

Práctica II: Bases no holónomas, Derivada de Lie

1. Bases holónomas y no holónomas:

(a) Sea  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , mostrar que la base  $\{\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_\theta\}$ :

$$\mathbf{E}_r = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y, \quad \mathbf{E}_\theta = -\sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_y$$

definida en  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  es una base an-holónoma.

(b) De la relación  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  mostrar que

$$\mathbf{E}_r = \partial_r \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta$$

(c) Hallar la base  $\{\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta\}$  dual a  $\{\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_\theta\}$  y expresarla en términos de la base  $\{dr, d\theta\}$  dual a la base coordenada  $\{\partial_r, \partial_\theta\}$ . Mostrar que la métrica euclídea  $\mathbf{g} = d\mathbf{x} \otimes d\mathbf{x} + d\mathbf{y} \otimes d\mathbf{y}$  toma la forma  $\mathbf{g} = \mathbf{e}^r \otimes \mathbf{e}^r + \mathbf{e}^\theta \otimes \mathbf{e}^\theta$ .

**Nota:** siendo  $(x, y)$  las coordenadas cartesianas de un espacio euclídeo, resulta entonces  $\{\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_\theta\}$  son los versores polares. Notemos que la palabra “versor” sólo tiene sentido si el espacio cuenta con una manera de evaluar el módulo de un vector, esto es con una métrica, en este caso la euclídea.

2. Espacio plano en coordenadas curvilíneas: la derivada covariante de un vector  $\mathbf{V}$  en una base coordenada  $\mathbf{E}_\mu = \partial_\mu$  esta dada por

$$\nabla \mathbf{V} = (\partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho) \mathbf{E}_\mu \otimes dx^\nu$$

a) Considerar el espacio plano y la conexión de Levi-Civita. Mostrar que para  $\mathbf{V} = \partial_r$  resulta  $\nabla \partial_r = \frac{1}{r} \mathbf{E}_\theta \otimes d\theta$ . Hacer el cálculo en coordenadas polares  $(r, \theta)$  y cartesianas  $(x, y)$ , y comparar los resultados.

b) Calcular en coordenadas polares todas las componentes de la segunda derivada covariante  $(\partial_r)_{;\mu;\nu}$ .

3. Conexión de Levi-Civita: Calcular los símbolos de Christoffell para la conexión de Levi-Civita del espacio de Minkowski en los siguientes sistemas de coordenadas:

a) Esféricas  $(t, r, \theta, \varphi)$ .

b) Rindler  $(T, X, Y, Z)$ : definidas por

$$T = \frac{1}{g} \operatorname{arctanh}\left(\frac{t}{x}\right), \quad X = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad Y = y \quad \text{y} \quad Z = z. \quad (1)$$

Notar que estas coordenadas sólo cubren la *Cuña de Rindler*, definida por  $-x < t < x$ .

4. Composición de vectores y corchete de Lie:

(i) Dados dos vectores  $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ , mostrar que la composición  $(\mathbf{V} \circ \mathbf{W})(f) = \mathbf{V}(\mathbf{W}(f))$  no es un vector.

**Ayuda:** satisface linealidad, pero no satisface Leibniz pues involucra derivadas segundas.

(ii) Mostrar que el corchete de Lie de dos vectores

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}](f) = \mathbf{V}(\mathbf{W}(f)) - \mathbf{W}(\mathbf{V}(f))$$

define un vector.

(iii) Mostrar que en la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$  las componentes del corchete de Lie son

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}]^\mu = V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu \quad (2)$$

(iv) Sean  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  campos vectoriales suaves en  $\mathcal{M}$ , verificar que el corchete de Lie satisface Jacobi

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0 \quad (3)$$

5. Derivada de Lie

La derivada de Lie  $\mathcal{L}_U$  compara tensores a lo largo de una congruencia de curvas definidas a partir de un campo vectorial  $U$  sobre la variedad. Esta derivada no cambia el carácter del tensor.

. Derivada de Lie de un escalar  $f$  en la dirección de  $U$ :  $\mathcal{L}_U f \doteq U(f)$

. Derivada de Lie del vector  $\mathbf{V}$  en la dirección de  $U$ :  $\mathcal{L}_U \mathbf{V} \doteq [U, \mathbf{V}]$

a) Muestre que la derivada de Lie es lineal y obedece la regla de Leibniz cuando actúa sobre el producto de una función por un vector.

b) Dados  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$  campos vectoriales: Probar que sobre funciones  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ , donde  $M$  denota la variedad, y vectores  $\mathbf{V} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  se satisface

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] f = \mathcal{L}_{[X, Y]} f, \quad [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \mathbf{Z} = \mathcal{L}_{[X, Y]} \mathbf{Z}. \quad (4)$$

c) Usando la identidad de Jacobi (3), verificar que

$$\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$

Concluimos que la derivada de Lie es una derivación en el álgebra de Lie de vectores.

Llamando  $\mathbf{V} \bullet \mathbf{W} \doteq [\mathbf{V}, \mathbf{W}]$  rexpresar la última ecuación como

$$\mathcal{L}_X (\mathbf{Y} \bullet \mathbf{Z}) = \mathcal{L}_X \mathbf{Y} \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{Y} \bullet \mathcal{L}_X \mathbf{Z}$$

d) La derivada de Lie satisface Leibniz al actuar sobre productos tensoriales

$$\mathcal{L}_U (\omega \otimes \mathbf{V}) = (\mathcal{L}_U \omega) \otimes \mathbf{V} + \omega \otimes \mathcal{L}_U \mathbf{V}. \quad (5)$$

Podemos obtener la derivada de Lie actuando sobre 1-formas contrayendo esta relación,

$$\mathcal{L}_U \langle \alpha, \mathbf{V} \rangle = \langle \mathcal{L}_U \alpha, \mathbf{V} \rangle + \langle \alpha, \mathcal{L}_U \mathbf{V} \rangle$$

donde  $\omega$  es una 1-forma,  $\mathbf{V}$  un vector y  $\langle \alpha, \mathbf{V} \rangle = \alpha(\mathbf{V})$ . Mostrar que en base coordenada  $\{\partial_\mu\}$  la derivada de Lie de una 1-forma  $\alpha$  resulta

$$(\mathcal{L}_U \alpha)_\mu = U^\nu \partial_\nu \alpha_\mu + \alpha_\nu \partial_\mu U^\nu$$

e) Generalizando el procedimiento anterior hallar la expresión para la derivada de Lie de un tensor arbitrario  $\binom{r}{s}$  obteniendo

$$(\mathcal{L}_U \mathbf{T})^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = U^\rho \partial_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - T^{\rho \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho U^{\mu_1} - T^{\mu_1 \rho \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho U^{\mu_2} - \dots \\ + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\rho \dots \nu_s} \partial_{\nu_1} U^\rho + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \rho \nu_3 \dots \nu_s} \partial_{\nu_2} U^\rho + \dots \quad (6)$$

f) Mostrar que la derivada de Lie conmuta con el producto exterior

$$\mathcal{L}_U(d\omega) = d(\mathcal{L}_U \omega)$$

g) Usando (5) para un tensor arbitrario  $\mathbf{T}$  mostrar que

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \mathbf{T} = \mathcal{L}_{[X, Y]} \mathbf{T}$$

h) Mostrar que las derivadas parciales en (6) se pueden reemplazar por derivadas covariantes si la conexión no tiene torsión (es simétrica).

6. Derivada de Lie y difeomorfismos monoparamétricos: considerar la ley de transformación para las componentes de un tensor  $\binom{r}{s}$  bajo TGC  $x \mapsto \tilde{x}(x)$

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(\tilde{x}) = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots}_{r \text{ jacobianos}} \underbrace{\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \dots}_{s \text{ jacobianos}^{-1}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}(x)$$

Considerando un difeomorfismo monoparamétrico  $\tilde{x}^\mu_\zeta = x^\mu - \epsilon \zeta^\mu(x) + \dots$  mostrar que

$$\delta T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \equiv \tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x) - T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \\ = \epsilon (\mathcal{L}_\zeta \mathbf{T})^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x) + O(\epsilon^2)$$

Al comparar  $\tilde{T}$  y  $T$  en el mismo punto  $x$  obtenemos un tensor, *i.e.* la derivada de Lie.

7. Derivada de Lie de la métrica y conexión de Levi-Civita: usando (6) hallar la derivada de Lie de la métrica  $\mathbf{g}$  en la dirección del vector  $\boldsymbol{\xi}$

$$(\mathcal{L}_\xi \mathbf{g})_{\mu\nu} = \xi^\rho g_{\mu\nu, \rho} + g_{\mu\rho} \xi^\rho_{, \nu} + g_{\nu\rho} \xi^\rho_{, \mu}$$

Mostrar que puede ser reexpresada como

$$(\mathcal{L}_\xi \mathbf{g})_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad \xi_\mu \equiv g_{\mu\nu} \xi^\nu$$

donde la conexión  $\nabla = \partial + \Gamma$  es la de Levi-Civita, *i.e.*  $\Gamma = g^{-1}(\partial g + \dots)$ .

8. Producto exterior:

(a) Hallar la 3-forma que resulta del producto exterior entre la 1-forma  $\boldsymbol{\alpha} = 3x^2 y \mathbf{d}x - 5z \mathbf{d}z$  y la 2-forma  $\boldsymbol{\beta} = 7zy^3 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z - 2x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ . Depende el resultado del orden de los factores?

(b) Calcule la derivada exterior de la 3-forma del ítem anterior por dos caminos: i) derivando directamente el resultado; ii) aplicando la regla para derivar un producto de formas.

9. grad, rot y div: considerar en  $\mathbb{R}^3$

$$\phi_0 = \phi(x, y, z)$$

$$\mathbf{v}_1 = v_x(x, y, z) \mathbf{d}x + v_y(x, y, z) \mathbf{d}y + v_z(x, y, z) \mathbf{d}z$$

$$\mathbf{f}_2 = f_{xy}(x, y, z) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + f_{yz}(x, y, z) \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + f_{zx}(x, y, z) \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x$$

Hallar  $\mathbf{d}\phi$ ,  $\mathbf{d}\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{d}\mathbf{f}_2$  y concluir que la acción de  $\mathbf{d}$  sobre 0-formas es equivalente a grad, sobre 1-formas es equivalente a rot y sobre 2-formas es equivalente a div si definimos en este último caso el vector  $f^\mu \doteq \epsilon^{\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}$ . Las relaciones usuales en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

son equivalentes a  $\mathbf{d}(\mathbf{d}\phi) = 0$  y  $\mathbf{d}(\mathbf{d}\mathbf{a}_1) = 0$ .

10. Coordenadas de Eddington-Finkelstein: Considere el espacio-tiempo 2d cuyo elemento de línea es

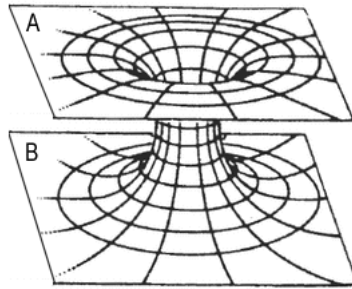
$$ds^2 = -x dv^2 + 2 dv dx.$$

- Realice un diagrama del espacio tiempo en coordenadas  $(v, x)$  indicando la orientación de los conos de luz al variar la coordenada  $x$ .
- Mostrar que una partícula puede cruzar de la región de  $x > 0$  a  $x < 0$ , pero no a la inversa.
- Rehacer el problema para coordenadas EF salientes  $ds^2 = -x dv^2 - 2 dv dx$

11. Métricas inducidas e Inmersión: Considere el espacio-tiempo cuya métrica está definida por el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde  $b$  es una constante. Este espacio posee invariancia frente a traslaciones temporales y simetría esférica, y para  $b = 0$  se reduce al espacio de Minkowski. Para  $b \neq 0$  este espacio resulta curvo, y si bien es asintóticamente plano (*¿cómo lo vemos?*), no es difícil ver que tiene una topología muy distinta a la de Minkowski. Muestre que este espacio puede ser inmerso en un espacio plano 5-dimensional.



**Ayuda:** Usando la simetría esférica y la invariancia ante translaciones temporales puede concentrarse, sin pérdida de generalidad, en el subespacio con  $t$  y  $\theta$  constantes. En particular, tome  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y muestre que dicho subespacio 2-dimensional puede verse como una superficie en un espacio euclídeo 3-dimensional. Reconstruya finalmente la transformación de coordenadas completa.

**Ejercicios Opcionales:**

12. Contracciones de tensores: sea  $\mathbf{T}$  un tensor de tipo  $\binom{3}{2}$ . Definimos el tensor tipo  $\binom{2}{1}$  como

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{X}) \doteq \mathbf{T}(\mathbf{e}^a, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{E}_a, \mathbf{X})$$

donde  $\{\mathbf{E}_a\}$  y  $\{\mathbf{e}^a\}$  son bases duales de  $V$  y  $V^*$  respectivamente,  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}$  son co-vectores arbitrarios y  $\mathbf{X}$  es un vector arbitrario. Mostrar que esta definición es independiente de la base elegida y hallar las componentes de  $\mathbf{S}$  en una base coordenada.

13. Problema de Kepler, separabilidad, cargas conservadas y simetrías dinámicas

—

*Historia: El problema de Kepler para órbitas acotadas posee simetría  $SO(4)$ . La existencia de una cantidad del movimiento adicional a  $\mathbf{L}$ , fue descubierta por Laplace en su Tratado de mecánica celeste de 1799, y posteriormente rederivada, aparentemente de forma totalmente independiente, por Hamilton en 1845. Sin embargo, la existencia de este invariante permaneció ignorada hasta que Runge lo popularizó en su **Vektoranalysis** publicado en 1919, desde entonces, este invariante es conocido como vector de Runge-Lenz  $\mathbf{A}$ . El observable cuántico asociado al vector de Runge-Lenz fue utilizado por Pauli para obtener el espectro del átomo de hidrógeno, mediante técnicas puramente algebraicas, en el contexto de la “nueva mecánica cuántica” de Heisenberg. Fock, en 1935, demostró la invariancia del sistema bajo transformaciones globales del grupo  $SO(4)$ . Un año más tarde, en 1936, Bargmann demostró que los generadores de las transformaciones utilizadas por Fock eran el momento angular y el vector de Runge-Lenz.*

—

Las coordenadas esferoidales prolatas se definen a partir de las coordenadas cartesianas del espacio euclídeo  $(x, y, z)$  via

$$x = \sinh \xi \sin \eta \cos \phi, \quad y = \sinh \xi \sin \eta \sin \phi, \quad z = \cosh \xi \cos \eta.$$

- a) Hallar el intervalo  $ds^2$  en estas coordenadas

$$ds^2 = (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)(d\xi^2 + d\eta^2) + \sinh^2 \xi \sin^2 \eta d\phi^2$$

- b) Calcular la conexión de Levi-Civita.  
 c) Verificar que alternativamente podemos hallar la conexión de Levi-Civita en coordenadas prolatas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la geodésica.  
 d) Construir el Hamiltoniano, la ecuación de Hamilton-Jacobi y mostrar que resulta separable.

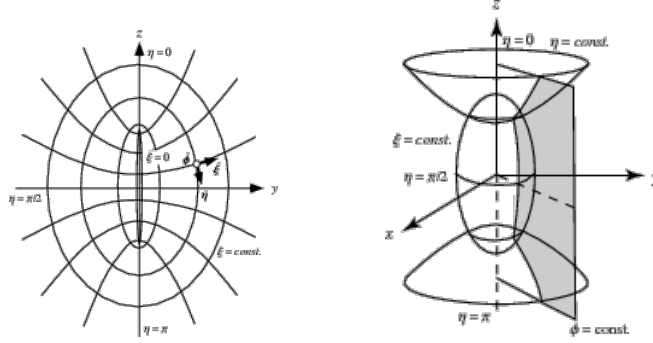


Figura 1: Coordenadas elípticas prolatas: Las superficies  $\xi = cte.$  son elipsoides de revolución mientras que las superficies de  $\eta = cte.$  son hiperboloides de revolución alrededor del eje  $z$

14. Conexiones que preservan la métrica con torsión no nula: resolver en base de coordenadas  $\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0$  considerando las componentes antisimétricas de la conexión, esto es, en presencia de torsión no nula. Hallar que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + K_{\alpha\beta}^{\mu}$$

donde el término adicional  $K_{\alpha\beta}^{\mu} = g^{\mu\nu}K_{\alpha\nu\beta}$  se conoce como tensor de contorsión y se expresa en términos del tensor de torsión  $T_{\alpha\mu\beta} = g_{\mu\nu}T_{\alpha}^{\nu\beta}$  como

$$K_{\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\mu\beta} - T_{\beta\alpha\mu} - T_{\alpha\beta\mu})$$

---

### Referencias:

- T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, Phys. Rept. **66**, 213 (1980).  
M Bañados e I Reyes, arXiv: 1601.03616, secc 2.3.2.  
V Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.  
M Nakahara, *Geometry, topology and physics*, IOP, 2003.  
B Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, CUP.  
V Guillemin and S Sternberg, *Variations on a Theme by Kepler*, AMS, 1990.