

**Opinion: The Bang-to-Crunch Universe
 Too Simple to be Wrong!**

Spacetime tells mass how to move, and mass tells spacetime how to curve. If the black hole provides our closest plain-speaking witness to spacetime curvature, the Cosmos itself looks like the one operative on the largest scale of space and time. The stars bear witness to the scales of space and time characteristic of the Cosmos. Sun gets its energy by burning hydrogen to helium and some of that helium to heavier elements, profiting from the difference in mass per nucleon between hydrogen and helium: 1.00783 for hydrogen and 1.00065 for helium (in units that set the mass of the most common isotope of carbon equal to 12).

That space is expanding shows most directly in the red shift of light from distant galaxies, a red shift which is greater the more distant the galaxy. The inflation of a balloon (Figure 1) provides a simple model for such an expansion of the Universe. This model tells its story in the functional dependence of the radius $R(t)$ of the sphere on the time t . In this model the curvature of spacetime in the large has only two components. One is the momentary "intrinsic curvature," fixed by the momentary radius $R(t)$ of the idealized three-geometry: $6/R^2(t)$. The other contribution to the curvature arises from the variation of this radius with the cosmological time, t : $(6/R^2)(dR/dt)^2$. Einstein, considering the matter in the days before Hubble had seen and measured the expansion of the Universe, found it natural to think of a closed Universe with an essentially constant radius R .

At this point one comes hard up against the second part of gravitation theory: mass tells spacetime how to curve. In Einstein's time there did not seem to be enough mass around to curve up the Universe into closure. Therefore Einstein postulated an additional source of curvature, a so-called "cosmological constant." Going into the doorway of the Institute for Advanced Study's Fuld Hall with Einstein

and George Gamow, I heard Einstein say to Gamow about the cosmological constant, "That was the biggest blunder of my life." If we drop that term, then the equation in which matter tells spacetime how to curve becomes

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R^2} = \frac{8\pi}{3} \rho$$

This equation forecasts the connection between radius and time depicted by the cycloid in Figure 4 (explanation in the caption to that figure). The Universe begins with a Big Bang. In a phase of gradually slowing expansion, it reaches a maximum radius and recontracts to zero radius—a "big bang" to "big crunch" history.

An article by John Noble Wilford in the Science Times section of the *New York Times* for Tuesday March 3, 1998, reports observations by two separate groups of investigators which they interpret as showing that today the expansion of the Universe is speeding up rather than undergoing the slowdown expected for any approach to maximum expansion. [See box page G-20.] Later that day I encountered a hard-bitten veteran gravitation physics colleague in the elevator of the Princeton physics building and asked him if he believed the purported evidence of accelerating expansion. "No," he replied. Neither do I. Why not? Two reasons: (1) Because the speed-up argument relies too trustingly on the supernovas being standard candles. (2) Because such an expansion would, it seems to me, contradict a view of cosmology too simple to be wrong. Such clashes between theory and experiment have often triggered decisive advances in physics. We can hope that some decisive advance is in the offing.

— John Archibald Wheeler

1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker: Considerar la métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right) \quad (1)$$

donde $k = 0, \pm 1$ y $d\Omega_2^2$ es la métrica de S^2 .

- (a) Calcule todos los símbolos de Christoffel.
- (b) Calcule todas las componentes del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$.
- (c) Calcule la curvatura escalar R .

2. Sección espacial de FLRW:

- (a) Muestre que la sección espacial de la métrica (1) se puede escribir como

$$d\ell^2 = d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega_2^2$$

con $\Sigma(\chi)^2 = \sinh^2 \chi, \chi^2, \sin^2 \chi$ para $k = -1, 0, 1$ correspondiendo a espacios máximalmente simétricos: hiperbólico, euclídeo y esfera.

(b) Mostrar que alternativamente (1) puede escribirse como

$$ds^2 = a(\eta)^2 (-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega_2^2) \quad (2)$$

(c) Mostrar que esta métrica es conformemente plana, es decir que existe un cambio de coordenadas tal que $g_{\mu\nu}(x) = \omega(x)\eta_{\mu\nu}$.

3. Observadores comoving son geodésicos: Considerar observadores comoving, esto es, situados en coordenadas espaciales constantes $x^\mu(t) = (t, r_0, \theta_0, \phi_0)$.

(a) Mostrar que t es un parámetro afín para esta trayectoria.

(b) Mostrar que $\mathbf{u} = \partial_t$ es geodésico

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$$

De manera que esta clase de observadores está en caída libre.

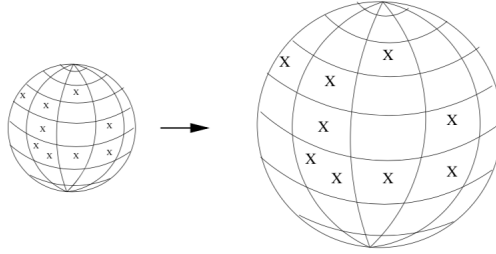


Figura 1: Densidad comoving vs densidad propia: si bien la superficie de la esfera (sección espacial del *universo*) se expande, las galaxias X no modifican sus coordenadas espaciales. Las trayectorias de las mismas resultan geodésicas y, por lo tanto las galaxias X están en caída libre. La figura pretende manifestar que es el número de partículas por unidad de volumen comoving el que se conserva y no dicho número por unidad de volumen propio.

4. $\Lambda > 0$ y repulsión gravitatoria (antigravedad): considerar el límite de campo débil de la ecuación de Einstein para constante cosmológica no nula. Mostrar que

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2$$

Hallar la solución de esta ecuación para un cuerpo esférico de masa M . El campo gravitatorio resulta

$$\vec{g} = -\nabla\phi = -\frac{GM}{r^2}\vec{r} + \frac{c^2\Lambda r}{3}\vec{r}$$

Concluir que una constante cosmológica positiva da origen a una repulsión gravitatoria que aumenta linealmente con r .

5. Cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker: La geometría de un universo espacialmente homogéneo e isotrópico en todo punto está descrita por la métrica (1) con $k = -1, 0, 1$. Así, el universo resulta abierto, marginalmente abierto o cerrado,

respectivamente. La materia en el universo puede modelarse como un fluido perfecto, cuyo tensor de energía-momento viene dado por:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu},$$

donde ρ representa la densidad de energía del fluido cosmológico y p su presión. La cuadrivelocidad del fluido consistente con isotropía espacial viene dada por:

$$\mathbf{u} = \partial_t.$$

- (a) Utilizando los resultados del ejercicio 1, mostrar que las ecuaciones de Einstein en presencia de una constante cosmológica Λ resultan

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G_N}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a, \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G_N}{3} \rho a^2 + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a^2 - c^2 k. \end{aligned} \quad (3)$$

6. Leyes de conservación y FLRW:

- (a) Considerar la corriente $N^\mu = n(t)u^\mu$ donde $n(t)$ es el número de galaxias por unidad de volumen propio. Usando el ej. 3 mostrar que la conservación de la corriente

$$\nabla_\mu N^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad n(t)(a(t))^3 = \text{const.}$$

Este resultado nos dice que $n(t)$ no es constante, se diluye durante la expansión. Lo que permanece constante es el número de galaxias por unidad de volumen comoving.

- (b) Muestre que la componente t de la conservación del tensor de energía-momento implica

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} (a^3). \quad (4)$$

Introduciendo un elemento de volumen comoving v_0 que tendrá volumen propio $V(t) = a^3(t)v_0$ y definiendo la energía interna del volumen propio V como $U(t) = \rho(t)V(t)$ reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = 0$$

A partir de la 1ra ley de la termodinámica tenemos que la evolución es adiabática.

- (c) En cosmología es usual suponer que cada componente del fluido cosmológico tiene una ecuación de estado asociada de la forma: $p = \omega \rho c^2$, donde el parámetro ω es una constante.

Reescribir (4) en términos de ρ y resolver dicha ecuación obteniendo

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$$

Nota: polvo, radiación y vacío ($\Lambda \neq 0$) corresponden a $\omega = 0, 1/3, -1$ respectivamente.

7. FRW Killing tensor y redshift: en FRW, no contamos con un vector de Killing temporal que nos de una noción de energía. Sin embargo, existe un tensor de Killing.

a. Mostrar que

$$K_{\mu\nu} = a^2(t)(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Killing tensor : } \nabla_{(\sigma} K_{\mu\nu)} = 0}$$

donde \mathbf{u} es la velocidad de los observadores comoving en FRW.

b. Mostrar que para trayectorias geodésicas $x^\mu(\tau)$

$$Q_K = K_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = a^2(\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{x}}) = cte$$

a lo largo de la trayectoria.

c. Evaluar esta cantidad para trayectorias masivas y concluir que la partícula se frena al expandirse el universo. Para el caso de partículas no masivas rederivar el redshift cosmológico¹.

8. Universo Estático de Einstein: “My biggest blunder”, Einstein a Gamow².

Doce años antes de que se tuviera conocimiento de la expansión del universo (Hubble 1929), y motivado por la idea de un universo cerrado y estático, a efecto de hacer su modelo compatible con el punto de vista de Mach, Einstein (1917) introdujo a Λ , la constante cosmológica, en sus ecuaciones. De esta manera pudo encontrar una solución cosmológica estática para el universo ($\dot{a} = 0$) asumiendo materia tipo polvo.

a. Mostrar que el término $\Lambda g_{\mu\nu}$ en

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}^\Lambda$$

puede ser interpretado como proveniente del tensor de energía-impulso de un fluido perfecto con

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G_N},$$

b. Mostrar que es posible obtener una solución estática para un universo cerrado dominado por materia (polvo) de densidad $\bar{\rho}_{dust}$ si agregamos el término de constante cosmológica e imponemos la relación ($c = 1$)

$$\Lambda = 4\pi G_N \bar{\rho}_{dust}$$

Hallar que el radio de curvatura de las secciones espaciales resulta

$$a_{ESU} = (4\pi G_N \bar{\rho}_{dust})^{-1/2}$$

c. Inestabilidad: Escribiendo $a(t) = a_{ESU} + \epsilon(t)$ en (3) y usando $\rho_{dust} a^3 = const$ mostrar que para $\epsilon \ll 1$

$$\ddot{\epsilon} = 4\pi G_N \bar{\rho}_{dust} \epsilon \quad \Rightarrow \quad \text{ESU es inestable para soluciones tipo polvo!}$$

¹Ver Carroll lecture notes eqn (8.66).

²Una razón importante para abandonar Λ , aparte de las observaciones de Hubble es que el ESU es inestable: “From these [Friedman] equations, one obtains my previous solution by assuming that p is constant over time. However, it can also be shown with the help of these equations that this solution is not stable, i.e., a solution that deviates only slightly from the static solution at a given point in time will differ ever more from it with the passage of time. On these grounds alone, I am no longer inclined to ascribe a physical meaning to my former solution, quite apart from Hubbel’s [sic] observations. Under these circumstances, one must ask whether one can account for the facts without the introduction of the Λ -term, which is in any case theoretically unsatisfactory”, Einstein 1931.

9. Universo de de Sitter: es la solución FRW sin materia y con constante cosmológica positiva.
 (a) Mostrar que la ecuaciones de campo cosmológicas se reducen a:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Rightarrow \text{el parámetro de Hubble } H(t) \text{ es constante} \quad (5)$$

- (b) Integrar (5) y obtener

$$a(t) = \exp [H_0(t - t_0)] = \exp \left[\sqrt{\Lambda/3}c(t - t_0) \right]. \quad (6)$$

10. Ley de Hubble y FLRW: Considere dos puntos P y Q de coordenadas espaciales fijas. Calcule el corrimiento de frecuencia $z = (\nu_{emit} - \nu_{obs})/\nu_{obs}$ para un rayo de luz emitido en una galaxia en P y recibido en otra galaxia en Q . Mostrar que si $z \ll 1$ resulta

$$z \simeq Hd/c \text{ dado que } z \simeq \dot{d}/c \Rightarrow v \simeq Hd$$

donde H es la “constante” de Hubble y d es la distancia entre las galaxias.

11. Fotones en un universo cerrado $k = 1$:

(a) Halle una expresión para $dr/d\eta$ para la trayectoria de un fotón que se mueve en dirección radial en la métrica de FLRW.

(b) Muestre que en un modelo dominado por materia no relativista, un rayo de luz que viaja desde que el universo comenzó a expandirse completa una vuelta al universo justo en el momento del recolapso. Mostrar que en el caso de radiación, el rayo de luz sólo llega a recorrer medio universo antes de que este recolapse.

12. A hoy: Mediciones recientes indican que el universo es espacialmente plano, y en su etapa actual se expande aceleradamente con $\ddot{a}a/\dot{a}^2 \sim 0,6$. Teniendo en cuenta que la densidad de materia es $\rho/c^2 \sim 3 \sim 10^{-27} \text{kg}/\text{m}^3$ (incluyendo materia oscura), y que la presión de la materia es despreciable, obtenga el valor de constante cosmológica necesaria para justificar el valor medido para el parámetro de aceleración.

13. Fluctuaciones de FLRW: considerar el elemento de línea para un universo espacialmente plano en tiempo conforme

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j)$$

(a) Si este universo es soportado por un fluido perfecto de ecuación de estado $w = p/\rho$ mostrar que el factor de escala evoluciona según $a(\tau) \propto \tau^{2/(1+3w)}$ para $w \neq -1/3$, y luego $a^2\bar{\rho} \propto \tau^{-2}$ donde $\bar{\rho}$ es la densidad de energía del fluido soportando la geometría.

(b) Consideremos perturbaciones scalares en el fluido. Escribiendo el elemento de línea como

$$ds^2 = a^2(\tau)[(1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]$$

mostrar que la linealización de las ecuaciones de Einstein conduce a

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi - 3H(\Phi' + H\Phi) &= 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \\ \Phi' + H\Phi &= -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p})v \\ \Phi'' + 3H\Phi' + (2H' + H^2)\Phi &= 4\pi G a^2 \delta p \end{aligned} \quad (7)$$

donde las primas denotan derivadas respecto de τ , las barras denotan las cantidades homogéneas del fondo, $\delta = \delta\rho/\rho$ la densidad de perturbación fraccional, $v_i = \partial_i v$ es la velocidad peculiar y $H = a'/a$.

A partir de las ecuaciones de Einstein mostrar que el contraste de densidad $\Delta \equiv \delta - 3H(1 + \bar{p}/\bar{\rho})v$ evoluciona como

$$\Delta'' + \frac{2(1-3w)}{1+3w} \frac{1}{\tau} \Delta' - \frac{6(1-w)}{1+3w} \frac{1}{\tau^2} \Delta - w \nabla^2 \Delta = 0$$

(c) Hallar el modo inestable (que crece con el tiempo) para Δ en el caso de un fluido sin presión ($w = 0$). Cómo evolucionan Φ y v en términos del factor de escala?

(d) Para un fluido de tipo radiación ($w = 1/3$) hallar la solución para Δ en espacio de Fourier para un modo dentro del horizonte de Hubble. Cómo evoluciona el potencial gravitatorio Φ en este caso?

(e) Considerar el universo en presencia de componentes de radiación, materia y energía oscura. Describir cualitativamente la evolución de las longitudes de onda pequeñas para las perturbaciones de materia oscura de tiempos tempranos (dominados por radiación) a tiempos tardíos (dominados por energía oscura).

Ayuda: ver sec. 4.2.2 y 4.2.3 *Part III Lectures on Cosmology*, Baumann, DAMTP.

Ejercicios adicionales:

14. Geometría en 2d:

(a) Mostrar que el tensor de Riemann tiene 1 componente independiente en un espacio 2-dimensional y puede expresarse en términos de la métrica y el escalar de curvatura $R(x)$ como

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = \frac{R}{2}(g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}), \quad d = 2$$

(b) Mostrar que $\int d^2x \sqrt{g} R[g]$ es un invariante topológico, esto es, que la acción es una derivada total. Equivalentemente, a partir de la identidad de arriba mostrar que el tensor de Einstein es idénticamente nulo. Esto es

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv 0 \quad \forall g_{\mu\nu}$$

Esto significa que gravedad en $d = 2 \Rightarrow T_{\mu\nu} = 0$!

(c) Mostrar que las dimensiones de G_N en $d = 2, 3, 4, \dots$ son $G_N \sim (\ell_P)^{d-2}$. A la escala de longitud ℓ_P se la conoce como longitud de Planck.

15. Geometría en 3d y espacios máximamente simétricos:

(a) Mostrar que el tensor de Riemann tiene 6 componentes independientes y se escribe en términos del tensor Ricci y de la curvatura escalar como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu} - \frac{R}{2}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \quad (8)$$

(b) Isotropía en todo punto $p \in \mathcal{M}$ implica que el espacio es homogéneo. Subiéndole un índice al tensor de Ricci obtenemos una transformación lineal en cada punto de la variedad que mapea $Ric : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ como $\ell^\mu \rightarrow R^\mu{}_\nu \ell^\nu$. Esta transformación define autovectores, los cuales representan direcciones privilegiadas, a menos que sea proporcional a la identidad. Mostrar entonces que isotropía $\forall p \in \mathcal{M}$ implica

$$R_{\mu\nu} = K(x)g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad R = 3K(x)$$

Puesto que homogeneidad implica que $K(x) = K = cte.$ ³, insertando en (8) mostrar que para un espacio maximalmente simétrico en $d = 3$ se satisface

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{K}{2}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \quad (9)$$

(c) Mostrar que en dimensión arbitraria, nuevamente isotropía en todo punto implica que

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu})$$

Homogeneidad luego implica que $R = cte.$

16. Campo escalar en espacio curvo: usando la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo $(\nabla^2 - m^2)\phi = 0$ mostrar que el tensor de energía impulso de un campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\nabla^\mu\phi)(\nabla_\mu\phi) + m^2\phi^2]$$

es conservado $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$

17. Muestre que el tensor energía-impulso $T^{\mu\nu}$ tiene un autovector tipo tiempo si y sólo si existe un observador que ve que no hay flujo neto de energía en ninguna dirección. ¿Cuál es el significado del autovalor?
18. Calcule las cuatro componentes de la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ para el tensor energía-impulso que describe el fluido perfecto de una estrella esféricamente simétrica y estática.
19. Identidad de Palatini: Demuestre que ante una perturbación $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ se tiene a primer orden

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}.$$

A partir de esta identidad obtener la variación para el tensor de Ricci.

Nota: como $\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ denota la diferencia de dos conexiones, resulta ser un tensor. Luego, tiene sentido calcular su derivada covariante.

20. Acción de Einstein-Hilbert:

³Alternativamente, la identidad de Bianchi aplicada a (9) considerando $K(x)$ impone que $K(x) = cte.$. Lo cual es esperado ya que de lo contrario $\nabla_\mu R$ sería un vector privilegiado.

- (a) Como precalentamiento, muestre que para un sistema de partículas cargadas de masas m_i y cargas e_i , la acción

$$S[A_\mu, x_i^\mu] = - \sum_i m_i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x_i)} \frac{dx_i^\mu}{d\lambda} \frac{dx_i^\nu}{d\lambda} d\lambda - \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{g} d^4x \\ + \sum_i e_i \int_{-\infty}^{\infty} A_\mu(x_i) \frac{dx_i^\mu}{d\lambda} d\lambda$$

es estacionaria respecto a variaciones en las variables dinámicas $A_\mu(x)$ y $x_i^\mu(\lambda)$, donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y λ parametriza simultáneamente todas las trayectorias de las partículas del sistema, cuando dichas variaciones se anulan en los bordes $|\lambda| \rightarrow \infty$ y $|x| \rightarrow \infty$ y se satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau_i^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x_i) \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i} \frac{dx_i^\rho}{d\tau_i} = \frac{e_i}{m_i} F^\mu_{\nu}(x_i) \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i}, \\ \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu}) = - \sum_i e_i \int \delta^4(x - x_i) \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i} d\tau_i,$$

siendo $d\tau_i = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx_i^\mu dx_i^\nu}$.

- (b) Definimos el tensor de energía-impulso a partir de

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{g} d^4x, \quad (10)$$

donde consideramos variaciones de la métrica $g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ tales que $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow 0$ cuando nos acercamos al borde $|x| \rightarrow \infty$. Muestre que

$$\delta F^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} + F^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \quad (11)$$

y con ello calcule

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i m_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i} \delta^4(x - x_i) d\tau_i + F_\rho{}^\mu F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (12)$$

Como S_M es un escalar no puede transformarse frente a un cambio de coordenadas, pero haciendo un cambio de variables de integración este se corresponde con un cambio en las variables dinámicas. Muestre que para una transformación infinitesimal $x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu$ se tiene

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} \frac{\partial \varepsilon^\rho}{\partial x^\nu} - g_{\rho\nu} \frac{\partial \varepsilon^\rho}{\partial x^\mu} - \varepsilon^\rho \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}, \quad (13)$$

de modo que $\delta S_M = 0$ implica que el tensor de energía impulso se conserva, $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$.

- (c) Finalmente, considere la acción gravitatoria dada por

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R \quad (14)$$

y muestre que

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} \int \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{g} d^4x. \quad (15)$$

Combinando ambos términos en $S = S_M + S_G$ obtenemos las ecuaciones de Einstein a partir de un principio variacional.

- (d) Ecuaciones de Einstein \Rightarrow movimiento geodésico: considerar el tensor de energía impulso para el caso de una partícula puntual de trayectoria $\tilde{x}^\mu(\tau)$

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau} \delta^4(x - \tilde{x}(\tau)) d\tau$$

Mostrar que la conservación de $T^{\mu\nu}$ conduce a la ecuación de la geodésica para $\tilde{x}^\mu(\tau)$.