

Práctica III: Transporte paralelo y curvatura

v1 2019/10/02

1. Geodésicas no cambian su carácter a lo largo de su evolución temporal:
  - (o) Mostrar que la ecuación de la geodésica en parametrización afín

$$\ddot{x}^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (1)$$

puede ser obtenida a partir de la acción

$$S = \int d\tau g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2)$$

- (i) A partir de la ecuación de la geodésica en parametrización de tiempo propio (1), mostrar

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = cte. \quad (3)$$

Esta ecuación implica que una vez fijado el carácter tipo tiempo/espacio/luz de una geodésica en  $\tau = 0$ , el mismo no cambia a lo largo de la evolución temporal.

2. Partícula cargada: (i) A partir de la acción

$$S = \int d\tau \left( \frac{m}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + q A_\mu(x) \dot{x}^\mu \right)$$

derivar la ecuación de movimiento de una partícula cargada en espacio curvo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu} \quad (4)$$

donde la conexión  $\Gamma$  es la de Levi-Civita y  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  es el vector velocidad.

- (ii) Mostrar que (4) también tiene una cantidad conservada,

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = cte.$$

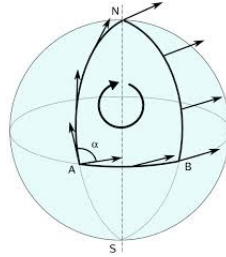
a lo largo de la trayectoria. La interacción con el campo electromagnético no modifica el carácter de la trayectoria. Los valores 0, +1, -1 corresponden a trayectorias nulas, espaciales y temporales respectivamente.

3. Conexiones compatibles con la métrica: Mostrar que para la conexión de Levi-Civita si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son transportados paralelamente sobre una curva,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es constante sobre la curva. Concluimos que:

- (i) el ángulo entre los vectores permanece constante
- (ii) el módulo de un vector no cambia.
- (iii) Subir/bajar índices antes o después del transporte paralelo dan el mismo resultados.

4. Transporte paralelo en la esfera: Considere la esfera  $S^2$  con la conexión de Levi-Civita para la métrica usual, y el vector de componentes  $V^\mu = (-1, 0)$  en el espacio tangente en el punto  $x_A^\mu = (\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ .

(a) Calcule el vector que se obtiene luego de transportarlo paralelamente a lo largo de las curvas



$$x_A^\mu = (\pi/2, 0) \xrightarrow{C_1} x_N^\mu = (0, 0) \xrightarrow{C_2} x_B^\mu = (\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{C_3} x_A^\mu = (\pi/2, 0)$$

(b) Hallar el ángulo  $\alpha$  entre el vector original y el transportado paralelamente luego de recorrer el lazo.

5. Transporte paralelo II: considerar  $S^2$  parametrizada en coordenadas esféricas usuales  $x^\mu = (\theta, \phi)$  y dotada de la siguiente conexión

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = -\cot\theta \quad (5)$$

siendo el resto nulas.

(b) Verificar que (5) es la conexión de Levi-Civita para la métrica usual

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

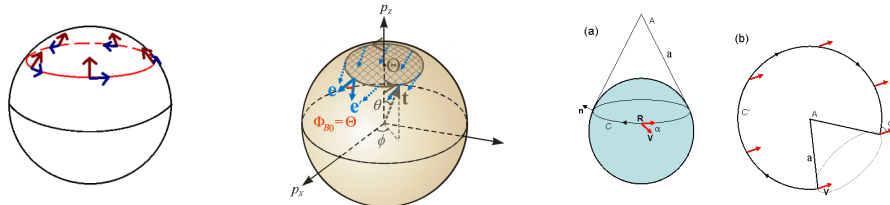
(c) Considerar la base no coordenada/anholónoa  $\check{\mathbf{E}}_\theta = \partial_\theta$  y  $\check{\mathbf{E}}_\phi = (\sin\theta)^{-1}\partial_\phi$  de vectores ortonormales respecto de la métrica usual. Hallar los coeficientes de la conexión en esta base.

(d) Evaluar los corchetes de Lie para la base coordenada y para la base ortonormal.

Interpretar el resultado

(e) Mostrar que  $\partial_\theta$  es autoparalelo, mientras que  $\partial_\phi$  solo lo es sobre la curva que circula en el ecuador. Interpretar en términos de las líneas de flujo de dichos campos.

(a) Transportar paralelamente el vector  $\mathbf{V}(\theta_0, 0) = \partial_\theta$  a lo largo de la curva  $\theta = \theta_0$  (meridiano). Cuál es el cambio al volver al punto inicial?



Analizar el dibujo de la izquierda y discutir por qué es incorrecto y no representa el transporte paralelo del vector rojo a lo largo del meridiano de vector tangente azul. Los dibujos del centro, (a) y (b) son los correctos<sup>1</sup>.

(f) Hallar el tensor de torsión  $\mathbf{T}$  en la base coordenada y en la base anholónoma.

6. Coordenadas normales de Riemann o sistemas inerciales locales: consideremos la conexión de Levi-Civita en base de coordenadas

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\}$$

Las coordenadas normales de Riemann se definen en el entorno de  $p$ , un punto/evento de la variedad  $\mathcal{M}$ , como un sistema de coordenadas localmente inercial, i.e.  $\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^{\mu}(x_p) = 0$ . De manera que en este sistema de coordenadas, en el punto  $p$ , las geodésicas satisfacen la ecuación<sup>2</sup>

$$\frac{d^2 \tilde{x}^{\mu}}{d\tau^2} = 0$$

Esto significa que hemos suprimido los efectos de la gravedad localmente pasando a un sistema de referencia en caída libre.

(a) Mostrar que el cambio de variables de  $x^{\mu}$  a coordenadas normales de Riemann  $\tilde{x}^{\mu}$  en un punto  $x^{\mu} = x_p^{\mu}$  solo fija las primeras y segundas derivadas. Considerar el cambio de coordenadas

$$\tilde{x}^{\mu}(x) = x^{\mu} + A_{(1)\rho}^{\mu}(x^{\rho} - x_p^{\rho}) + A_{(2)\rho\sigma}^{\mu}(x^{\rho} - x_p^{\rho})(x^{\sigma} - x_p^{\sigma}) + O[(x - x_p)^3].$$

**Ayuda:** las condiciones a imponer son  $\tilde{g}_{\mu\nu}(x_p) = \eta_{\mu\nu}$  y  $\tilde{\partial}_{\rho}\tilde{g}_{\mu\nu}(x_p) = 0$ . Bajo un cambio de coordenadas tenemos  $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} g_{\mu\nu}$  restringiéndonos a  $x = x_p$  obtenemos una condición sobre las derivadas primeras  $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}}|_p$ . Un razonamiento análogo aplicado a la transformación de los Christoffells, pidiendo  $\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^{\mu}(x_p) = 0$  nos da la condición sobre las derivadas segundas. Notar que el sistema de coordenadas no es único ya que podemos realizar una transformación de Lorentz sobre  $\tilde{x}^{\mu}$  preservando las condiciones en  $p$ .

(b) Analizar si es posible eliminar las derivadas segundas de la métrica en  $p$  mediante un cambio de coordenadas apropiado.

Ver Schutz, *A first course in general relativity*, 1985, sect 6.2

7. Tensor de curvatura de Riemann: considerar la conexión de Levi-Civita y base de coordenadas. El tensor de curvatura Riemann toma la forma

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\rho} \leftrightarrow \mathbf{R}^{\alpha}_{\beta} = d\Gamma^{\alpha}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma} \wedge \Gamma^{\gamma}_{\beta}$$

(i) Mostrar que el tensor de Riemann transforma como un tensor

<sup>1</sup>La paradoja surge de suponer que el producto escalar (ángulo) entre los vectores azul y rojo debe permanecer constante durante el transporte. Esta afirmación sólo es válida si la curva a lo largo de la cual transportamos es autoparalela. La curva roja no es autoparalela, si lo fuera, sería una geodésica (autoparalela=geodesica para Levi-Civita), las cuales son círculos máximos sobre la esfera. La curva rosa (meridiano) no es un círculo máximo.

<sup>2</sup>La existencia de coordenadas normales de Riemann vale también para el caso mas general de una conexión simétrica.

(ii) Mostrar que el tensor de curvatura tiene las siguientes simetrías

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$R^\alpha_{[\beta\mu\nu]} = 0 \leftrightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

(iii) Usando el item anterior mostrar que el tensor de curvatura en un espacio-tiempo  $D$ -dimensional tiene  $\frac{D^2(D^2-1)}{12}$  componentes independientes.

(iv) Muestre que el tensor de Ricci es la única contracción independiente de  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ , todas las demás son múltiplos de ésta. Muestre además que  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ .

8. Tensor de curvatura de Weyl: en una variedad de dimensión  $n$  el tensor de curvatura de Weyl está definido como:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{2}{n-2} (g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} - g_{\beta[\gamma}R_{\delta]\alpha}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta},$$

donde  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  es el tensor de Riemann y  $R$  es el escalar de Ricci. Muestre que:

a) El tensor de Weyl posee las mismas simetrías que el tensor de Riemann.

b) Cualquier forma contraída del tensor de Weyl se anula idénticamente.

Esto último muestra que el tensor de Riemann puede descomponerse en una parte con traza nula dada por el tensor de Weyl, y una parte con traza no nula dada por el tensor de Ricci.