Introducción a la Relatividad General - 2020
Departamento de Física - UNLP v1 2021/02/23
silva@fisica.unlp.edu.ar daniela.perez2812@gmail.com

Práctica III: Geodésicas, Simetrías, Vectores de Killing y Cargas conservadas

1. Geodésicas I: definimos una geodésica entre dos puntos P, Q sobre una variedad $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ como la curva γ de coordenadas $x^\mu(\lambda)$ que minimiza la distancia. La acción apropiada resulta

$$S[x] = \int_P^Q ds = \int_P^Q d\lambda \sqrt{\pm g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

donde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$. El $\pm$ se incluye o no dependiendo de la signatura de la métrica y su caracter temporal/espacial. Asumimos que la curva es de carácter no nulo.
(a) Mostrar que las ecuaciónes de Euler-Lagrange conducen a

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(g)\dot{x}^\alpha x^\beta = k(\lambda)\dot{x}^\mu, \qquad \text{donde} \qquad k = \frac{dL}{d\lambda}$$

con $L(\dot{x}, x) = (\pm g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}$ el lagrangiano y $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(g) = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\}$ la conexión de Levi-Civita.
(b) Mostrar que esta ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{Du^\mu}{D\lambda} \equiv u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = k\, u^\mu$$

donde ∇ es el operador derivada covariante y u^α el vector tangente a la trayectoria.
(c) Mostrar que si redefinimos el parámetro $\lambda \mapsto \lambda^*$ mediante

$$\frac{d\lambda^*}{d\lambda} = \exp\left[\int^\lambda k(\lambda')d\lambda'\right]$$

la ecuación de la geodésica toma la forma

$$\frac{D\mathsf{u}^\mu}{D\lambda^*} = 0 \tag{1}$$

donde $\mathsf{u}^\mu = dx^\mu/d\lambda^*$

2. Geodesicas II: considerar ahora el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{2}$$

(a) A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, muestre que la ecuación de la geodésica tiene la forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\} \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \tag{3}$$

recuperando (1).
(b) Muestre que (3) coincide con la ecuación de transporte paralelo del vector tangente para la trayectoria $x^\mu(\lambda)$: $\frac{D}{D\lambda}\boldsymbol{t} = \nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{t} = 0$[1] si usamos la conexión de Levi-Civita.

[1] Recordemos que acuando sobre funciones tenemos $\boldsymbol{t} = \frac{d}{d\lambda} = \dot{x}^\mu \boldsymbol{\partial}_\mu$.

Geodésica en parametrización afín $\equiv$ Transporte paralelo con conexión de Levi-Civita

(b) Mostrar que en parametrización afín tenemos una carga conservada a lo largo de la trayectoria

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = cte. \tag{4}$$

Esta ecuación implica que una vez fijado el carácter tipo tiempo/espacio/luz de una geodésica en $\tau = 0$, el mismo no cambia a lo largo de la evolución temporal.

(c) Derivar (4) como la carga de Noether asociada a la invarianza del lagrangiano (2) frente a traslaciones en τ. En otras palabras, (4) es la energía asociada a (2).

3. Formalismo Hamiltoniano:

(a) Definir los momentos canónicos $p_\mu = \partial L/\partial \dot{x}^\mu$ de (2) y obtener el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)p_\mu p_\nu$$

Mostrar que $H = 1$ corresponde a parametrización de la curva con timepo propio.

(b) Hallar la ecuación de la geodésica à la Hamilton: $\dot{p}_\mu = \{H, p_\mu\}$, obteniendo

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}p^\nu p^\rho \tag{5}$$

(c) Mostrar que (5) se obtiene de (3) mediante el reemplazo $\dot{x}^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu$.

(d) Considerar que x^α es una coordenada cíclica de L. Hallar la carga conservada asociada à la Noether. En el formalismo Hamiltoniano la carga conservada es, naturalmente, el impulso conjugado a $x^\alpha \rightsquigarrow p_\alpha$.

4. Cargas conservadas y geodésicas: considerar la métrica

$$ds^2 = -\frac{1}{z^2}dt^2 + z^2(dx^2 + dy^2) + z dz^2$$

con $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ y $z > 0$.

(a) Escribir el lagrangiano y derivar las ecuaciones de movimiento. A partir de estas últimas inferir los símbolos de Christoffel no nulos para la métrica.

(b) Determinar las cuatro cargas conservadas a lo largo de las geodésicas y usarlas para mostrar que la ecuación para la geodésica puede ser reducida a una sola ecuación que describe el movimiento de una partícula de energía E en un potencial $U(z)$,

$$\dot{z}^2 + U(z) = E$$

donde $\dot{}$ denota la derivada respecto del parámetro s a lo largo de la geodésica. Cuánto valen E y $U(z)$ en términos de las constantes de movimiento?

(c) Analizar cualitativamente el movimiento de una partícula no masiva que cae ($\dot{z}_0 < 0$) desde z_0 finito con $E > 0$ y una componente de velocidad inicial no nula en x o y ($\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 > 0$)

(d) Analizar ahora el caso donde la velocidad inicial de la partícula no masiva es nula $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ y contrastar con el item anterior.

Ayuda: para el análisis de constantes de movimiento considerar las posibles isometrías de la métrica asociadas a traslaciones, rotaciones y dilataciones.

5. Vectores de Killing y cargas de Noether para la partícula libre: decimos que $\boldsymbol{K}$ es un vector de Killing de la métrica $\boldsymbol{g}$ si

$$\text{Vector de Killing } \boldsymbol{K}: \quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{g} = 0 \tag{6}$$

(a) Coordenadas cíclicas, traslaciones y Killing: del ej 7 de la práctica 2 tenemos

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{g})_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{,\nu} + g_{\nu\rho}K^{\rho}{}_{,\mu} + K^{\rho}g_{\mu\nu,\rho} = 0 \tag{7}$$

Concluir que si la métrica no depende explícitamente de la coordenada $x^\alpha \Rightarrow \boldsymbol{K} = \boldsymbol{\partial}_\alpha$ es un vector de Killing[2]. El vector de Killing que hemos hallado genera la traslacion $x^\alpha \to x^\alpha + a$ discutida en el ej. 2.d.

(b) Dada la acción para una partícula libre en la geometría $\boldsymbol{g}$

$$S[x] = \int d\tau \; g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{8}$$

considerar la transformación $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\,\zeta^\mu(x)$ con $\epsilon \ll 1$ pequeño. Evaluar la variación de la acción a primer orden en ϵ y hallar

$$\delta S = S[\tilde{x}] - S[x] \simeq \epsilon \int (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{g})_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu d\tau$$

Luego, la acción es invariante a primer orden si

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{g})_{\mu\nu} = \nabla_\mu\zeta_\nu + \nabla_\nu\zeta_\mu = 0 \quad \text{donde} \quad \zeta_\mu \equiv g_{\mu\nu}\zeta^\nu$$

con ∇ la conexión de Levi-Civita. Concluir la existencia de cargas conservadas asociadas para todo vector de Killing de la métrica.

(c) Mostrar que si $x^\mu(\tau)$ es la solución para una geodésica parametrizada afín y $\boldsymbol{K}$ es un vector de Killing de $\boldsymbol{g}$ la cantidad

$$Q(\boldsymbol{K}) = \dot{x}^\mu K^\nu g_{\mu\nu}$$

se conserva a lo largo de la la trayectoria (cf. eqn(5)). La prueba es inmediata usando el teorema de Noether y considerando $\delta x^\mu = K^\mu(x)$ en (8).

(d) Derivada de Lie y variación de la métrica. Noción de simetría y transformaciones finitas

En la práctica 2 mostramos que a partir de la transformación de las componentes de la métrica bajo TGC

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x),$$

[2] Esto es $g_{\mu\nu,\alpha} = 0, \; \forall \mu, \nu$ con α fijo

considerando un difeomorfismo monoparamétrico $\tilde{x}^\mu_{\boldsymbol{\zeta}} = x^\mu - \epsilon\,\zeta^\mu(x) + ...$ resulta que

$$\delta g_{\mu\nu}(x) \equiv \tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \epsilon\,(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{g})_{\mu\nu}(x) + O(\epsilon^2)$$

notar que comparamos $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ en el mismo punto x.

Consideraremos ahora la definición de simetría para un tensor $\boldsymbol{T}$ dada en clase

$$\textsf{Invarianza de un tensor bajo } \psi: \qquad \psi_*\boldsymbol{T}\rfloor_p = \boldsymbol{T}\rfloor_{\psi(p)}$$

donde $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es un difeomorfismo. Escribiéndola explícitamente en términos de coordenadas locales para $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}$ obtener

$$g_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}(x),$$

Esto es, el pullback de la métrica en p bajo ψ coincide con el valor de la métrica en $\psi(p)$.

Considerando nuevamente un difeo monoparamétrico $\tilde{x}^\mu_{\boldsymbol{\zeta}} = x^\mu - \epsilon\,\zeta^\mu(x)$ concluir que

$$\psi_*\boldsymbol{T}\rfloor_p = \boldsymbol{T}\rfloor_{\psi(p)} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{g})_{\mu\nu}(x) = 0$$

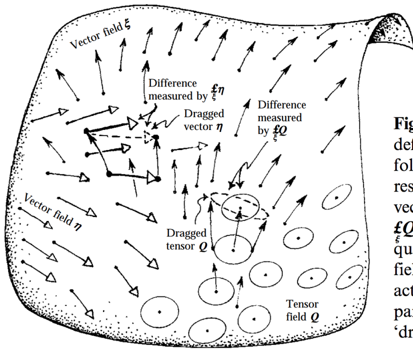


Fig. 14.13 Lie derivative $\pounds_{\xi}$, defined on a general manifold $\mathcal{M}$, is taken with respect to a given smooth vector field $\boldsymbol{\xi}$ on $\mathcal{M}$. Then $\pounds_{\xi}\boldsymbol{Q}$ measures how a quantity $\boldsymbol{Q}$ (e.g. a vector field $\boldsymbol{\eta}$ or tensor field $\boldsymbol{Q}$) actually changes, as compared with the quantity 'dragged' by $\boldsymbol{\xi}$.

6. Simetrías en presencia de potenciales:

(a) Considerar el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)p_\mu p_\nu + V(x)$$

Mostrar que si $\boldsymbol{K}$ es un vector de Killing de $\boldsymbol{g}$ y el potencial no cambia a lo largo de las curvas integrales de $\boldsymbol{K}$, esto es $\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}V = 0$, entonces

$$Q(\boldsymbol{K}) = K^\mu p_\mu \tag{9}$$

se conserva $\dot{Q} = \{H, Q\} = 0$.

(b) Considerar el acomplamiento de una partícula puntual a un campo electromagnético

$$S_{em}[x] = q\int_\gamma \boldsymbol{A} = q\int A_\mu(x)dx^\mu = q\int A_\mu(x)\dot{x}^\mu d\tau$$

Evaluar el cambio del mismo frente al flujo $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\,\zeta^\mu(x)$ y hallar que

$$\delta S_{em} = S_{em}[\tilde{x}] - S_{em}[x] = \epsilon\, q \int_\gamma (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{A}) = \epsilon\, q \int (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{A})_\mu \dot{x}^\mu d\tau$$

donde $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{A})_\mu = \zeta^\rho \partial_\rho A_\mu + A_\rho \partial_\mu \zeta^\rho$. Luego, para el caso de campos de gauge la condición para la existencia de una constante de movimiento es menos restrictiva que (6), es suficiente que

$$\text{Invarianza de campos de gauge :} \qquad \mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{d}\Lambda \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta S_{em} = \int \frac{d\Lambda}{d\tau} d\tau$$

Construir la carga conservada asociada mencionando cómo se modifica (9).

—

Old fashioned. Transformación finita: nuevamente, a partir de la ley de transformación

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\alpha(x),$$

considerando $\tilde{x}^\mu = x^\mu - \epsilon\,\zeta^\mu(x)$ mostrar que

$$\delta A_\mu(x) = \tilde{A}_\mu(x) - A_\mu(x) = \epsilon\,(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{A})_\mu(x)$$

Notar que comparamos $\tilde{A}_\mu$ y A_μ en el mismo punto x.

—

7. Cargas conservadas en el espacio tiempo: Sea $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento de un sistema físico espacialmente localizado. Sea $\boldsymbol{K}$ un vector de Killing del espacio-tiempo. Muestre que la cantidad $Q(\boldsymbol{K}) = \int T_{\mu\nu} K^\mu d\Sigma^\nu$ se conserva, es decir, toma el mismo valor sobre cualquier hipersuperficie espacial Σ.

   Ayuda: muestre que el campo vectorial/corriente $j_\mu = T_{\mu\nu} K^\mu$ tiene divergencia nula y aplique el teorema de la divergencia.

8. Vectores de Killing y su álgebra: Mostrar que:

   (a) $\boldsymbol{K}_1$ y $\boldsymbol{K}_2$ son Killing $\Rightarrow [\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2]$ es Killing

   (b) $\boldsymbol{K}_1$ y $\boldsymbol{K}_2$ son Killing $\boldsymbol{G} = a\boldsymbol{K}_1 + b\boldsymbol{K}_2$ es Killing si $a, b = ctes$

9. Simetrías ytensor de curvatura. Número máximo de vectores de Killing[3] en $\mathcal{M}$

   (a) Mostrar que todo vector de Killing satisface

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} K^\nu \quad (\dagger) \qquad \to \qquad \nabla_\mu \nabla_\sigma K^\mu = R_{\sigma\nu} K^\nu$$

   y usando Bianchi y la ecuación de Killing hallar

$$K^\lambda \nabla_\lambda R = 0$$

   Esta ecuación refleja el hecho de que el escalar R no cambia (es invariante) a lo largo del flujo generado por el vector de Killing $\boldsymbol{K}$.

[3] Ver cap.13 Weinberg.

(b.1) Concluir que dados $K^\mu(x_0)$ y $K^\mu{}_{;\rho}(x_0)$ podemos conocer todas las derivadas de orden mayor $\nabla_. ... \nabla_. K^\mu(x_0)$ tomando derivadas de (†). Las derivadas de alto orden en x_0 serán combinaciones lineales de $K^\mu(x_0)$ y $K^\mu{}_{;\rho}(x_0)$.

(b.2) La función $K^\mu(x)$, cuando exista[4], podrá escribirse como una serie de potencias en $x^\rho - x_0^\rho$ y será una combinación lineal de $K^\mu(x_0)$ y $K^\mu{}_{;\rho}(x_0)$. Luego mostrar que toda solución particular de (†) será de la forma

$$K^\mu_{(n)}(x) = A^\mu{}_\rho(x, x_0) K^\rho_{(n)}(x_0) + B^\mu{}_{\alpha\beta}(x, x_0) K^{\alpha;\beta}_{(n)}(x_0) \tag{10}$$

con A, B funciones que dependen de la métrica y de x_0 pero no de las condiciones iniciales $K^\mu(x_0)$ y $K^\mu{}_{;\rho}(x_0)$.

Definición: decimos que un conjunto de vectores de Killing $\{\boldsymbol{K}_{(n)}\}$ es linealmente independiente si para $c_n = ctes$

$$\sum_n c_n \boldsymbol{K}_{(n)}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$$

(b.3) Concluir que (10) implica que el número máximo de soluciones l.i. de (†) es $n(n+1)/2$ dado que n y $n(n-1)/2$ son el número de componentes independientes de $K^\mu(x_0)$ y $K^\mu{}_{;\rho}(x_0)$, respectivamente, que podemos elegir para integrar las ecuaciones.

10. Espacios con simetría esférica. Tensores $SO(3)$ invariantes

    (a) Para la 2-esfera S^2 en coordenadas

    $$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \,.$$

    hallar los tres vectores de Killing $\boldsymbol{K}_{(i)}$

    $$\boldsymbol{K}_{(1)} = \cos\phi \boldsymbol{\partial}_\theta - \cot\theta \, \sin\phi \boldsymbol{\partial}_\phi, \quad \boldsymbol{K}_{(2)} = -\sin\phi \boldsymbol{\partial}_\theta - \cot\theta \, \cos\phi \boldsymbol{\partial}_\phi, \quad \boldsymbol{K}_{(3)} = \boldsymbol{\partial}_\phi,$$

    Ayuda: hallar los Christofell (Levi-Civita), escribir explicitamente $\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0$ y resolverlas.

    (b) Mostrar que generan el álgebra de $SU(2)$ bajo el corchete de Lie:

    $$[\boldsymbol{K}_{(i)}, \boldsymbol{K}_{(j)}] = \epsilon_{ijk} \boldsymbol{K}_{(j)}$$

    .

    (c) Simetría esférica: en un espacio-tiempo 4d considerar los vectores $K^\mu_{(i)} = (0, 0, K^\theta_{(i)}, K^\phi_{(i)})$, siendo $(K^\theta_{(i)}, K^\phi_{(i)})$ las componentes de los vectores de Killing del inciso (a).
    Mostrar que un tensor $T_{\mu\nu}$ invariante bajo estos vectores tiene componentes

    $$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{tt}(t,r) & T_{tr}(t,r) & 0 & 0 \\ T_{rt}(t,r) & T_{rr}(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\theta\theta}(t,r) & T_{\theta\phi}(t,r)\sin\theta \\ 0 & 0 & -T_{\theta\phi}(t,r)\sin\theta & T_{\theta\theta}(t,r)\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

[4]Existen condiciones de consistencia para la existencia de la solución, a.k.a. integrability conditions.

De manera que la métrica de un espacio-tiempo 4d con simetría esférica toma la forma

$$ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + g_{rr}\, dr^2 + 2g_{tr}\, dt\, dr + f^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) . \tag{11}$$

donde $g_{tt}, g_{rr}, g_{tr}, f$ son funciones de (t, r). Verificar explícitamente que los vectores del inciso anterior satisfacen la ecuación de Killing en esta geometría.

Optativos:

11. Invarianza conforme: los vectores de Killing conformes $\boldsymbol{\xi}$ de una métrica $\boldsymbol{g}$ se definen a partir de aquellos diffeos $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) + \ldots$ que dejan la métrica invariante a menos de un cambio de escala, esto es

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{g} = f(x)\boldsymbol{g} \quad \leftrightarrow \quad \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = f(x) g_{\mu\nu} \;\; \text{donde} \;\; \xi_\mu = g_{\mu\nu}\xi^\nu \tag{12}$$

a. Considerando $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\eta}$ mostrar que la solución mas general para $d > 2$ es

$$\xi_\mu = a_\mu - \omega_{\mu\nu} x^\nu + \kappa\, x_\mu + b_\mu x^2 - 2x_\mu (b \cdot x)$$

donde los parámetros $a_\mu, b_\mu, \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \kappa$ parametrizan: traslaciones, transformaciones conformes especiales, rotaciones/boots y dilataciones.

b. Hallar la forma finita para las transformaciones anteriores (curvas integrales del campo vectorial ξ^μ) a partir de

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = \xi^\mu(x(t)), \qquad x^\mu(0) = x^\mu$$

obteniendo

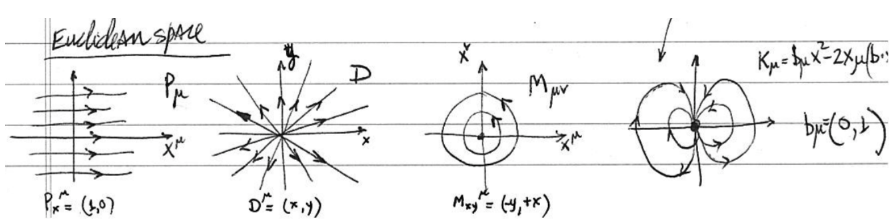
$$\text{Poincare}: \quad x^\mu(t) = x^\mu + t a^\mu, \qquad x^\mu(t) = \Lambda^\mu{}_\nu(t)\, x^\nu \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

donde $\Lambda^\mu{}_\nu(t) = \left(e^{t\omega}\right)^\mu{}_\nu$ con $\omega^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$ que dan origen a Killing de espacio plano y

$$\text{Dilataciones}: \quad x^\mu(t) = e^{\kappa t} x^\mu \qquad \text{Conformes especiales}: \quad x^\mu(t) = \frac{x^\mu + t\, b^\mu x^2}{1 + 2tb \cdot x + t^2\, b^2 x^2}$$

que satisfacen (12) con $f \neq 0$.

c. Graficar las lineas de flujo de estos campos para signatura Riemanniana y pseudo-Riemmanniana.



Nota: (i) En $\mathbb{R}^{1,d-1}/\mathbb{R}^d$, el álgebra generada por los CKV resulta $SO(2,d)/SO(1,d+1)$.
(ii) $d = 2$ es especial, aquí el grupo conforme es infinito dimensional, se relaciona con transformaciones holomorfas de la métrica (en signatura Euclídea) y su álgbera se conoce como deWitt (a nivel clásico) y Virasoro (a nivel cuántico).

12. Espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2 = EAdS_2$: considerar el semiplano superior de $\mathbb{R}^2$ con la métrica de Poincare

$$ds^2 = \frac{dz^2 + dx^2}{z^2}, \qquad z > 0$$

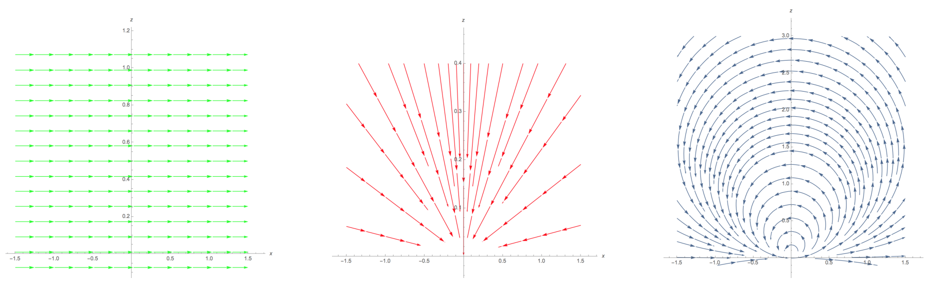
(o) Mostrar que la inversión de coordenadas de Poincare

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{z^2 + \boldsymbol{x}^2}, \qquad z \mapsto z' = \frac{z}{z^2 + \boldsymbol{x}^2}$$

es una simetria de la métrica EAdS_{d+1} : $ds^2 = (dz^2 + d\boldsymbol{x}^2)/z^2 \;\; \forall d$. Mostrar que el determinante del jacobiano, $|\partial x'/\partial x|$ es negativo. Luego, esta isometría *discreta* no es un elemento del grupo propio de simetría $SO(1,d+1)$.
(i) Escribir las ecuaciones para las geodésicas y resolverlas. Mostrar que son: o bien líneas rectas verticales, o bien círculos centrados en el eje x

(ii) Mostrar que es un espacio de curvatura constante negativa.

(iii) Mostrar que tiene tres vectores de Killing. Hay dos que son obvios: $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\partial}_x$ (traslación), $\boldsymbol{\xi}_2 = -(x\boldsymbol{\partial}_x + z\boldsymbol{\partial}_z)$ (dilatación), el tercero es $\boldsymbol{\xi}_3 = (x^2 - z^2)\boldsymbol{\partial}_x + 2xz\boldsymbol{\partial}_z$. Verificarlo. Hallar la expresión para la transformación finita $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$ de la cual estos $\boldsymbol{\xi}_i$ son las expresiones diferenciales. Las curvas integrales son



(iv) Mostrar que los Killing generan el álgebra $so(2,1)$

(v) Mostrar que las tres cargas conservadas asociadas a los tres Killing no son independientes. Esto es natural ya que la condiciones iniciales para la velocidad en el plano involucran especificar 2 componentes.

(vi) Mostrar que la longitud propia de las geodésicas diverge al acercarnos al '*borde*' $z = 0$.

Nota: observen que la acción de las simetrías sobre el eje x, i.e. borde de EAdS_2, es cerrada.

Referencias:

M Bañados e I Reyes, arXiv: 1601.03616, secc 2.3.2.
JW van Holten, *Gravitational Waves and Black Holes*, gr-qc/9704043.
H Osborn, *Lectures on CFT*, DAMTP.
S Weinberg, *Gravitation*, Cap 13.