Various attempts have been made to set up a standard terminology in this branch of mathematics involving only the vectors themselves and not their components, analogous to that of vectors in vector analysis. This is highly expedient in the latter but very cumbersome for the much more complicated framework of the tensor calculus. In trying to avoid continual reference to the components we are obliged to adopt an endless profusion of names and symbols in addition to an intricate set of rules for carrying out calculations, so that the balance of advantage is considerably on the negative side. An emphatic protest must be entered against these orgies of formalism which are threatening the peace of even the technical scientist.

—H. Weyl (**Space, Time, Matter**)

Gradiente, Rotor y Divergencia vs. Geometría diferencial en $\mathbb{R}^3$

De dónde salen los factores $r, \sin\theta$... mutiplicando las componentes de $\boldsymbol{A}$ al calcular el rotor y la divergencia en polares y cilíndricas?

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\Big(\partial_\theta(A_\varphi \sin\theta) - \partial_\varphi A_\theta\Big)\,\check{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi A_r - \partial_r(rA_\varphi)\right)\check{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\Big(\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\Big)\,\check{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

A continuación mostraremos que las expresiones para $\nabla\phi$, $\mathsf{rot}\mathbf{A}$, $\mathsf{div}\mathbf{V}$ usuales en $\mathbb{R}^3$ se corresponden con $\boldsymbol{d}\phi$, $*\boldsymbol{dA}_1$ y $\boldsymbol{dV}_2$ calculados en bases no holónomas (ortonormales) definidas a partir de las bases coordenadas.

El tensor de campo electromagnético $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$ es una 2-forma que se construye a partir del campo de gauge $\boldsymbol{A}$ (1-forma, índices abajo). En 3d el dual de Hodge $*$ transforma $\boldsymbol{F}$ (2-forma) en una 1-forma $\boldsymbol{B} = *\boldsymbol{F}$ a la que llamamos campo magnético.

—

Vectores y 1-formas: en geometría diferencial, dada una variedad $\mathcal{M}$, distinguimos entre vectores $\boldsymbol{A} = A^i\boldsymbol{E}_i \in T_p\mathcal{M}$ que pertenecen al espacio tangente en p (vectores contravariantes) y 1-formas $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i\,\boldsymbol{e}^i \in T_p^\star\mathcal{M}$ que pertencen al espacio cotangente en p (vectores covariantes)[1]. Extendemos luego los vectores y 1-formas a ser campos definidos $\forall p$ sobre la variedad

$$\boldsymbol{A} = A^i(x)\,\boldsymbol{E}_i\ , \qquad \boldsymbol{\alpha}(x) = \alpha_i(x)\,\boldsymbol{e}^i$$

La elección de bases en cada punto $p \in \mathcal{M}$ de la variedad es arbitraria.

Al coordenatizar $\mathcal{M}$ localmente con x^i tenemos una base natural en $T_p\mathcal{M}$ dada por $\boldsymbol{\partial}_i$. Su base dual en $T_p^\star\mathcal{M}$ se denota $\boldsymbol{d}x^i$ y satisface

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}x^i(\boldsymbol{\partial}_j) = \delta_i^j \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{V}) &= \alpha_i\,\boldsymbol{d}x^i(V^i\boldsymbol{\partial}_j) \\ &= \alpha_i V^j \delta^i_j = \alpha_i V^i \end{aligned} \tag{2}$$

Wedge/Exterior product: definido como un producto antisimétrico $\wedge$ entre los elementos de la base

$$\boldsymbol{d}x^i \wedge \boldsymbol{d}x^j = -\boldsymbol{d}x^j \wedge \boldsymbol{d}x^i$$

a veces, el símbolo $\wedge$ no se escribe y el producto de diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{x}^i$ debe ser entendido como antisimétrico. La propiedad de antisimetría de los $\boldsymbol{d}x^i$ se conoce como carácter Grassmann de los $\boldsymbol{d}x^i$.

Este producto permite multiplicar 1-formas entre sí, de manera que extendemos las 1-formas a p-formas

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{p!}\,\omega_{i_1\ldots i_p}\boldsymbol{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{d}x^{i_p}$$

Debido a la antisimetría solo existen p-formas con $0 \le p \le dim(\mathcal{M})$. Los coeficientes $\omega_{i_1\ldots i_p}$ son completamente antisimétricos en los índices i_n.

Derivada exterior: veremos ahora cómo nuestro viejo conocido operador nabla $\boldsymbol{\nabla}$ en $\mathbb{R}^3$ se relaciona con el operador derivada exterior $\boldsymbol{d}$,

$$\boxed{\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}x^i\,\partial_i}$$

[1] Las 1-formas son funcionales lineales sobre el escacio de vectores: $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{V}) \in \mathbb{R}$. Asumimos que las bases $\{\boldsymbol{E}_i\}$ y $\{\boldsymbol{e}^i\}$ son duales, $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{E}_j) = \delta^i_j$

Actuando sobre una p-forma $\boldsymbol{\omega}_p$ este operador da origen a la $(p+1)$-forma

$$\boldsymbol{d\beta}_p = \frac{1}{p!}(\boldsymbol{d}x^i\,\partial_i)\beta_{i_1\ldots i_p}\wedge \boldsymbol{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge \boldsymbol{d}x^{i_p} = \frac{1}{p!}(\partial_i\beta_{i_1\ldots i_p})\,\boldsymbol{d}x^i\wedge \boldsymbol{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge \boldsymbol{d}x^{i_p}$$

El producto wedge automáticamente antisimetriza el coeficiente. Aquí usamos la propiedad

$$\boldsymbol{d}^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathsf{rot}\;(\mathsf{grad} f) = 0, \quad \mathsf{div}(\mathsf{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$$

Todo lo que discutimos hasta ahora no requiere de la existencia de una métrica sobre la variedad.

Ejemplo: la acción de $\boldsymbol{d}$ sobre 0-,1-,2- y 3-formas definidas sobre $\mathbb{R}^3$ es

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega(x,y,z) \;\rightsquigarrow\; \boldsymbol{d\omega}_0 = \partial_x\omega\,\boldsymbol{d}x + \partial_y\omega\,\boldsymbol{d}y + \partial_z\omega\,\boldsymbol{d}z$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1 &= \omega_x(x,y,z)\,\boldsymbol{d}x + \omega_y(x,y,z)\,\boldsymbol{d}y + \omega_z(x,y,z)\,\boldsymbol{d}z\\ &\rightsquigarrow\; \boldsymbol{d\omega}_1 = (\partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x)\,\boldsymbol{d}x\boldsymbol{d}y + (\partial_y\omega_z - \partial_z\omega_y)\,\boldsymbol{d}y\boldsymbol{d}z + (\partial_z\omega_x - \partial_x\omega_z)\,\boldsymbol{d}z\boldsymbol{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_2 &= \omega_{xy}(x,y,z)\,\boldsymbol{d}x\boldsymbol{d}y + \omega_{yz}(x,y,z)\,\boldsymbol{d}y\boldsymbol{d}z + \omega_{zx}(x,y,z)\,\boldsymbol{d}z\boldsymbol{d}x\\ &\rightsquigarrow\; \boldsymbol{d\omega}_2 = (\partial_x\omega_{yz} + \partial_y\omega_{zx} + \partial_z\omega_{xy})\boldsymbol{d}x\boldsymbol{d}y\boldsymbol{d}z\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \omega_{xyz}(x,y,z)\,\boldsymbol{d}x\boldsymbol{d}y\boldsymbol{d}z \quad\rightsquigarrow\quad \boldsymbol{d\omega}_3 = 0$$

Métrica: funcional bilineal simétrica, definida positiva sobre el espacio de vectores $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\mathbb{R}$. La linealidad implica que es suficiente conocer su acción sobre una base del espacio,

$$\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_j = \langle\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{E}_j\rangle = g(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{E}_j) = g_{ij} \quad\rightsquigarrow\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{g}(A^i\boldsymbol{E}_i, B^j\boldsymbol{E}_j) = A^iB^jg_{ij}$$

Contar con una métrica sobre $\mathcal{M}$ permite establecer una biyección entre vectores y 1-formas, que entonces pasan a interpretarse como distintas versiones de un único objeto $\mathbf{V}$ con componentes covariantes o contravariantes. Las componentes inversas de la métrica definen un tensor $\binom{2}{0}$ que denotamos como $\boldsymbol{g}^{-1}$

$$g_{ij}\,g^{jk} = \delta_i^k$$

Para el par de bases duales $\{\boldsymbol{E}_i\}$ y $\{\boldsymbol{e}^i\}$ tenemos

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i\boldsymbol{e}^i \qquad \overset{\boldsymbol{g}^{-1}}{\underset{\boldsymbol{g}}{\leftrightarrow}} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \alpha^i\boldsymbol{E}_i$$

donde $\alpha^i = g^{ij}\alpha_j$ y viceversa $\alpha_i = g_{ij}\alpha^j$

Bases ortonormales y bases no holónomas:

Desde el punto de vista de geometría diferencial, la aparición de los factores de escala en las expresiones usuales para el grad, rot y div en coordendas curvilíneas (cf. (1)) se debe a la elección de bases ortogonales para la descomposición de los vectores. Las coordenadas curvilíneas polares y esfericas son ortogonales, esto es, los vectores normales a cada superficie $x^i = cte$ son ortogonales entre si $\forall p$, sin embargo, algunos de ellos no resultan unitarios. A modo de ejemplo, la métrica euclídea en coordenadas esféricas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

toma la forma

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{d}r\otimes\boldsymbol{d}r + r^2\boldsymbol{d}\theta\otimes\boldsymbol{d}\theta + r^2\sin^2\theta\boldsymbol{d}\varphi\otimes\boldsymbol{d}\varphi.$$

De manera que

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\partial}_r|^2 &= \boldsymbol{\partial}_r\cdot\boldsymbol{\partial}_r = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_r,\boldsymbol{\partial}_r) = 1 & & |\boldsymbol{d}r|^2 = \boldsymbol{d}r\cdot\boldsymbol{d}r = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{d}r,\boldsymbol{d}r) = 1\\ |\boldsymbol{\partial}_\theta|^2 &= \boldsymbol{\partial}_\theta\cdot\boldsymbol{\partial}_\theta = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\theta,\boldsymbol{\partial}_\theta) = r^2 & \leftrightarrow\quad & |\boldsymbol{d}\theta|^2 = \boldsymbol{d}\theta\cdot\boldsymbol{d}\theta = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{d}\theta,\boldsymbol{d}\theta) = 1/r^2\\ |\boldsymbol{\partial}_\varphi|^2 &= \boldsymbol{\partial}_\varphi\cdot\boldsymbol{\partial}_\varphi = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\varphi,\boldsymbol{\partial}_\varphi) = r^2\sin^2\theta & & |\boldsymbol{d}\varphi|^2 = \boldsymbol{d}\varphi\cdot\boldsymbol{d}\varphi = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{d}\varphi,\boldsymbol{d}\varphi) = 1/r^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

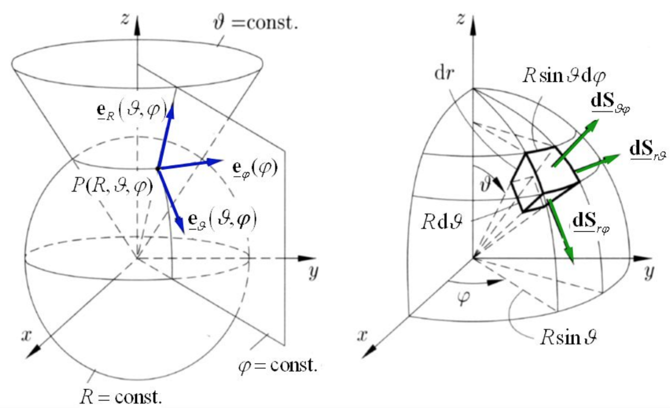

Figure 1: Izq: los versores unitarios $\check{\mathbf{r}}, \check{\boldsymbol{\theta}}, \check{\boldsymbol{\phi}}$ son ortogonales a las superficies (esferas, plano y cono) que definen las coordenadas r, ϕ, θ. Der: paralelepípiedo que define el elemento de volumen *orientado* $\sqrt{g}\,\boldsymbol{d}r\boldsymbol{d}\theta\boldsymbol{d}\varphi = r^2 \sin\theta\, \boldsymbol{d}r\boldsymbol{d}\theta\boldsymbol{d}\varphi$. La orientación queda determinada al elegir $\epsilon^{r\theta\varphi} = +1$

Resulta conveniente en física elegir bases ortonormales $\{\check{\mathbf{e}}^a\}$ de $T^\star\mathcal{M}$[2]

$$\begin{aligned} &\check{\mathbf{e}}^r = \boldsymbol{d}r, \quad \check{\mathbf{e}}^\theta = r\boldsymbol{d}\theta, \quad \check{\mathbf{e}}^\varphi = r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\varphi \quad \rightsquigarrow \quad && \boldsymbol{g} = \check{\mathbf{e}}^r \otimes \check{\mathbf{e}}^r + \check{\mathbf{e}}^\theta \otimes \check{\mathbf{e}}^\theta + \check{\mathbf{e}}^\varphi \otimes \check{\mathbf{e}}^\varphi \\ &\check{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\partial}_r, \quad \check{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{r}\boldsymbol{\partial}_\theta, \quad \check{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{\partial}_\varphi && \quad = \delta_{ab}\,\check{\mathbf{e}}^a \otimes \check{\mathbf{e}}^b \end{aligned} \tag{3}$$

Usualmente se omite el símbolo ˇ de las tétradas y se la denota simplemente por $\boldsymbol{e}^a$.

Las componentes del campo de gauge (1-forma) en base ortonormal se relacionan con las componentes en base coordenada según

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_i\boldsymbol{d}x^i = A_r\boldsymbol{d}r + A_\theta\boldsymbol{d}\theta + A_\varphi\boldsymbol{d}\varphi \\ &= \check{A}_i\check{\mathbf{e}}^i = \check{A}_r\check{\mathbf{e}}^r + \check{A}_\theta\check{\mathbf{e}}^\theta + \check{A}_\varphi\check{\mathbf{e}}^\varphi \quad \rightsquigarrow \quad A_r = \check{A}_r, \quad A_\theta = r\check{A}_\theta, \quad A_\varphi = r\sin\theta\check{A}_\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

El vector campo de gauge obtenido subiendo los índices $\check{A}^a = \delta^{ab}\check{A}_b = \check{A}_a$ resulta

$$\boldsymbol{A} = \check{A}^a\check{\mathbf{x}}_a = \check{A}_r\check{\mathbf{r}} + \check{A}_\theta\check{\boldsymbol{\theta}} + \check{A}_\varphi\check{\boldsymbol{\varphi}} \tag{5}$$

Asimismo la derivada exterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{d}x^i\partial_i = \boldsymbol{d}r\,\partial_r + \boldsymbol{d}\theta\,\partial_\theta + \boldsymbol{d}\varphi\partial_\varphi \\ &= \check{\mathbf{e}}^r\,\partial_r + \check{\mathbf{e}}^\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \check{\mathbf{e}}^\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi \end{aligned} \tag{6}$$

• Gradiente $\boldsymbol{\nabla} f$: vector asociado a la 1-forma obtenida como derivada exterior sobre la 0-forma f

$$\boldsymbol{d}f = \partial_i f\,\boldsymbol{d}x^i$$

Si lo reexpresamos en una base ortonormal tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}f &= (df)_a\,\check{\mathbf{e}}^a \\ &= \partial_r f\,\check{\mathbf{e}}^r + \frac{1}{r}\partial_\theta f\,\check{\mathbf{e}}^\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\,\check{\mathbf{e}}^\varphi \end{aligned}$$

Hasta aquí la 1-forma de componentes $(df)_a$ subiendo los índices obtenemos el vector gradiente. Puesto que la base es ortonormal las componentes coinciden

$$\textsf{Gradiente :} \qquad \textsf{grad}\, f \equiv (\nabla f)^a = \delta^{ab}(df)_b = (df)_a$$

[2] Una base del cotangente ortogonal resulta en que las componentes de la métrica son δ_{ab}. Dichas bases se conocen con el nombre de veirbein o tétradas.

luego

$$\boldsymbol{\nabla} f = \partial_r f\, \check{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta f\, \check{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\, \check{\boldsymbol{\varphi}}$$

• Rotor $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$: Hodge dual de la curvatura $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$

$$\text{Curvatura :} \qquad \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{dA} = \partial_i A_j \underbrace{\boldsymbol{d}x^i \boldsymbol{d}x^j}_{=-\boldsymbol{d}x^j \boldsymbol{d}x^i} = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\boldsymbol{d}x^i \boldsymbol{d}x^j$$

En la base ortogonal toma la forma usando (3) y (4)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (\partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r)\,\boldsymbol{d}r\boldsymbol{d}\theta + (\partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta)\,\boldsymbol{d}\theta\boldsymbol{d}\varphi + (\partial_\varphi A_r - \partial_r A_\varphi)\,\boldsymbol{d}\varphi\boldsymbol{d}r \\ &= \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\check{A}_\theta) - \partial_\theta \check{A}_r\right)\check{\mathbf{e}}^r\check{\mathbf{e}}^\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\theta(\sin\theta\,\check{A}_\varphi) - \partial_\varphi\check{A}_\theta\right)\check{\mathbf{e}}^\theta\check{\mathbf{e}}^\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\varphi\check{A}_r - \partial_r(r\sin\theta\,\check{A}_\varphi)\right)\check{\mathbf{e}}^\varphi\check{\mathbf{e}}^r \quad (7)\end{aligned}$$

En una variedad de dimension dim $\mathcal{M} = m$ equipada con una métrica $\boldsymbol{g}$ el dual de Hodge $*$ define un isomorfismo entre los espacios de r- y $(m-r)$-formas

$$\text{Hodge dual :} \qquad * : \Omega^r(\mathcal{M}) \to \Omega^{m-r}(\mathcal{M})$$

definido por

$$*(\boldsymbol{d}x^{i_1} \wedge \boldsymbol{d}x^{i_2} ... \wedge \boldsymbol{d}x^{i_r}) = \frac{\sqrt{g}}{(m-r)!}\epsilon^{i_1 i_2 ... i_r}{}_{j_{r+1}...j_m}\boldsymbol{d}x^{j_{r+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{d}x^{j_m}$$

donde $\epsilon_{ij...}$ es el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico[3]

$$\epsilon_{i_1...i_m} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1...i_m) \text{ es una permutación par de } (123..m) \\ -1 & \text{si } (i_1...i_m) \text{ es una permutación impar de } (123..m) \\ 0 & \text{otherwise, i.e índices repetidos}\end{cases}$$

La operación de dualidad en una base ortonormal (tétradas) resulta simplemente dado que $g_{ab} = \delta_{ab}$

$$*(\check{\mathbf{e}}^{a_1} \wedge ... \wedge \check{\mathbf{e}}^{a_r}) = \frac{1}{(m-r)!}\epsilon^{a_1...a_r}{}_{a_{r+1}...a_m}\check{\mathbf{e}}^{a_{r+1}} \wedge ... \wedge \check{\mathbf{e}}^{a_m}$$

Resulta ahora inmediato calcular el Hodge dual de (7). Usando $\epsilon^{r\theta\varphi} = +1$

$$*\boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\check{A}_\theta) - \partial_\theta\check{A}_r\right)\check{\mathbf{e}}^\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\theta(\sin\theta\,\check{A}_\varphi) - \partial_\varphi\check{A}_\theta\right)\check{\mathbf{e}}^r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\varphi\check{A}_r - \partial_r(r\sin\theta\,\check{A}_\varphi)\right)\check{\mathbf{e}}^\theta$$

Subiendo el índice de las componentes obtenemos el rotor en esféricas (cf. (1))

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\theta(\sin\theta\,\check{A}_\varphi) - \partial_\varphi\check{A}_\theta\right)\check{\mathbf{r}} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\varphi\check{A}_r - \partial_r(r\sin\theta\,\check{A}_\varphi)\right)\check{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\check{A}_\theta) - \partial_\theta\check{A}_r\right)\check{\boldsymbol{\varphi}}$$

aquí $\check{A}_a$ son las componentes del vector $\boldsymbol{A}$ en la base unitaria.

Ejercicio:

Divergencia $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}$ en $\mathbb{R}^3$: mostrar que se relaciona con $\boldsymbol{dV}_2$, reexpresando $\boldsymbol{V}_2$ como $\boldsymbol{V}_2 = *\boldsymbol{V}_1$.

[3] Recordemos que $*1$ es el elemento de volumen invariante

$$*1 = \frac{\sqrt{g}}{m!}\epsilon_{i_1...i_m}\boldsymbol{d}x^{i_1} \wedge \boldsymbol{d}x^{i_2} ... \wedge \boldsymbol{d}x^{i_m} = \sqrt{g}\,\boldsymbol{d}x^1 \wedge \boldsymbol{d}x^2 ... \wedge \boldsymbol{d}x^m$$