Introducción a la Relatividad General - 2019 **GA Silva - D Pérez**
Departamento de Física - UNLP silva@fisica.unlp.edu.ar
daniela.perez2812@gmail.com

Práctica Extra v1 2020/03/28

1. Superficies embebidas y métricas inducidas: Considere la superficie de revolución formada girando la gráfica $y = f(x)$ alrededor del eje x. Encuentra un conjunto adecuado de coordenadas para describir la superficie. Luego encuentre la métrica, las geodésicas y el tensor de curvatura.

2. Producto interior: es el nombre fancy para la acción de contraer un índice de una forma con un vector, reduciendo el orden de la forma, $i_{\boldsymbol{X}} : \Omega^r(\mathcal{M}) \to \Omega^{r-1}(\mathcal{M})$ donde $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Se define como

$$i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{r-1}) \doteq \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{r-1})$$

En una base coordenada

$$i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{r-1}) = \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{\nu\mu_2\ldots\mu_r} \boldsymbol{d}x^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{d}x^{\mu_r}$$

(a) La derivada de Lie de una forma se puede escribir en términos del producto interior como

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{d}i_{\boldsymbol{X}} + i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{d})\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

Verificar esta expresión para $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{M})$

(b) Mostrar que siendo $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^r(\mathcal{M})$ y $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$:

. La contracción es nilpotente $i^2_{\boldsymbol{X}} = 0$.

. Satisface anti-derivación: $i_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\eta}) = i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\eta} + (-)^r \boldsymbol{\omega} \wedge i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\eta}$.

. Usando la nilpotencia mostrar que $\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega} = i_{\boldsymbol{X}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}$

3. Dual de Hodge: Sean $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta} \in \Omega^p(\mathcal{M})$, mostrar que $\boldsymbol{\omega} \wedge *\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \wedge *\boldsymbol{\omega} \Rightarrow (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega})$

4. Mecánica Hamiltoniana:

On a symplectic manifold, as on a Riemannian manifold, there is a natural isomorphism between vector fields and 1-forms. A vector field on a symplectic manifold corresponding to the differential of a function is called a hamiltonian vector field. A vector field on a manifold determines a phase flow, i.e., a one-parameter group of diffeomorphisms. The phase flow of a hamiltonian vector field on a symplectic manifold preserves the symplectic structure of phase space.

V Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, cap.8.

El espacio de las fases de mecánica clásica de la formulación Hamiltoniana es una variedad $2n$-dimensional parametrizada por coordenadas $x^\mu = (p_i, q^i)$. Allí podemos definir naturalmente una *2-forma cerrada y no degenerada*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{d}p_i \wedge \boldsymbol{d}q^i$$

Una variedad provista de una forma 2-forma cerrada y no degenerada se convierte en una variedad simpléctica. La forma simpléctica puede ser pensada como una métrica antisimétrica sobre $\mathcal{M}$[1]. Una vez definido un Hamiltoniano H sobre $\mathcal{M}$ queda definida la dinámica del sistema.

(a) Muestre que las ecuaciones de Hamilton son las componentes de la ecuación

$$\boldsymbol{\omega}\left(\ \ ,\frac{d}{dt}\right) = \boldsymbol{d}H \tag{2}$$

donde d/dt es el vector tangente a la curva $\gamma(t) = (p_i(t), q^i(t))$. Mostrar que esta ecuación se puede escribir como

$$i_{\boldsymbol{X}_H}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{d}H$$

donde se suele denotar al vector asociado al flujo hamiltoniano como $\frac{d}{dt} = \boldsymbol{X}_H$.

(b) Mostrar usando (1) y (2) que $\boldsymbol{X}_H$ preserva la forma simpléctica, en el siguiente sentido:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}_H}\boldsymbol{\omega} = 0$$

A partir de este resultado derivar el teorema de Liouville, esto es, la conservación del volumen en el espacio de las fases[2].

Ayuda: la forma de volumen en el espacio de las fases es $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}^n$

(c) Mostrar que la recíproca también es válida, si $\exists\, \boldsymbol{X}$ tal que

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\ H\ /\ \ i_{\boldsymbol{X}_H}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{d}H$$

(d) Conservación de la energía: mostrar que la función H es una cantidad conservada a lo largo del flujo Hamiltoniano definido por H. En otras palabras, el flujo inducido por el Hamiltoniano es a lo largo de las superficies de nivel de H.

5. Termodinámica e identidades de Maxwell: consideremos la ecuación de conservación de la energía para un fluido de una componente

$$\boldsymbol{\delta}Q = p\,\boldsymbol{d}V + \boldsymbol{d}U$$

donde U es la energía interna del fluido y δQ el calor absorbido cuando el fluido realiza trabajo pdV y cambia su energía interna. La idea es interpretar esta ecuación como una relación de 1-formas en una variedad de coordenadas U, V. Donde la función $p(U,V)$ caracteriza el sistema y se denomina ecuación de estado. Ciertamente $\boldsymbol{d}U$ y $\boldsymbol{d}V$ son formas exactas, lo es $\boldsymbol{\delta}Q$? Asumiendo que lo fuera resulta

$$0 = \boldsymbol{d}p\wedge\boldsymbol{d}V \;\rightsquigarrow\; 0 = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V \boldsymbol{d}U + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_U \boldsymbol{d}V\right)\wedge\boldsymbol{d}V \;\rightsquigarrow\; 0 = \left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V \boldsymbol{d}U\wedge\boldsymbol{d}V$$

De manera que una función Q existiría si $(\partial p/\partial U)_V$ fuera nula para todo punto de la variedad, una condición muy rara para un fluido. Por lo tanto

[1] $\boldsymbol{\omega}$ permite subir y bajar índices estableciendo un mapeo $T_p(\mathcal{M}) \to T_p^\star(\mathcal{M})$ denotado como $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{X}\lrcorner\,\boldsymbol{\omega}$. En particular coincide con la operación $i_{\boldsymbol{X}}$ actuando sobre 2-formas: $X\lrcorner\,\boldsymbol{\omega} = i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}$.

[2] Ver *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Arnold, sect. 38.

6. Leyes de Maxwell en notación diferencial:

(a) Mostrar que las leyes de Maxwell en $d = 3+1$ pueden escribirse como

$$\boldsymbol{dF} = 0, \qquad \boldsymbol{d} * \boldsymbol{F} = *\boldsymbol{J}$$

La primera ecuación (resume Faraday + Ausencia de monoplos magnéticos) permite definir el tensor de campo electromagnético $\boldsymbol{F}$ en términos del potencial vector $\boldsymbol{A} = A_\mu \boldsymbol{d}x^\mu$ como $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$. La segunda ecuación resume las ecuaciones de Maxwell con fuentes $\boldsymbol{J} = j_\mu \boldsymbol{d}x^\mu$, esto es Gauss y Ampere-Maxwell.

(b) Expresar la ley de conservación de la carga.

(c) Elegir una hipersuperficie $\mathfrak{H}$ 3d en el espacio de Minkowski e integrar la ecuación de Maxwell con fuentes. Eligiendo convenientemente $\mathfrak{H}$ y aplicando Stokes, hallar las expresiones integrales de las leyes de Gauss y Ampere.

7. Coeficientes de conexión no son un tensor: Considerar un cambio de base local

$$\boldsymbol{E}_a \to \tilde{\boldsymbol{E}}_a = \boldsymbol{E}_b \Lambda^b{}_a, \qquad \boldsymbol{e}^a \to \tilde{\boldsymbol{e}}^a = \boldsymbol{e}^b \Lambda_b{}^a \;\; \text{donde} \;\; \Lambda_d{}^a \Lambda^d{}_b = \delta^a_b$$

en[3]

$$\nabla \tilde{\boldsymbol{E}}_b = \tilde{\boldsymbol{E}}_a \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b$$

Llamando $\Lambda^b{}_a = (\mathsf{\Lambda})^{\mathsf{b}}_{\mathsf{a}}$ y $\Lambda_d{}^c = (\mathsf{\Lambda}^{-1})^{\mathsf{c}}_{\mathsf{d}}$, donde $\mathsf{\Lambda} = \mathsf{\Lambda}(x)$ una matriz cuyo índice superior es fila y el inferior columna, mostrar que[4]

$$\mathsf{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathsf{\Lambda}^{-1} - \mathsf{d}\mathsf{\Lambda}\,\mathsf{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathsf{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\omega}\mathsf{\Lambda} + \mathsf{\Lambda}^{-1}\mathsf{d}\mathsf{\Lambda}$$

Ayuda: Usar Leibniz $\nabla(f\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{d}f + f\,\nabla\boldsymbol{V}$, con $f = \Lambda$ representada como matriz.

8. Conexión simétrica: si la conexión es simétrica, *i.e.* en ausencia de torsión, probar que se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $f_{;\mu;\nu} = f_{;\nu;\mu}$ para cualquier función f.

(b) la derivada de Lie se puede expresar en términos de derivadas covariantes:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}] = \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{V} - \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{L}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{V})^\mu = V^\mu{}_{;\nu}U^\nu - U^\mu{}_{;\nu}V^\nu$$

(c) 2da identidad de Bianchi: $R^\alpha{}_{\beta[\mu\nu;\rho]} = 0$. Demuéstrelo en un sistema de coordenadas que anule la conexión en el evento.

(d) $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = V^\lambda_{;\nu;\mu} - V^\lambda_{;\mu;\nu} = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}V^\rho$

[3]La derivada covariante como tensor $\binom{1}{1}$ se denota

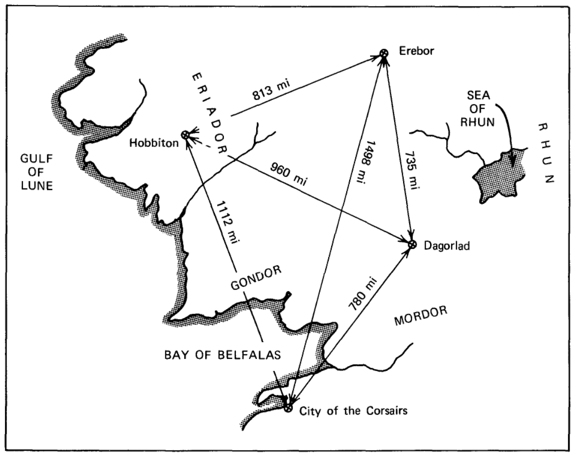
$$\nabla \boldsymbol{E}_b(\cdot, \cdot\cdot) = \boldsymbol{E}_a(\cdot) \otimes \boldsymbol{\omega}^a{}_b(\cdot\cdot), \qquad \nabla \boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{E}_a \otimes \boldsymbol{\omega}^a{}_b$$

[4]Para iluminar la elección en la posición de los índices considerar el espacio de Minkowski en base de coordenadas cartesianas $\boldsymbol{\partial}_\mu$ donde $x^\mu = (t, \vec{x})$ y analizar la acción de un cambio de coordenadas dado por una transformación de Lorentz: $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Este difeomorfismo genera un cambio de base en $T_p(\mathcal{M})$ y $T^*_p(\mathcal{M})$, estudiar su acción sbre las componentes de la métrica $\boldsymbol{\eta} = \eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu \otimes \boldsymbol{d}x^\nu$

9. Geometría curva: Dados N puntos en una superficie, si conocemos las $N(N-1)/2$ distancias entre ellos podemos inferir información acerca de las propiedades intrínsecas de la misma, por ejemplo su curvatura. Alternativamente, si conocemos la métrica sobre la superficie podemos determinar condiciones de consistencia que dichas distancias deben satisfacer.

   Cúantas condiciones de consistencia obtenemos si suponemos una variedad en dos dimensiones con métrica euclídea? Considere el caso con $N = 4$ de la figura, y decida si la Tierra Media puede ser plana.

   Ayuda: Tenga en cuenta las simetrías que dejan invariante la métrica euclíedea en 2D.



—

Referencias:

S Weinberg, *Gravitation.* John Wiley, 1972.