Introducción a la Relatividad General - 2020
Departamento de Física - UNLP v1 2020/11/17

silva@fisica.unlp.edu.ar daniela.perez2812@gmail.com

Práctica VI: Ondas gravitacionales y radiación gravitacional

1. Difeomorfismos, Linearización e Invarianza de gauge:

   (a) Mostrar que si escribimos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ la métrica inversa a 1er orden en $h_{\mu\nu}$ resulta $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ donde

   $$h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$$

   (b) Considerar un diffeomorfismo arbitrario de las coordenadas de Minkowski $x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$

   $$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x) = x^\mu + \zeta^\mu(x) + ..., \qquad |\zeta^\mu| \ll 1, \tag{1}$$

   donde $\zeta^\mu(x)$ son 4 funciones arbitrarias de la posición tan chicas como $h_{\mu\nu}$. A partir de las leyes de transformación de la métrica

   $$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}), \tag{2}$$

   mostrar que las fluctuaciones de la métrica $h_{\mu\nu}$ de un fondo plano $\eta_{\mu\nu}$, definidas a partir de $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ transforman bajo el diffeomorfismo (1) según[1]

   $$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - (\pounds_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\eta})_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\zeta_\nu - \partial_\nu\zeta_\mu, \qquad \zeta_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\zeta^\nu \tag{3}$$

   (c) Halle el tensor de Riemann a primer orden en h para un espacio de fondo plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, y muestre que es invariante bajo las transformaciones (3).

2. Linearización de la ecuación de Einstein y Ecuación de ondas:

   (a) Considere un espacio con métrica

   $$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

   donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ representa la métrica de fondo. Muestre que el tensor de Ricci se puede escribir como

   $$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu}[h] + \mathcal{O}(h^2)$$

   donde $\bar{R}_{\mu\nu}$ representa el tensor de Ricci calculado con la métrica de fondo y

   $$R^{(1)}_{\mu\nu}[h] = \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}_\nu h_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}_\mu h^\rho{}_\rho\right) \tag{4}$$

   siendo $\bar{\nabla}$ la derivada covariante asociada a la métrica de fondo.

[1] La razón del signo menos es que el pullback a $p \in \mathcal{M}$ involucra $\phi^*_{-\lambda}\boldsymbol{g}(\phi_\lambda(p))$, donde la transformación $\phi_\lambda : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es la generada por difeo (1) pensado como $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x) = x^\mu + \lambda\zeta^\mu(x) + ...$

(b) Considerando un fondo plano $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ mostrar que la ecuación de movimiento para $h_{\mu\nu}$ se reduce a la ecuación de Fierz-Pauli

$$\Box h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - 2h_{\mu,\nu} = -16\pi G_N \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T \right)$$

donde $\Box = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$, $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, $h_{,\mu} = \eta^{\alpha\beta}h_{\mu\alpha,\beta} = h^\alpha{}_{\mu,\alpha}$ y $T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$

(c) Al orden siguiente escribimos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu}$ y para el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}[\eta + h + h^{(2)}] = R^{(1)}_{\mu\nu}[h] + R^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}] + R^{(2)}_{\mu\nu}[h]$. Mostrar que la contribución cuadrática en h resulta

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu}[h] =& \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_{(\mu}h_{\nu)\sigma} + \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\rho\sigma}\partial_\nu h^{\rho\sigma} + \partial^\sigma h^\rho{}_\nu\,\partial_{[\sigma}h_{\rho]\mu} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\sigma\left(h^{\rho\sigma}\partial_\rho h_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4}\partial^\rho h\,\partial_\rho h_{\mu\nu} - \left(\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\rho h\right)\partial_{(\mu}h_{\nu)\sigma} \end{aligned}$$

3. Gauge de Donder/Lorenz/Einstein/Hilbert/Fock/Armónico:

(a) Mostrar que para un espacio de fondo plano, siempre podemos elegir que la fluctuación $h_{\mu\nu}$ satisfaga a condición

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

donde la traza reversa $\bar{h}_{\mu\nu}$ se define como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\rho{}_\rho \tag{6}$$

Hallar el diffeomorfismo que implementa la transformación.

(b) El fijado de gauge de Donder se define de manera no lineal como

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0 \tag{7}$$

Mostrar que la linealización de esta expresión conduce a (5).

(c) La razón del nombre armónico para el fijado de de Donder deriva de lo siguiente: considerando un cambio arbitrario de coordenadas $x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x)$, mostrar que (7) se modifica según

$$0 = g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} \to 0 = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\tilde{x}^\rho - \partial_\mu\partial_\nu\tilde{x}^\rho g^{\mu\nu}$$

Si nos preguntamos qué condición debe satisfacer el diffeo para no modificar el vínculo obtenemos

$$\Box\tilde{x}^\rho(x) = 0$$

Estas transformaciones residuales se fijan imponiendo condiciones sobre el tensor de polarización de la onda, por ej. TT.

Observaciones:

1. Hemos considerado a $\tilde{x}^\rho$ como cantidades escalares, son simples funciones.

2. El laplaciano escalar se simplifica en el gauge de de Donder:

$$\nabla^\mu\nabla_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}}_{=0}\partial_\rho = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$$

3. Análogamente

$$\nabla^\mu \omega_\mu = g^{\mu\nu}(\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\omega_\rho) = \partial^\mu \omega_\mu$$

4. Ondas gravitatorias:

(i) Mostrar que $R^{(1)}_{00}[h]$ y $R^{(1)}_{0i}[h]$ definidos en (4) no contienen derivadas segundas temporales de $h_{\mu\nu}$. Esto significa que solo seis ecuaciones $R^{(1)}_{ij} = 8\pi G_N T_{ij}$ son dinámicas. Las ecuaciones $R^{(1)}_{0\mu}$ representan cuatro vínculos que impiden elegir los datos inciales de manera arbitraria.

(ii) Mostrar que en ausencia de fuentes, si escogemos el gauge de Lorenz

$$\textsf{Gauge de Lorenz :} \quad \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0\,, \tag{8}$$

la ecuación de moviemiento para la traza reversa se reduce a la ecuación de ondas

$$\textsf{Ondas gravitacionales - Lorenz gauge :} \qquad \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

Proponer $\bar{h}_{\alpha\beta}(x) = \epsilon_{\alpha\beta}(k)\, e^{ik_\mu x^\mu}$, con $\epsilon_{\alpha\beta}$ constantes y hallar, como siempre, que la ecuación de ondas impone

$$k_\mu k^\mu = 0$$

y que el gauge de Lorenz impone que el tensor de polarización $\epsilon_{\alpha\beta}$ debe ser ortogonal al momento de la onda

$$\epsilon_{\alpha\beta}(k)\, k^\beta = 0 \tag{10}$$

(iii) La ecuación (9) contiene derivadas segundas temporales para $\mu = 0$ o $\nu = 0$. Es esto contradictorio con el item (i), por qué?

(iv) Transformaciones residuales: la condición (8) no fija completamente la invarianza frente a difeomorfismos. Verificar que difeomorfismos $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu(x)$ con $\Box \xi^\mu = 0$ preservan el fijado de gauge.

(v) Transverse-Traceless gauge: escribiendo $\xi_\alpha = b_\alpha(k)\, e^{ik_\mu x^\mu}$ mostrar que el tensor de polarización frente a las trasnformaciones residuales transforma como

$$\epsilon^{(\text{nuevo})}_{\alpha\beta} = \epsilon^{(\text{viejo})}_{\alpha\beta} + ib_\alpha k_\beta + ib_\beta k_\alpha - i\eta_{\alpha\beta}\, b^\mu k_\mu. \tag{11}$$

1. Mostrar que las transformaciones residuales (11) preservan (8): $\epsilon^{(\text{nuevo})}_{\alpha\beta}$ satisface el vínculo de Lorentz si $\epsilon^{(\text{viejo})}_{\alpha\beta}$ estaba en ese gauge.

2. Mostrar que la condición

$$\epsilon^{(\text{nuevo})}_{\alpha\beta} U^\beta = 0 \tag{12}$$

donde U^β es una dada tetravelocidad impone sólo tres restricciones sobre b_α pues, debido a (10), existe una combinación de ellas que es idénticamente nula $\forall b_\alpha$. Mostrar que b_α y consecuentemente la onda quedan completamente determinados si a (12) la combinamos con

$$\epsilon^{(\text{nuevo})\alpha}{}_\alpha = 0.$$

3. Mostrar que en virtud de la linealidad del problema, siempre es posible hallar un ξ_α para que cualquier superposición de ondas planas satisfaga las condiciones de arriba, es decir

traza nula y ortogonalidad a una dada tetravelocidad U^μ. Observar que estas condiciones no pueden imponerse en general en el caso de una solución estática.

4. Cuántos grados de libertad tiene una onda?

El gauge que satisface estas propiedades se conoce como gauge TT (*transverse-traceless*).

5. Energía gravitacional y masa ADM[2]: La masa de un objeto en RG se obtiene de comparar su campo gravitacional en el infinito, donde el campo es débil, respecto de una solución de *vacio*.

A partir de la definición usual de energía

$$E = \int_\Sigma d^3x\, T_{00}$$

y de las ecuaciones de Einstein, definimos la masa ADM como

$$E_{ADM} = \frac{1}{8\pi G}\int_\Sigma d^3x\, G_{00}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y Σ es una hipersuperficie espacial que cubre todo el espacio. En el límite de campo débil escribimos $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $h_{\mu\nu}$ es una pequeña perturbación alrededor de la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ que tomamos como $\eta_{\mu\nu}$.

(a) A orden lineal mostrar que

$$G_{00} = \partial_i\left(-\frac{1}{2}\partial^i h^k_k + \frac{1}{2}\partial_k h^{ik}\right)$$

luego, usando Stokes resulta

$$\begin{aligned} E_{ADM} &= \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} dS_i(\partial_k h^{ik} - \partial^i h^k_k) \\ &= \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} dS^i(\nabla^k h_{ik} - \nabla_i h) \end{aligned} \tag{13}$$

donde la segunda lineal se obtiene de covariantizar la primera. A esta expresión se la conoce como masa ADM del sistema gravitacional.

(b) Evaluar (13) para la solución de Schwarzschild hallando

$$\partial_k h_{ik} - \partial_i h_{kk} = \frac{4GM}{r^3}x_i$$

de manera que

$$E_{ADM} = M$$

Luego, la energía del espaciotiempo de Schwarzschild space-time es igual a la masa del agujero negro, como esperábamos.

[2] Ver discusión en Weinberg sección 7.6 en particular item (G).

—

Ejercicios opcionales

(I) Estrellas binarias y radiación gravitatoria: dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se mueven en una órbita elíptica newtoniana de semieje mayor a y eccentricidad e. Eligiendo coordendas de manera tal que la órbita se encuentre en el plano (x, y) con el centro de masas en el origen, la posición de los cuerpos resulta $\boldsymbol{x}_1 = (r_1 \cos\varphi, r_1 \sin\varphi)$ y $\boldsymbol{x}_2 = (-r_2 \cos\varphi, -r_2 \sin\varphi)$ donde

$$r_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) r, \qquad r_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) r$$

La ecuación de la elipse es

$$r(t) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\varphi(t)}$$

y la velocidad angular satisface

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\sqrt{(m_1+m_2)a(1-e^2)}}{r(t)^2}$$

Considerando los cuerpos como masas puntuales no relativistas, calcular el tensor de energía impulso, el momento cuadrupolar de la distribución (momento de inercia) y la perturbación inducida $\bar{h}_{ij}$ (si les parece muy larga la cuenta considerar el caso de órbita circular $e = 0$ o simplificar aún mas considerando $m_1 = m_2$). Mostrar que el valor medio de la potencia radiada en ondas gravitacionales es

$$\langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} f(e), \qquad f(e) = \frac{1 + (73/24)e^2 + (37/96)e^4}{(1-e^2)^{7/2}}$$

Observar que $f(e)$ aumenta muy rápidamente cuando $e \to 1$, de manera que las órbitas muy eccéntricas emiten mas radiación gravitatoria que las órbitas circulares[3].

(II) Radiación gravitatoria II: al emitir radiación gravitatoria, el sistema pierde energía y momento angular que causan una modificación paulatina de la órbita. Podemos modelar esto haciendo a, e funciones del tiempo. La energía de la órbita newtoniana es $E = -m_1 m_2/(2a)$ de manera que a disminuye con el tiempo. Tomando $dE/dt = -\langle P \rangle$ obtenemos una expresión para da/dt. Para órbitas circulares ($e = 0$), usar la expresión anterior para mostrar que $a(t)$ se hace cero pata el tiempo

$$T = \frac{5a(0)^4}{256 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$$

Considere dos agujeros negros en órbita circular, cada uno con una masa de 30 $M_\odot$, lo que da $m_1 = m_2 \approx 45km$. Cuál es el tiempo para fusionarse si la distancia inicial entre ellos es 1 unidad astronómica (AU)?[4] A efectos de comparar, la edad del Universo es de aproximadamente 14×10^9 años. Qué tan separados están los agujeros negros cuando el tiempo de fusión es de 1 año? A modo de comparación, el radio del Sol es de aproximadamente $7 \times 10^5 km$.

[3] P.C. Peters and J. Mathews, Physical Review **131**(1963) 435

[4] $1AU$ es la distancia entre la Tierra y el Sol: $1{,}5 \times 10^8 km$.