text{up}}$$

y no mencionar las componentes $E_a^\mu(x)$. De (3) concluimos que las componentes E_a^μ son la matriz inversa

⁷Ver Weinberg, *Gravitation*, Sec. 5 Cap 12, Ramond, *Field theory a modern primer*, Sec. 6.4, Birrell and Davies, *QFT in curved spacetime*, Sec. 3.8 y Green-Schwarz-Wiiten, *Superstring Theory* Sec. 4.3

⁸Las TLL, $\text{dof}(\Lambda) = \frac{1}{2}d(d-1)$, resuelven la discrepancia entre $\text{dof}(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}d(d+1)$ y $\text{dof}(e_\mu^a) = d^2$

$\text{dof}(g_{\mu\nu}) = \text{dof}(e_\mu^a) - \text{dof}(\Lambda)$

⁹Mas precisamente, la base de $T_p(\mathcal{M})$ es ortonormal: $\mathbf{g}(\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b) = \eta_{ab} \rightsquigarrow E_a^\mu E_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \cdot \{e^a\}$ es la base dual a $\{\mathbf{E}_a\}$.

de las componentes e_μ^a

$$E_a^\mu = (e_\mu^a)^{-1} \quad (37) \quad \boxed{\text{inv}}$$

- . **Tensores:** se piensan siempre en el espacio tangente de manera de poder considerar spin semientero. A modo de ejemplo, si \mathbf{W} es un tensor $\binom{0}{2}$, se lo piensa en el espacio tangente

$$W_{ab}(x) = E_a^\mu(x)E_b^\nu(x)W_{\mu\nu}(x)$$

Frente a TLL un tensor T^I en la representación R transforma como $\tilde{T} = D^R(\Lambda) \cdot T$, en componentes

$$T^I(x) \rightarrow \tilde{T}^I(x) = D(\Lambda(x))^I{}_J T^J(x) \quad (38) \quad \boxed{\text{TLLT}}$$

donde

$$D^R(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\theta^{ab}M_{ab}^{(R)}} \quad \text{con} \quad M_{ab}^{(R)} = (M_{ab})^I{}_J \quad (39) \quad \boxed{\text{irrep}}$$

La necesidad de trabajar en el espacio tangente se debe al interés de incorporar fermiones al contexto de gravedad. Los fermiones no tienen índices tensoriales μ, ν y no pueden ser acoplados usando Christoffels..

- . **Derivada covariante Lorentz:** la definimos con la conexión de spin (31) oficiando de campo de gauge

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega} \rightsquigarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + \omega_\mu \Rightarrow D_a = E_a^\mu(x)(\partial_\mu + \omega_\mu) \quad \text{donde} \quad \omega_\mu \doteq \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}(x)M_{ab}. \quad (40) \quad \boxed{\text{covder}}$$

Imponiendo que D_a transforme frente a transformaciones de gauge (38) de manera covariante

$$D_a T^I \rightarrow \tilde{D}_a \tilde{T}^I = \Lambda_a{}^b(x) \cdot D(\Lambda(x))^I{}_J D_b T^J$$

requiere que la conexión de spin transforme como (cf.(9))

$$\tilde{\omega}_\mu = D(\Lambda) \cdot \omega_\mu \cdot D(\Lambda^{-1}) - \partial_\mu(D(\Lambda)) \cdot D(\Lambda^{-1})$$

En componentes esta expresión toma la forma (cf. (10))

$$\tilde{\omega}_\mu{}^a{}_b(x) = (\Lambda \cdot D_\mu D(\Lambda^{-1}))^a{}_b = \Lambda^a{}_c(x)\omega_\mu{}^c{}_d(x)\Lambda_b{}^d(x) + \Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu(\Lambda_b{}^c(x))$$

Escribiendo la transformación de Lorentz a primer orden como $\Lambda^a{}_b = (e^\theta)^a{}_b = \delta_b^a + \theta^a{}_b + \dots$ con $\theta_{ab} = -\theta_{ba}$ usando (39) resulta

$$\tilde{\omega}_\mu{}^{ab} \approx \omega_\mu{}^{ab} - \mathcal{D}_\mu \theta^{ab} + \dots \quad (41) \quad \boxed{\text{1od}}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \theta^{ab} &\equiv \partial_\mu \theta^{ab} + [\omega_\mu, \theta]^{ab} \\ &= \partial_\mu \theta^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \theta^{cb} - \theta^{ac} \omega_\mu{}^c{}_b \end{aligned}$$

- . **Compatibilidad métrica:** es fácil mostrar que definiendo¹⁰

$$\omega_\mu{}^{ab}[e, \Gamma] \equiv g^{\rho\nu} e_\rho^a(e_\nu^b)_{;\mu} \quad \text{donde} \quad (e_\nu^b)_{;\mu} = \nabla_\mu e_\nu^b = \partial_\mu e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\nu^b \quad (42) \quad \boxed{\text{vp}}$$

se verifica la ley de transformación (41). En el contexto de gravedad como teoría de gauge del grupo de Lorentz y de $GL(n, \mathbb{R})$ (difeos), no existe relación entre Γ y $\boldsymbol{\omega}$, son campos de gauge independientes!¹¹ Luego, al postular (42) relacionamos los campos de gauge Γ y $\boldsymbol{\omega}$. De esta manera reducimos los grados de libertad de $(e^a, \boldsymbol{\omega}, \Gamma) \rightarrow (e^a, \boldsymbol{\omega})$ y recuperamos la formulación de Einstein-Cartan (ver footnote 12). Definiendo una derivada covariante bajo diffeos y TLL (Γ_μ, ω_μ los correspondientes campos de gauge)

$$\mathfrak{D}_\mu e_\nu^a \equiv \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu^b$$

¹⁰En virtud de $g^{\rho\nu} e_\rho^a e_\nu^b = \eta^{ab} \rightsquigarrow g^{\rho\nu}(e_\rho^a)_{;\mu} e_\nu^b + g^{\rho\nu} e_\rho^a (e_\nu^b)_{;\mu} = 0$. La conexión de spin es antisimétrica en (a, b) .

¹¹Esto es bien distinto a lo que sucede en la formulación de Cartan (ver (12)).

Podemos reinterpretar (42) como la solución de¹²

$$\text{vierbein postulate : } \mathfrak{D}_\mu e_\nu^a = 0 \quad (44) \quad \boxed{\text{Vp}}$$

Recuperando RG: podemos simplificar aún mas la teoría eliminando el grado de libertad asociado a la torsión. Entendiendo a $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en (42) como la conexión de Levi-Civita $\Gamma = \Gamma(g)$, y a la métrica como la función de las tétradas definida por (34) tenemos que $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(e^a) \rightsquigarrow \omega_\mu^{ab}[e^a]$. La definición (42), entonces, elimina a ω^{ab} como variable independiente (\equiv torsión cero).

. **Curvatura y Torsión:** calculando el conmutador de derivadas covariantes Lorentz obtenemos (cf. (16))

$$[D_m, D_n] = - \underbrace{T^a_{mn}}_{\text{torsión}} D_a + \frac{1}{2} \underbrace{R^ab_{mn}}_{\text{curvatura}} M_{ab} \quad (45) \quad \boxed{\text{commut}}$$

donde

$$\begin{aligned} T^a_{mn} &= -e_\rho^a (e_m^\nu (D_\nu e_n^\rho) - e_n^\nu (D_\nu e_m^\rho)) \\ R^ab_{mn} &= e_m^\mu e_n^\nu R^ab_{\mu\nu}(\omega) \end{aligned} \quad (46) \quad \boxed{\text{tor}}$$

El postulado de vierbein (44) nos permite reemplazar $D_\nu e_n^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu e_n^\rho$ en (46),

$$\begin{aligned} T^a_{mn} &= e_\mu^a (e_m^\nu e_n^\rho - e_n^\nu e_m^\rho) \Gamma_{\nu\rho}^\mu \\ &= e_\mu^a e_m^\nu e_n^\rho (\Gamma_{\nu\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu}^\mu) \end{aligned} \quad (47) \quad \boxed{\text{tor2}}$$

En cuanto a la curvatura, en componentes

$$\begin{aligned} R^ab_{\mu\nu}(\omega) &= \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{ab} \\ &= \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^a{}_c \omega_\nu^{cb} - \omega_\nu^a{}_c \omega_\mu^{cb} \end{aligned}$$

Del conmutador observamos que el tensor de Riemann es el field strength del grupo de Lorentz

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R^ab_{\mu\nu} M_{ab} \leftrightarrow F_{\mu\nu}^a t_a = F_{\mu\nu}$$

. **Tensor de Torsión:**

$$T^a \equiv D^a_b e^b = de^a + \omega^a_b \wedge e^b$$

. **Tensor de curvatura:**

$$\begin{aligned} R^ab &\equiv D^a_c \omega^{cb} \\ &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \end{aligned} \quad (48)$$

. **Tensor de Ricci y escalar de curvatura:** de ahora en mas se interpreta E_a^μ como las matrices inversas de e_μ^a

$$R^b_\nu = e_a^\mu R^ab_{\mu\nu}, \quad R = e_a^\mu e_b^\nu R^ab_{\mu\nu}$$

. **Dinámica:** la teoría de la RG (compatible con la métrica y torsión cero) en el contexto de tétradas se formula como

$$\begin{aligned} S[e^a, \omega^{ab}] &= \int d^n x \mathbf{R}^{a_1 a_2}(\omega) \wedge e^{a_3} \wedge \dots \wedge e^{a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} \\ &= \int d^n x e e_a^\mu e_b^\nu R^ab_{\mu\nu}(\omega) \end{aligned}$$

donde $e = \det e_\mu^a$ y e_b^μ deben ser entendidos como las inversas de e_μ^a (cf. (36)-(37)),

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$$

La formulación de tétradas hace uso de $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$, tensor invariante de Lorentz.

EC

¹² La formulación de tétradas contiene una estructura adicional, *i.e.* η_{ab} , si la comparamos con la de Cartan. Puesto que

$$\omega^{ab} = -\omega^{ba} \Rightarrow \mathfrak{D}_\mu \eta_{ab} = 0 \quad (43) \quad \boxed{\text{sAs}}$$

Esta última condición junto con (44) conduce a

$$\mathfrak{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \rightsquigarrow \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

concluimos que el Postulado de vierbein (44) es equivalente a gravedad de Einstein-Cartan (Cartan+ eqrefcm).

Ejercicios

1. Mostrar que las TLL (8) generan una nueva base ortogonal.
2. Mostrar que el tensor de contorsión K satisface

$$K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda} \quad \text{siendo} \quad K_{\lambda\mu\nu} \equiv g_{\lambda\rho} K^{\rho}_{\mu\nu}$$

3. Derivadas covariante Lorentz D_a y covariante diffeos ∇_μ
 - (a) Representación vectorial: Verificar que $(M_{ab})^c_d = \delta_a^c \eta_{bd} - \delta_b^c \eta_{ad}$ satisfacen (32).
 - (b) Representación espinorial: Verificar que $(M_{ab})^\alpha_\beta = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]^\alpha_\beta$ satisfacen (32)¹³.
 - (c) A partir de que e_μ^a es un vector bajo Lorentz transformando según la irrep del item (a), mostrar que

$$D_\mu e_\nu^a = (\partial_\mu + \omega_\mu) e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b$$

- (d) Verificar los signos de (45) y la consistencia con (16).
 - (e) Verificar las identidades de Bianchi (17).
4. Postulado de vierbein:
 - (a) Mostrar que (44) es equivalente a poder convertir índices planos en curvos indistintamente antes o después de derivar

$$\mathfrak{D}_\mu e_\nu^a = 0 \quad \leftrightarrow \quad e_\nu^a \nabla_\mu \xi^\nu = D_\mu \xi^a$$

donde $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ (Christoffell) y $D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu$ (spin conexión).

- (b) Mostrar usando el item (a) que

$$R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega) = e_\alpha^a e^{b\beta} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma)$$

5. Maximalmente simétrico: Considerar el espacio-tiempo d -dimensional

$$ds^2 = e^{2\lambda r} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)}} \quad (49) \quad \boxed{\text{mm}}$$

- (a) Mostrar que la conexión de espín que resulta de torsión nula para $e^\mu = e^{\lambda r} dx^\mu$ y $e^r = dr$ es

$$\omega^{\underline{\mu r}} = \lambda e^\mu, \quad \omega^{\underline{\mu\nu}} = 0$$

donde $a = (\underline{\mu}, r)$ denotan índices en el espacio tangente.

- (b) Mostrar que la 2-forma de curvatura resulta

$$R^{ab} = -\lambda^2 e^a \wedge e^b$$

de manera que el tensor de Riemann es maximalmente simétrico

$$R_{abcd} = -\lambda^2 (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc})$$

Este resultado era esperado pues la métrica (49) describe AdS_d con tensor de Ricci $R_{ab} = -\lambda^2 (d-1) \eta_{ab}$

6. Ecuación de Dirac: resolverla en la esfera S^2, S^3 y en AdS_{d+1} .
7. Derivadas covariantes, Matrices gamma, en fin ... índices

Hemos introducido tres derivadas covariantes: $D = \partial + \omega$ Lorentz, $\nabla = \partial + \Gamma$ diffeos, $\mathfrak{D} = \partial + \omega + \Gamma$ Lorentz+difeo. El postulado de vierbein nos garantiza que la derivada actuando sobre tensores (spín entero) puede ser calculada indistintamente en base local del espacio tangente (ab) o en base coordenada ($\mu\nu$) (ver ej. 4). En cuanto a los campos de spín semientero es ineludible usar el espacio tangente.

¹³La estructura de índices de las matrices gamma es $\gamma_\mu = (\gamma_\mu)^\alpha_\beta$

Podemos pensar que siempre actuamos con \mathfrak{D}_μ y que esta actuará apropiadamente dependiendo de los índices del tensor, a saber

$$\mathfrak{D}_\mu V^\rho = \nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu \quad (50) \quad \boxed{\text{covD}}$$

pero asimismo

$$\mathfrak{D}_\mu V^a = D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b \quad (51) \quad \boxed{\text{covL}}$$

Las expresiones (50) y (51) son equivalentes en virtud de (44),

$$\nabla_\mu V^\rho = \mathfrak{D}_\mu V^\rho = \mathfrak{D}_\mu (e_a^\rho V^a) = e_a^\rho \mathfrak{D}_\mu V^a = e_a^\rho D_\mu V^a$$

Algunos ejemplos son (suprimiendo el índice espinorial)

$$\text{Espinor : } \quad \mathfrak{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} \gamma_{ab} \psi, \quad \text{donde } \gamma_{ab} = \frac{1}{2} [\gamma_a, \gamma_b] \quad (52) \quad \boxed{\text{spin}}$$

$$\begin{aligned} \text{Rarita-Schwinger : } \quad \mathfrak{D}_\mu \psi_\nu &= \partial_\mu \psi_\nu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} \gamma_{ab} \psi_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \psi_\rho \\ \mathfrak{D}_\mu \psi_a &= \partial_\mu \psi_a + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{cd} \gamma_{cd} \psi_a + \omega_{\mu a}{}^b \psi_b \end{aligned} \quad (53)$$

(a) A partir de la ley de transformación de un espinor (52) derivar la ley para el espinor barrado

$$\mathfrak{D}_\mu \bar{\eta} = \bar{\eta} (\bar{\partial}_\mu - \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} \gamma_{ab})$$

Ayuda: construir el escalar $\phi = \bar{\eta} \psi$, luego $\mathfrak{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi = (\mathfrak{D}_\mu \bar{\eta}) \psi + \bar{\eta} (\mathfrak{D}_\mu \psi) \rightsquigarrow$ despejar.

(b) Mostrar que

$$\mathfrak{D}_\mu \gamma^\rho = \partial_\mu \gamma^\rho + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} [\gamma_{ab}, \gamma^\rho] + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \gamma^\nu \quad (54) \quad \boxed{\text{MG}}$$

Ayuda: construir el vector $V^\mu = \bar{\eta} \gamma^\mu \psi$ y proceder como en el ítem anterior.

(c) Mostrar que

$$[\gamma_{ab}, \gamma_c] = 2(\gamma_a \eta_{bc} - \gamma_b \eta_{ac})$$

Usando este resultado evaluar el conmutador de matrices gamma en (54) y concluir que

$$\mathfrak{D}_\mu \gamma_\nu = \partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \gamma_\rho + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} e_{b\nu} \gamma_a$$

Introduciendo en esta ecuación la relación $\gamma_\nu = e_\nu^a \gamma_a$ hallar que

$$\mathfrak{D}_\mu (e_\nu^a \gamma_a) = \gamma_a (\underbrace{\partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu^b}_{\mathfrak{D}_\mu e_\nu^a = 0 \text{ veirbein post. (44)}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathfrak{D}_\mu \gamma_a = 0}$$