

Práctica V: Campo débil. Solución de Schwarzschild

1. Campo débil y límite no relativista: en el límite de campo gravitacional débil existen coordenadas x^μ en el que la métrica toma la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

(a) Hallar las componentes de la conexión a primer orden en $h_{\mu\nu}$.

(b) Introduciendo el resultado anterior en la ecuación de la geodésica, y suponiendo que la partícula se mueve a bajas velocidades (límite no relativista), muestre que la ecuación de movimiento de una partícula se reduce a:

$$\frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} = -\frac{1}{2} c^2 \vec{\nabla} h_{00}. \quad (2)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de movimiento newtoniana de una partícula en un campo gravitacional, y haciendo las identificaciones correspondientes, muestre que en el límite de campo débil, el intervalo toma la forma

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3)$$

siendo Φ el potencial gravitacional newtoniano.

(c) Calcule los tensores de Ricci y de Einstein a primer orden en $h_{\mu\nu}$.

(d) Hallar $T_{\mu\nu}$ en el límite no relativista, y mostrar que en el límite de campo débil las ecuaciones de Einstein se reducen a las ecuaciones de Newton para el potencial gravitatorio

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \Leftrightarrow \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad \text{y} \quad \kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$$

siendo ρ la densidad de masa y G la constante de Newton.

2. Ecuaciones de Einstein en el vacío: Muestre que las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío se reducen a:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (4)$$

A partir de la ecuación anterior, pruebe que sólo en 4 o más dimensiones pueden existir campos gravitacionales en el vacío.

Nota: ver *General Relativity, An Introduction for Physics. Hobson, Efstathiou y Lasenby*, Sección 8.5.

3. Redshift: El corrimiento al rojo gravitatorio se midió por primera vez en 1960. Aprovechando la alta definición de la línea de 14,4 keV emitida por un átomo de Fe^{57} alojado en un cristal (efecto Mossbauer), Pound y Rebka pudieron determinar el corrimiento de frecuencia que sufre el fotón luego de ascender el campo gravitatorio en la superficie terrestre una altura de 22 m. Utilizando el Principio de Equivalencia calcule el valor de $\Delta\nu/\nu$ que se esperaba medir. Muestre que el mismo corrimiento se obtiene si el tensor métrico en las coordenadas del laboratorio tuviera $g_{00} = -(1 + \frac{2}{c^2}\phi)$ (siendo el potencial gravitatorio tal que $|\phi|/c^2 \ll 1$)¹.

¹Ver notas de GR de Mc Greevy (MIT) y Reall (DAMTP).

4. Métrica esféricamente simétrica: considerar

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

- I. Calcule todos los símbolos de Christoffel.
- II. Muestre que la componentes no nulas del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ son:

$$R_{tt} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB},$$

$$R_{rr} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB},$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right),$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2\theta.$$

5. Métrica de Schwarzschild: obtener la métrica

$$ds^2 = - \underbrace{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}_{f(r)} c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5)$$

resolviendo las ecuaciones de vacío $G_{\mu\nu} = 0$ del ítem anterior. Justificar el signo menos en paréntesis de g_{tt} y el nombre M para la constante de integración.

6. Orbitas en la geometría de Schwarzschild I: la simetría esférica nos permite restringirnos al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.
 - I. Simetría esférica: verificar que $\theta(\tau) = \pi/2 = cte.$ resuelve la eom para la coordenada θ .
 - II. Cargas conservadas: hallar las cargas conservadas a lo largo de la trayectoria asociadas a los vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ

$$E = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}, \quad \ell = r^2 \dot{\phi} \quad \text{donde} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

aquí $\dot{} = \frac{d}{ds}$ donde s es el parámetro afín.

- III. Vínculo hamiltoniano: mostrar que en parametrización de tiempo propio el vínculo para la trayectoria resulta

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \kappa$$

donde $\kappa = -c^2, 0, 1$ para trayectorias temporales, nulas y espaciales. La idea será trabajar con esta cantidad. Naturalmente podemos obtener la la eom radial derivando esta expresión.

- IV. Reducción a 1d: usando las cargas conservadas del ítem ii, reducir el problema radial hallando el potencial efectivo

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2} \quad \text{donde} \quad V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \kappa\right) \quad (6)$$

Graficar el potencial y observar que la corrección relativista $\propto -1/r^3$ modifica brutalmente el comportamiento para $r \ll r_s$ haciendo que el potencial a cortas distancias sea atractivo!

- V. Órbitas acotadas: mostrar que para partículas masivas sólo existen para $\ell^2 > 3c^2 r_s^2$.
- VI. Órbitas circulares: mostrar que para partículas masivas existen dos órbitas circulares, una inestable r_i y otra estable r_e con $r_e \geq 3r_s$. Mostrar que el período de la órbita estable satisface la 3^{ra} ley de Kepler

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_e^3}{r_s}}$$

- VII. Trayectorias de fotones: mostrar que para el caso de partículas no masivas existe solo una órbita circular de radio $r_\gamma = 3GM/c^2$ y que dicha órbita es inestable. Mostrar que el parámetro de impacto de un fotón proveniente del infinito debe ser $b_\gamma = 3\sqrt{3}GM/c^2$ para que el mismo incida justo sobre la esfera de fotones.

—

Nota: El conjunto de órbitas circulares ‘*inestables*’ de fotones en la geometría de Schwarzschild forma una esfera que se denomina esfera de fotones. Los rayos de luz que tengan un parámetro de impacto menor que b_f serán atrapados, de modo que el radio aparente de un agujero negro en un fondo luminoso es $r_{ap} = b_f = 3\sqrt{3}GM/c^2$. La región definida por $r \leq r_{ap}$ resulta entonces completamente oscura, correspondiendo a la llamada sombra del agujero negro.

—

7. Orbitas en la geometría de Schwarzschild II:

A partir de (6) hallar la ecuación que determina para la trayectoria $r = r(\phi)$ en la geometría de Schwarzschild. Mediante el cambio de variables $u = 1/r$ obtener

$$\underbrace{u'' + u}_{\text{Newton}} = -\frac{\kappa r_s}{2\ell^2} + \underbrace{\frac{3}{2}r_s u^2}_{\text{Einstein}} \quad (7)$$

donde $' = \frac{d}{d\phi}$. Las correcciones debidas a RG en el perihelio de mercurio y en la deflexión de la luz se estudian analizando perturbativamente el último término de esta ecuación. Sustituyendo $r_s = 2GM/c^2$ escribiremos

$$u = u_0 + Mu_1 + M^2u_2 + \dots \quad (8)$$

I Precesión de órbitas planetarias

- Llamando $\frac{1}{R} = \frac{GM}{\ell^2}$ en (7), mostrar que la solución de orden cero para órbitas acotadas masivas en (7) resulta ser una elipse (Kepler/Newton/Mecánica)

$$u_0(\phi) = \frac{1}{R}(1 + e \cos \phi)$$

con $0 \leq e < 1$ la excentricidad.

- Reanalizar el esquema perturbativo, insertando u_0 en (7) y concluir que el parámetro perturbativo de expansión *adimensional* es r_s/R .

· Mostrar que la ecuación de movimiento para la corrección de 1^{er} orden u_1 tiene como fuente un término resonante que contribuye al corrimiento del perihelio.

Insertando

$$u_1^{\text{No period}} = \frac{3eG}{R^2} \phi \sin \phi$$

en (8) mostrar que las órbitas acotadas no son cerradas y precesan en torno a uno de los focos un ángulo

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{3GM}{a(1-e^2)c^2}, \quad (9)$$

siendo $a = R/(1-e^2)$ el semi-eje mayor de la órbita.

Calcular el valor de $\Delta\phi$ para Mercurio.

II Deflexión de la luz

· Hallar la solución a orden cero de (7) para partículas no masivas (scattering)

$$u_0 = \frac{\sin \phi}{b}, \quad (10)$$

Mostrar que b debe ser interpretado como el parámetro de impacto de la trayectoria.

· Resolver la corrección de primer orden u_1 hallando

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) + \mathcal{O}(M^2). \quad (11)$$

· Considerando el límite $r \rightarrow \infty$ y pequeñas deflexiones, muestre que la deflexión del fotón resulta

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (12)$$

Calcule la deflexión para fotones que se mueven muy cerca del Sol.

—

Nota histórica: podemos calcular de forma cruda el efecto en la teoría de Newton imaginando que el fotón tiene una masa efectiva $m_{eff} = \hbar\omega/c^2$. La respuesta que se encuentra es exactamente la mitad del ángulo calculado usando la ecuación geodésica aplicada al espacio-tiempo en campo débil. El factor dos se debe a la curvatura espacial (factor $(1-2\phi)$ que multiplica la parte espacial de la métrica). Una expedición para observar un eclipse en África dirigida por el astrofísico británico Arthur S. Eddington confirmó la predicción relativista midiendo cuidadosamente las posiciones de estrellas cerca de la extremidad del sol y comparándolas con sus posiciones cuando el sol está en una parte diferente del cielo. Estos resultados fueron decisivos para convencer al mundo científico de que la relatividad general era una descripción válida de la gravedad, y fueron en gran parte responsables de que Einstein se convirtiera en una persona famosa.

Vale la pena señalar que los datos de la expedición no fueron de una calidad particularmente buena; es un milagro que hayan podido llegar a un acuerdo tan bueno con la predicción relativista. Las mediciones modernas que utilizan la propagación de pulsos de radar en el sistema solar miden este ángulo de deflexión con una precisión muy alta. La predicción relativista se confirma típicamente con una precisión de $\sim 10^{-5}$.

8. Retardo de Shapiro: (a) Utilizando la geometría (3), muestre que el retardo temporal debido a la presencia de un cuerpo masivo resulta

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int \Phi d\ell$$

donde $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ y la integración se hace a lo largo de la trayectoria del rayo de luz.

(b) Considere que el Sol, Venus y la Tierra se encuentran alineados y se envía una señal de radar de la Tierra a Venus y se recibe el rebote de la misma. Utilizando el potencial newtoniano. Llamando M_\odot a la masa del Sol, r_T a la distancia Sol-Tierra y r_V a la distancia Sol-Venus, obtenga la expresión correspondiente al retardo temporal gravitatorio.

Nota: además del efecto Shapiro, existe un retardo temporal geométrico, debido a que los fotones deben recorrer una curva de mayor longitud que en ausencia del deflector. Para el Sol, este segundo efecto es despreciable, pero puede ser importante en otros casos (por ejemplo en cosmología).

9. Interior del agujero negro de Schwarzschild BH y fin inexorable: Mostrar que una vez que una nave espacial cruza el horizonte en un agujero negro de Schwarzschild de masa M , esta alcanza el origen $r = 0$ (singularidad) en un tiempo propio menor a $M\pi$.
10. Coordenadas de Gullstrand+Painlevé: las coordenadas de Schwarzschild solo sirven para describir fenómenos en el exterior del agujero negro $r > r_s$. Si nos interesa analizar fenómenos donde cruzamos el horizonte, resultará mas conveniente un sistema de coordenadas no singular en $r_s = 2GM/c^2$.

Considerar el cambio de coordenadas $\tilde{t} = t - g(r)$ en (5). Imponiendo $g_{rr} = 1$ obtener

$$g'(r) = \pm \frac{\sqrt{1 - f(r)}}{f(r)}$$

luego

$$\begin{aligned} \text{Schwarzschild in Painleve coords : } \quad ds^2 &= -f(r)d\tilde{t}^2 \mp 2\sqrt{1 - f(r)}d\tilde{t}dr + dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)d\tilde{t}^2 + 2\sqrt{\frac{r_s}{r}}d\tilde{t}dr + dr^2 + r^2d\Omega^2 \end{aligned}$$

En la última línea fijamos la ambigüedad de signo de g .

—

Comentarios:

- . Las métrica inducida sobre las superficies $t = cte$. es la métrica plana.
- . La métrica es regular en el horizonte $r = r_s$, si bien $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$ va a cero, el término no diagonal $g_{\tilde{t}r}|_{r=r_s} \neq 0$ asegura la invertibilidad de la métrica.
- . $g(r) = 2M(-2y + \log\left(\frac{y+1}{y-1}\right))$ donde $y = \sqrt{r/2M}$. La función es ciertamente singular en $r = r_s$ lo cual no debe sorprendernos, si queremos hacer desaparecer la singularidad en $r = r_s$ en (5).
- . El espacio tiempo resulta estacionario y el vector de Killing $\partial_{\tilde{t}}$ se vuelve spacelike al cruzar el horizonte.

—

11. Coordenadas retardadas de Eddington-Filkenstein: Muestre que introduciendo la coordenada temporal retardada de Eddington-Filkenstein dada por $t^* = ct + 2M \ln|r/(2M) - 1|$, el elemento de línea en la geometría de Schwarzschild toma la forma ($G = c = 1$)

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^{*2} + \frac{4M}{r} dt^* dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (13)$$

Encuentre las ecuaciones para las líneas de mundo de fotones moviéndose en forma radial en coordenadas retrasadas de Eddington-Filkenstein. Use este resultado para confeccionar un diagrama espacio-temporal que muestre la estructura de los conos de luz en este sistema de coordenadas.

12. Kretschmann y singularidad ficticia en r_s : a partir de las componentes no nulas del tensor de Riemann correspondiente a la geometría de Schwarzschild son ($c = G = 1$)

$$\begin{aligned} R^t{}_{rtr} &= -\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, & R^t{}_{\theta t\theta} &= \frac{R^t{}_{\phi t\phi}}{\sin^2 \theta} = \frac{M}{r} \\ R^\theta{}_{\phi\theta\phi} &= \frac{2M \sin^2 \theta}{r}, & R^r{}_{\theta r\theta} &= \frac{R^r{}_{\phi r\phi}}{\sin^2 \theta} = -\frac{M}{r} \end{aligned} \quad (14)$$

y aquellas obtenidas a partir de las simetrías del mismo. Calcular el escalar de Kretschmann, definido por

$$K = R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

y mostrar que la singularidad en $r = 0$ es real y no un problema de coordenadas. Mientras que la aparente singularidad en $r_s = 2M$ en la métrica y el Riemann no es física, están asociadas a una mala elección de coordenadas.

13. Agujeros negros, regularidad del horizonte de eventos y Temperatura: considerar una geometría estática y esféricamente simétrica de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + g^2(r)d\Omega^2$$

donde $f(r)$ se anula con un polo simple en $r = r_0$, y $g(r_0) \neq 0$.

(a) Mostrar que la métrica cerca de $r = r_0$ puede ser aproximada como

$$ds^2 \simeq -\kappa^2 \xi^2 dt^2 + d\xi^2 + g^2(r_0)d\Omega^2 \quad (15)$$

resultando entonces regular para $\xi = 0$, con

$$\kappa = \frac{f'(r_0)}{2}$$

(asumir que $f'(r_0) > 0$). κ se denomina gravedad superficial del horizonte de Killing en r_0 . Notar que podríamos reescalar $t \rightarrow \lambda t$ y entonces κ se reescalaría. Esta ambigüedad se fija usualmente eligiendo un marco estático de referencia particular (por ejemplo, para espacio plano, fijando a 1 la norma del vector de Killing ∂_t en el infinito).

(b) Chequear que el resultado para κ coincide con el obtenido a partir de la fórmula para un horizonte de Killing generado por un vector \mathbf{k}

$$k^\mu \nabla_\mu k_\nu = \kappa k_\nu$$

Esto nos dice que la gravedad superficial se correlata con el caracter no-afin del generador del horizonte de Killing.

(c) Considerar $t \rightarrow i\tau$ en (15) y hallar qué periodicidad debemos imponer en τ para que no exista singularidad cónica en $\xi = 0$. Discutir la relación entre la periodicidad en el tiempo euclídeo y la temperatura.

Ayuda: reinterpretar la función de partición de un sistema térmico $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ como una evolución en tiempo euclídeo.

14. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov: La ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov para la estructura de una estrella esféricamente simétrica y estática es

$$p'(r) = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \quad \text{con} \quad m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad (16)$$

donde debemos además proponer una ecuación de estado relacionando p y ρ . En general, será imposible resolver este sistema analíticamente para ecuaciones de estado realistas, de modo que en la práctica se debe recurrir a soluciones numéricas.

- (a) Suponiendo que en todo el interior de la estrella la densidad es constante $\rho = \text{constante}$, determine $m(r)$ y la presión en función del radio $p = p(r)$.
- (b) Utilizando el resultado del inciso anterior determine la métrica que representa la solución de Schwarzschild interior para un objeto de densidad constante.
- (c) A partir de la expresión para la presión central del modelo de estrella de densidad constante, muestre que existe una restricción para el valor de la masa M y el radio R del objeto dado por:

$$\frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}. \quad (17)$$

Este resultado se conoce como teorema de Buchdahl's y es válido para cualquier ecuación de estado.

Ejercicios opcionales

- (I) Acoplamiento mínimo: Mostrar que las ecuaciones de Maxwell en espacio curvo en el gauge de Lorenz resultan

$$\nabla^\mu \nabla_\mu A^\nu - R^\nu{}_\mu A^\mu = j^\nu \quad (18)$$

Esto significa que no se obtienen via minimal coupling $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ en la ecuación de espacio plano $\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = j^\nu$. Concomitantemente mostrar que si eliminamos el acoplamiento no-minimal correspondiente al término del Ricci, (18) es inconsistente con la conservación de la carga $\nabla_\mu j^\mu = 0$.

- (II) Aproximación Eikonal/Límite de óptica geométrica: consideremos situaciones con tres escalas características: λ longitud de onda local, L escala para la cual la amplitud y polarización de la onda varían apreciablemente y R radio de curvatura típico de la geometría. La aproximación de rayos aparece cuando $\lambda \ll L$ y $\lambda \ll R$, esto es, la variación del campo gravitatorio y la amplitud son muy pequeñas a lo largo de una longitud de onda. Bajo estas condiciones aparece el ansatz Eikonal

$$A_\mu = \text{Re}(\mathcal{A}_\mu e^{i\psi})$$

Introduciendo un parámetro pequeño $\epsilon = \lambda/\min(L, R)$ y dado que $\psi \propto \lambda^{-1}$, propondremos soluciones en serie de potencias del tipo

$$A_\mu = \text{Re}((a_\mu + \epsilon b_\mu + \dots)e^{i\frac{\psi}{\epsilon}}) \quad (19)$$

Definiendo el número de onda $k_\mu = \partial_\mu \psi$, la amplitud escalar $a = \sqrt{a_\mu \bar{a}^\mu}$ y el vector de polarización $f_\mu = a_\mu/a$ (vector complejo unitario) llamamos **rayos de luz** a las curvas integrales de k^μ . Por definición estas resultan perpendiculares a las superficies de fase constante ψ , esto es perpendiculares a los **frentes de onda**.

i. Insertando el ansatz (19) en la condición de Lorentz derivar

$$k_\mu f^\mu = 0 \quad \text{el vector de polarización es perpendicular al vector de onda}$$

ii. Insertando el ansatz (19) en (18) derivar a orden ϵ^{-2}

$$k_\mu k^\mu = 0 \Rightarrow \boxed{g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi = 0} \quad \text{Ecuación Eikonal} \leftrightarrow \text{Vector de onda es nulo} \quad (20)$$

del orden ϵ^{-1} resulta

$$k^\nu a_{;\nu}^\mu = -\frac{1}{2} k_{;\nu}^\nu a^\mu \quad (21)$$

iii. La ecuación Eikonal implica $0 = (k^\nu k_\nu)_{;\mu} = 2k^\nu k_{\nu;\mu}$, puesto que $k_\nu = \psi_{;\nu}$ luego $\psi_{;\mu;\nu} = \psi_{;\nu;\mu}$. Derivar que los rayos de luz corresponden a geodésicas nulas

$$k^\nu k_{\mu;\nu} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^2 = 0$$

iv. Manipulando $k^\nu (a^2)_{;\nu} = k^\nu (a_\mu \bar{a}^\mu)_{;\nu}$ mostrar usando (21) que

$$k^\nu a_{;\nu} = -\frac{1}{2} k_{;\nu}^\nu a \quad (22)$$

Insertando $a^\mu = a f^\mu$ en (21) y usando (22) derivar

$$k^\nu f_{;\nu}^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{f} = 0$$

El vector polarización, perpendicular a los rayos de luz, se transporta paralelamente a lo largo de los mismos.

v. Multiplicando (22) por a reescribirla como una ley de conservación de corriente

$$k^\nu \nabla_\nu a^2 + a^2 \nabla_\nu k^\nu = 0 \quad \leftrightarrow \quad (a^2 k^\mu)_{;\mu} = 0$$

A nivel de mecánica cuántica interpretamos esta ley como la conservación del número de fotones. En realidad esta expresión representa un **invariante adiabático**, la carga asociada varía muy lentamente para $R \gg \lambda$.

(III) Eikonal en el límite Newtoniano: considerar la ecuación Eikonal (20) en el límite de campo débil (3) y obtener ($c = 1$)

$$-(1 - 2\Phi)(\partial_t \psi)^2 + (1 + 2\Phi)(\nabla \psi)^2 = 0$$

Siendo la métrica independiente del tiempo escribimos $\psi(t, \mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) - \omega t$. A orden dominante en Φ resulta

$$(\nabla S)^2 = n^2 \omega^2, \quad n = (1 - 2\Phi)$$

Esta es la expresión usual para la ecuación Eikonal en óptica de rayos con índice de refracción n .

- (IV) **Espacio de Taub-NUT:** El espacio Taub-NUT es una solución de las ecuaciones de Einstein que describe un espacio euclídeo homogéneo pero anisótropo. La métrica de dicho espacio está dada por

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{U(t)} + 4l^2 U(t) (d\psi + \cos\theta d\varphi)^2 + (t^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

donde l es una constante y

$$U(t) \equiv \frac{2mt + l^2 - t^2}{l^2 + t^2}.$$

Calcule el tensor de curvatura, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

Ayuda: usar el formalismo de tétradas.

- (V) **Agujero negro de Kerr-Newman:** El agujero negro de Kerr-Newman es una solución de las ecuaciones de Einstein que posee masa, momento angular y carga (esta última debe ser puesta a cero para las aplicaciones astrofísicas). La métrica de esta geometría en coordenadas de “Boyer-Lindquist” tiene la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{(2Mr - Q^2)2a \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - Q^2)a^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\phi^2,$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \\ \Sigma &\equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta, \end{aligned}$$

y $a^2 + Q^2 \leq M^2$ debe ser impuesto para garantizar la existencia de un horizonte (ubicado en $r = r_+$, la raíz más grande de la ecuación $\Delta = 0$).

El agujero negro de Schwarzschild se obtiene en el caso especial en el que $a = Q = 0$. El caso particular $a = 0$ y $Q \neq 0$ recibe el nombre de agujero negro de Reissner-Nordström, y al igual que el agujero negro de Schwarzschild es esféricamente simétrico. El agujero negro de Kerr es aquel con $a \neq 0$ y $Q = 0$.

- (a) Para la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist calcule el escalar de Kretschmann dado por $K = R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$ y muestre que la única singularidad esencial de la métrica ocurre en $r = 0$, $\theta = \pi/2$.
- (b) Muestre que el área propia del horizonte de eventos externo $r = r_+$ en la geometría de Kerr viene dada por $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$.

- (c) Utilice los resultados del inciso anterior para mostrar que el área del horizonte de eventos $r = r_+$ en la geometría de Kerr puede ser escrita como:

$$A = \frac{8\pi G}{c^4} \left[M^2 + \sqrt{M^4 - \left(\frac{cJ}{G} \right)^2} \right], \quad (23)$$

donde M y J son la masa y el momento angular del agujero negro. Luego, muestre que si la masa y el momento angular cambian en δM y δJ respectivamente, el cambio correspondiente en el área propia del horizonte de eventos viene dada por:

$$\delta A = \frac{8\pi G}{c} \frac{a}{\Omega_H \sqrt{\mu^2 - a^2}} \left(\delta M - \Omega_H \frac{\delta J}{c^2} \right), \quad (24)$$

donde $\Omega_H = ac/(2\mu r_+)$. Con esto último demuestre que el área del horizonte de eventos debe incrementarse en el proceso de Penrose.

- (VI) **Área del horizonte de un agujero negro y teorema de Hawking:** Muestre que el área del horizonte del agujero negro de Kerr-Newman (esto es, la superficie con $r = r_+$ y $t = t_0$) es

$$A(M, a, Q) = 4\pi \left[\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \right)^2 + a^2 \right]. \quad (25)$$

De acuerdo a un teorema de Hawking el área del horizonte del agujero negro que resulta de la colisión de otros dos agujeros negros debe ser mayor o igual a la suma de las áreas de los agujeros negros originales.

- (a) ¿Cuál es la mínima masa M_f del agujero negro de Schwarzschild que se forma al colisionar dos agujeros negros de Kerr de igual masa M con momentos angulares opuestos de magnitud $a = M$?
- (b) ¿Qué fracción de la masa original puede ser radiada en la colisión? ¿Hay alguna otra colisión que pueda radiar una fracción mayor de la masa original?
- (VII) **Radiación de Hawking como efecto túnel (Parikh+Wilczek):** si bien clásicamente nada puede escapar de un agujero negro, cuánticamente por efecto túnel, las partículas escapan. El cálculo resulta sencillo usando coordenadas de Painlevé.

- (a) Construir la acción para trayectorias radiales tipo tiempo en un agujero negro parametrizando la trayectoria con el tiempo de Painleve $x^\mu(\tilde{t}) = (\tilde{t}, r(\tilde{t}), \theta_0, \phi_0)$

$$S = -m \int d\tilde{t} \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - 2\sqrt{\frac{r_s}{r}} \frac{dr}{d\tilde{t}} - \left(\frac{dr}{d\tilde{t}}\right)^2}$$

- (b) Construir el hamiltoniano $H = p\dot{r} - L$ y obtener, llamando $\dot{r} = dr/d\tilde{t}$,

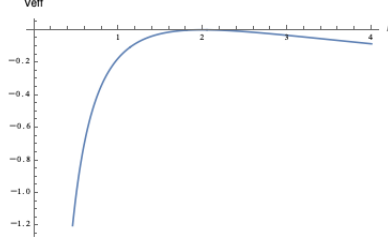
$$p_r = \frac{m(\dot{r} + \sqrt{r_s/r})}{\sqrt{1 - (\dot{r} + \sqrt{r_s/r})^2}} \rightsquigarrow H = p_r \left(\frac{p_r}{\sqrt{p_r^2 + m^2}} - \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right) + \frac{m^2}{\sqrt{p_r^2 + m^2}}$$

Puesto que el lagrangiano es invariante frente a traslaciones temporales $H = \omega = cte.$.

(c) Considerar el caso de geodésicas nulas ($m = 0$). Mostrar que a nivel clásico, las trayectorias salientes del interior del agujero negro se quedan congeladas en $r = r_s$

$$ds^2 = 0 \rightsquigarrow \boxed{\dot{r} = 1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}} \rightsquigarrow \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0 \text{ con } V_{\text{eff}} = -\left(1 - \sqrt{r_s/r}\right)^2$$

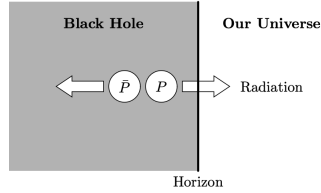
(d) Gráficar el potencial efectivo para geodésicas nulas obteniendo



(e) Resolver para el momento y obtener la acción on-shell

$$\begin{aligned} p_r = \frac{\omega}{1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}} \rightsquigarrow S_{\text{on-shell}} &= \int (p_r \dot{r} - H) d\tilde{t} = \int p_r dr - \int H d\tilde{t} \\ &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{\omega}{1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}} dr - \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_o} \omega d\tilde{t} \end{aligned} \quad (26)$$

(f) Considerar que un par partícula-antipartícula se crea muy cerca del horizonte dentro del agujero negro en $r_{in} < r_s$. Por efecto túnel a través del horizonte aparecerá afuera cerca del horizonte en $r_{out} > r_s$. Para evaluar la probabilidad debemos analizar la parte imaginaria de la acción on-shell, la cual solo puede provenir del primer término de (26)²³



$$\Im m S_{\text{on-shell}} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{\omega}{1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}} dr$$

Deformando el contorno de integración en el plano complejo o alternativamente moviendo el

²Recordemos que escribiendo $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}W}$, la expansión semiclassical conduce a $W = S_{\text{on-shell}} + O(\hbar)$.

³La coordenada temporal de Painleve es finita en el horizonte y no presenta discontinuidades.

polo en $r = r_s$ hallar

$$\begin{aligned}
 \Im m S_{\text{on-shell}} &= \Im m \left[\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{\omega}{1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}} - i\epsilon} dr \right] \\
 &= \Im m \left[\underbrace{\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{\omega}{1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}} dr}_{\in \mathbb{R}} + i\pi\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \delta \left(1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right) \right] \\
 &= 4\pi\omega M
 \end{aligned}$$

donde \int denota valor principal.

(g) Hallar la probabilidad de tuneldeo Γ y comparando con el factor de Boltzman $\Gamma \sim e^{-\beta E}$ encontrar la temperatura de Hawking

$$\psi_{WKB} = e^{iW} \sim e^{-\omega 4\pi M} \rightsquigarrow \Gamma = |\psi_{WKB}|^2 \sim e^{-2\Im m \int_{r_i}^{r_o} p_r dr} \sim e^{-\omega/T_H} \text{ con } T_{\text{Hawking}} = \frac{1}{8\pi M}$$

Ayuda: identidad útil $\int \delta(f(x)) dx = 1/f'(x_0)$ con x_0 cero de f .